

# Mécanismes d'écoulement des charges à la surface des polymères granulaires

Miloud Kachi <sup>a \*</sup>, Lucien Dascalescu <sup>b</sup>

<sup>a</sup> Laboratoire de Génie Electrique de Guelma, Université 8Mai 1945-Guelma, B.P 401, Guelma, Algérie

<sup>b</sup> Institut PPRIME, Université de Poitiers, avenue de Varsovie, 16021, Angoulême, France

---

## ARTICLE INFO

Article history :  
Received November 2013  
Accepted January 2014

Keywords :  
Matériaux granulaires ;  
Déclin de la charge ;  
Potentiel de surface ;  
mesures électrostatiques.

---

## ABSTRACT

Les forces électriques s'exerçant sur des polymères granulaires chargés sont mises à profit dans plusieurs processus électrostatiques. La dynamique de charges de surface de ces matériaux est très importante pour ce type de processus. Le but de ce papier est d'analyser l'écoulement des charges à la surface de couches compactes de polymères granulaires, en interprétant les mesures sans contact réalisées par trois sondes de potentiel, de champ et de charge, ayant chacune une taille différente. Des mesures du profil de potentiel à différents instants sont également réalisées afin d'expliquer les différences entre les vitesses de déclin de potentiel, de champ et de charge mesurées par les trois sondes. Les résultats mettent en évidence un écoulement transversal et longitudinal de la charge surfacique.

©2014 LESI. All right reserved.

---

## 1. Introduction

La dynamique des charges à la surface des matériaux isolants peut être perçue comme un indicateur des propriétés surfaciques et volumiques du matériau. Au cours des trois dernières décennies, le déclin du potentiel électrique et la répartition de celui-ci à la surface de ces matériaux ont été intensivement étudiés afin d'expliquer cette dynamique et sa relation avec les caractéristiques de l'isolant. La caractérisation des matériaux isolants par la méthode du Déclin de Potentiel de Surface (DPS) a été surtout appliquée pour le cas des films polymères. Les chercheurs s'accordent sur le fait que le déclin du potentiel peut être causé par quatre mécanismes possibles : l'injection de la charge dans le volume du matériau, la conduction, la polarisation et la neutralisation par des ions présents dans l'air ambiant. Ces mécanismes peuvent coexister pour provoquer le déclin de potentiel mais la prépondérance de l'un ou de l'autre de ces mécanismes dépend des propriétés diélectriques du matériau, de ses dimensions et des conditions ambiantes [1-8].

Dans plusieurs applications électrostatiques, telle que la séparation des isolants [9], les

---

\*Email : miloud.kachi@gmail.com

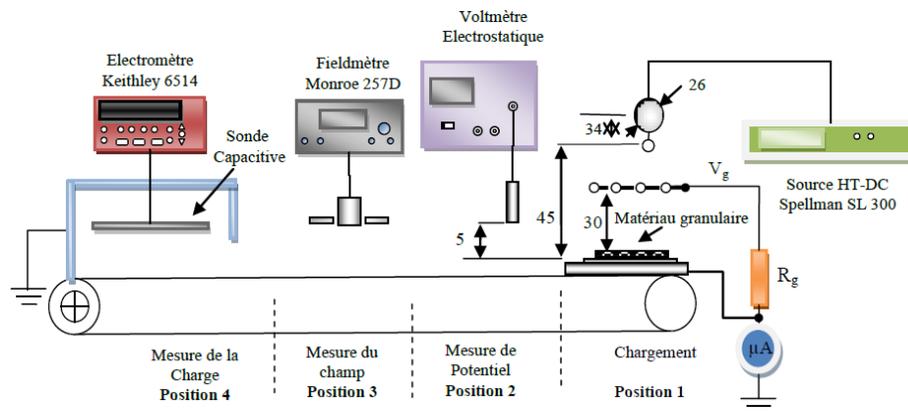
matériaux polymères se présentent sous forme de granules d'où la nécessité de mesurer l'écoulement de charges à la surface de ce type de matériaux. Ce papier a comme but de caractériser la dynamique spatio-temporelle de la charge électrique des couches compactes de matériaux granulaires par la mesure de grandeurs surfaciques : potentiel, champ et charge, et de déterminer les mécanismes qui en sont responsables.

## 2. Procédure expérimentale

Deux types de mesures ont été réalisées : des mesures de déclin de la charge, du champ et du potentiel et des mesures de distribution du potentiel à la surface des couches de granules. Chaque procédure de mesure sera décrite séparément.

### 2.1. Mesures de déclin de la charge, du champ et du potentiel

Les mesures ont été réalisées sur quatre types de matériaux de différentes formes et tailles à savoir le polyéthylène PE, le polycarbonate PC, le polyamide PA et le Acrylonitrile butadiène styrène ABS. Les mesures ont été réalisées sur des échantillons constitués d'une monocouche de granules (poids : 11 grammes), déposés sur une aire de  $7.5\text{cm} \times 8\text{cm}$  sur la surface d'une plaque d'aluminium mise à la masse. La figure 1 illustre le schéma de principe de l'installation utilisée. Une bande transporteuse, qui supporte le porte-échantillon, déplace celui-ci du poste de chargement (1) vers les postes de mesures : du potentiel (2), du champ (3) et de la charge (4). Les échantillons ont été chargés avec une décharge couronne négative générée par une électrode de type triode, composée de fil de tungstène suspendu au dessus d'une grille métallique, placée entre l'électrode et l'échantillon, afin d'uniformiser et contrôler le chargement. Les dimensions en millimètre sont indiquées sur la figure 1. Le chargement dure 10 s sous une tension de  $20,6\text{kV}$  et un courant de grille de  $100\mu\text{A}$ . Sachant que la résistance de grille est  $R_g = 50\text{M}\Omega$  le niveau de chargement maximal est limité à la tension de grille  $V_g = R_g \cdot I_g$  et se situe à environ  $5\text{kV}$ . Dès l'achèvement du processus de chargement, la bande transporteuse déplace l'échantillon au poste 2 pour la mesure du déclin de potentiel. La distance entre la sonde de potentiel et la surface de l'échantillon est fixée à 5 mm.



**Fig. 1.** Montage expérimental utilisé pour la mesure de déclin de la charge, du champ et du potentiel (dimensions en mm).

Les mesures de potentiel ont été répétées cinq fois pour chaque type de matériau. En

suivant la même procédure, on a également réalisé des mesures du champ et de la charge (Fig.1. poste 3 et 4 respectivement). La sonde capacitive pour la mesure de la charge est constituée d'une plaque métallique, de dimensions  $13\text{cm} \times 19.5\text{cm}$ , incorporée dans une boîte métallique de protection sans qu'il y ait un contact électrique entre eux. La plaque métallique est reliée à un électromètre Keithly 6514 réglé en mode mesure de charge. Ainsi toutes les mesures sont automatiquement enregistrées sur ordinateur à travers le système d'acquisition géré par le logiciel LabView. Il convient de signaler que les expériences ont été réalisées à l'air libre à une température entre  $17^\circ\text{C}$  et  $19^\circ\text{C}$  et une humidité entre 37% et 40%.

## 2.2. Mesure de la distribution du potentiel de surface

La mesure de la distribution spatiale du potentiel à la surface de la couche de granule à des temps différés permet de quantifier l'importance de la conduction surfacique, ce qui peut expliquer en partie les courbes de déclin. Les échantillons ont été chargés par décharge couronne, comme expliqué précédemment, puis déplacés sous la sonde de potentiel avec une vitesse fixe d'environ  $2.7\text{cm}/\text{sec}$ . L'échantillon a été scanné plusieurs fois après le chargement en vue d'obtenir le profil du potentiel à différents instants.

## 3. Résultats et discussion

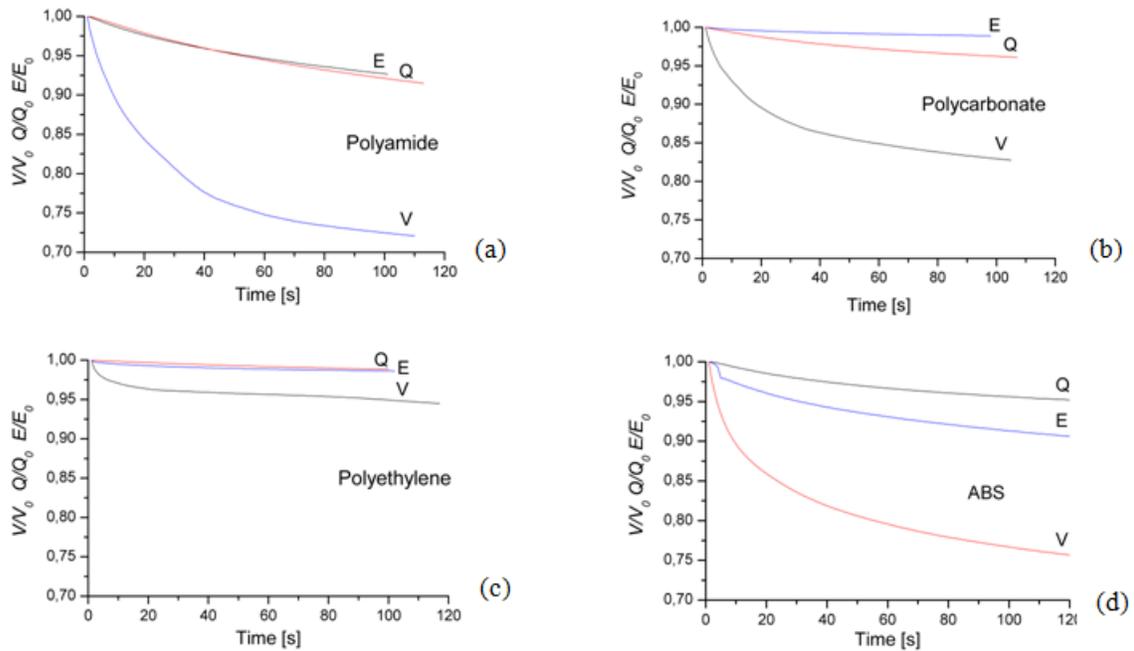
### 3.1. Déclin des grandeurs surfaciques : charge, champ et potentiel

La figure 2 montre les résultats de mesures de déclin de la charge, du champ et du potentiel à la surface des quatre matériaux : le polyamide, le polyéthylène, le polycarbonate et l'ABS. Les courbes représentent les valeurs moyennes de cinq expériences faites pour chaque type de matériau, exprimées par rapport aux valeurs initiales (premières valeurs enregistrées)  $Q_0$ ,  $E_0$  et  $V_0$ .

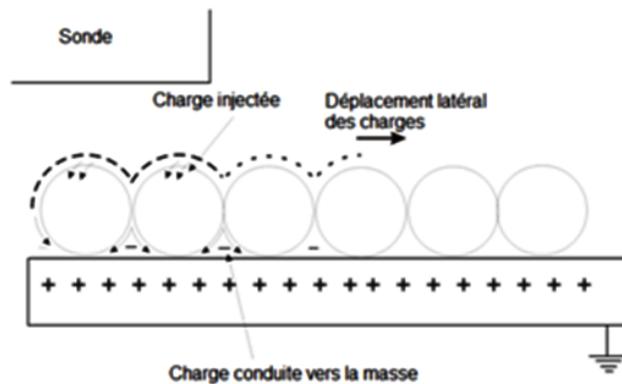
Les trois techniques indiquent des taux de déclin différents pour chaque type de matériau. Cependant, comme première observation, le déclin de potentiel est plus rapide que celui de la charge ou du champ. Le déclin de ces derniers est rapproché (fig. 2). Cette différence peut être expliquée par l'influence du capteur lui-même sur le mécanisme de déclin et la différence des zones de couplage due à la taille des capteurs. En plus de la différence entre leurs caractéristiques physiques (conductivité et permittivité), l'effet de la nature du matériau est plutôt relié à la taille et la forme des grains. Plus les grains sont petits et bien arrangés (cas de l'ABS), plus le comportement de la couche se rapproche de celui des films.

### 3.2. Mécanismes de déclin de la charge

Plusieurs mécanismes peuvent exister durant le processus de déclin de la charge à la surface des couches de granules. Parmi ces mécanismes, l'injection de charge et la conduction surfacique peuvent être considérées dans le cas des granules comme dominants, étant donné la nature non polaire des matériaux étudiés. La figure 3 illustre les mécanismes de déclin de la charge dans le cas des matériaux granulaires. L'injection de charge dans le volume du grain ne peut être activée que lorsque le champ appliqué est suffisamment élevé.



**Fig. 2.** Courbes de déclin de potentiel  $V$ , du champ  $E$  et de la charge  $Q$  à la surface des quatre matériaux : (a) polyamide, (b) polycarbonate, (c) polyéthylène et (d) ABS. Les courbes sont en valeurs relatives par rapport aux premières valeurs enregistrées  $V_0$ ,  $E_0$  et  $Q_0$ .



**Fig. 3.** Principe du mécanisme de déclin des charges dans le cas des couches de granules.

Avec un potentiel de surface inférieur à  $5kV$  pour le cas de tous les matériaux, la valeur moyenne du champ appliqué à la couche de granule d'épaisseur  $2\text{ mm}$  est environ  $E = V/d = 2.5kV/mm$ , ce qui représente une valeur nettement inférieure au seuil d'activation indiqué dans la littérature :  $25kV/mm$  [8]. Si on écarte l'amplification du champ par les aspérités à la surface du granule, le phénomène d'injection peut être négligé.

En raison de la nature granulaire des matériaux et la structure de la couche, le mécanisme dominant, et qui peut expliquer les courbes de déclin, est la conduction surfacique.

En effet, en se déplaçant à la surface de chaque grain, et à la surface de la couche entière, les charges peuvent emprunter deux voies : une partie de la charge se déplace latéralement à la surface de la couche en s'éloignant de la sonde et une autre partie est

conduite vers la masse à travers la couche de grains où elle sera neutralisée (Fig.3).

### 3.3. Influence de la taille de la sonde

Pour montrer l'influence de la taille du capteur sur la mesure du taux de déclin, on suppose la coexistence des deux phénomènes, injection dans le volume et conduction surfacique. Dans le cas de la sonde de potentiel, le déclin de potentiel mesuré est dû à l'injection des charges dans le volume, dont la partie de charge injectée est notée  $Q_{inj}$ , mais aussi à la conduction surfacique vers la masse  $Q_{scg}$  et à la conduction surfacique latérale  $Q_{disp}$ . Mathématiquement, le taux de déclin de potentiel  $V_p$  mesuré par le voltmètre électrostatique peut être exprimé comme suit :

$$\frac{dV_p}{dt} = f(Q_{inj}, Q_{scg}, Q_{disp}) \quad (1)$$

Le taux de déclin mesuré inclut alors la variation due aux trois voies possibles ( $Q_{inj}$ ,  $Q_{scg}$ ,  $Q_{disp}$ ).

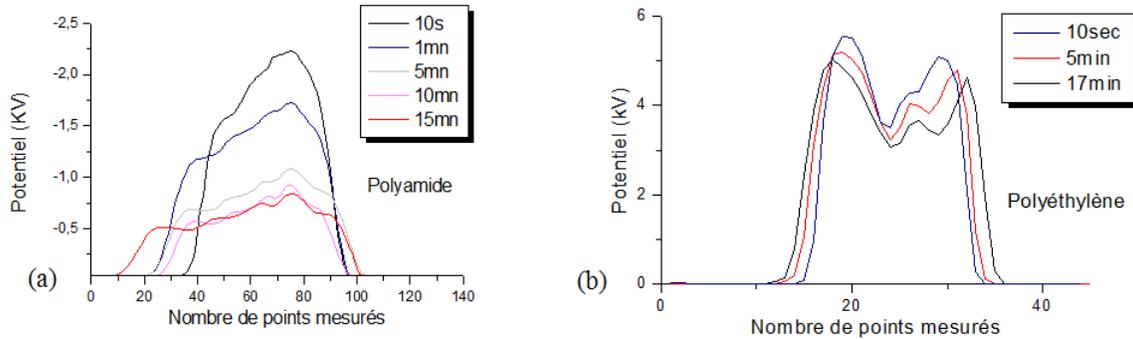
La sonde capacitive pour la mesure de la charge, qui est une plaque métallique de larges dimensions, mesure la réduction de la charge  $Q_{ch}$  due à l'injection et à la conduction surfacique vers la masse. Dans ce cas, le déplacement latéral des charges n'affecte pas la quantité de charge en couplage avec la sonde car, en raison des larges dimensions, la quantité de charges qui se déplace est encore sous la sonde et en couplage avec elle. La sonde voit alors la charge sur toute la surface sans être affectée par l'éloignement du centre, ce qui peut être exprimé par :

$$\frac{dQ_{ch}}{dt} = f(Q_{inj}, Q_{scg}) \quad (2)$$

Il s'ensuit alors que la grande taille du capteur de charge et la petite taille de celui du potentiel peuvent expliquer, même partiellement, la différence observée sur les taux de déclin indiqués par les trois mesures. Ce résultat se justifie encore par les courbes de champ qui se rapproche de ceux de la charge et ce du fait de la taille relativement grande du capteur de champ.

### 3.4. Distribution du potentiel à la surface des couches de granules

La Fig. 4 montre les résultats des mesures de la distribution du potentiel sur la surface des couches de polyéthylène et polyamide. Ces mesures montrent une évolution du potentiel qui se fait dans les deux directions, latérale et transversale (conduction vers la masse). L'évolution bidirectionnelle dans ce cas implique l'existence, à la fois, de la conduction surfacique latérale et la conduction surfacique vers la masse, en plus du phénomène de l'injection qui peut s'établir suite à l'amplification du champ.



**Fig. 4.** Distribution du potentiel sur la surface des couches de (a) polyamide et (b) polyéthylène à plusieurs instants.

#### 4. Conclusions

Les mesures de déclin des grandeurs surfaciques (charge, champ et potentiel), en utilisant des sondes de différentes tailles, auxquelles s'est ajoutée la mesure de la distribution du potentiel à la surface des monocouches ont conduit aux conclusions suivantes :

- les sondes indiquent des taux de déclin différents en raison de la différence de leurs tailles. Les petites sondes mesurent l'écoulement de la charge dû à tous les mécanismes possibles (écoulement transversal et longitudinal) tandis que les sondes de larges dimensions sont moins influencées par le déplacement longitudinal des charges.
- Pour le cas des monocouches de granules, le déplacement des charges peut être dans les deux directions, longitudinale et transversale, à cause de la conduction surfacique vers la masse et la conduction le long de la couche.

#### REFERENCES

- [1] Molinié, P., Goldman, M., Gattelet, J., 1995. Surface potential decay on corona-charged epoxy samples due to polarization processes, *J. Phys. D : Appl. Phys.*, vol. 28, pp. 1601-1610.
- [2] Molinié, P., 2005. Measuring and modeling transient insulator response to charging : the contribution of surface potential studies, *IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation*, vol. 12, pp. 939-950.
- [3] Wintle, H.J., 2003. Charge Motion in Technical Insulators : Facts, Fancies and Simulations, *IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation*, vol. 10, No. 5.
- [4] Crisci, A., Gosse, B., Gosse, J.-P., Ollier-Duréault, V., 1998. Surface-potential decay due to surface conduction, *Eur. Phys. J. AP*, vol. 4, pp. 107 - 116.
- [5] Herous, L., Nemamcha, M., Remadnia, M., Dascalescu, L., 2009. Factors that influence the surface potential decay on a thin film of polyethylene terephthalate (PET), *Journal of Electrostatics*, vol. 67, pp. 198-202.
- [6] Herous, L., Nemamcha, M., Remadnia, M., Dascalescu, L., 2009. Factors that influence the surface potential decay on a thin film of polyethylene terephthalate (PET), *Journal of Electrostatics*, vol. 67, pp. 198-202.
- [7] Pedro Llovera., Philippe Molinié., Anabel Soria., A. Quijano., 2009. Measurements

- of electrostatic potential and electric fields in some industrial applications : Basic principles, *Journal of Electrostatics*, vol. 67, pp. 457-461.
- [8] Xu, Z., Zhang, L., Chen, G., 2007. Decay of electric charge on corona charged polyethylene, *J. Phys.D : Appl. Phys*, vol. 40, pp. 7085-7089.
- [9] Tilmatine, A., Medles, K., Bendimerad, S.-E ., Boukholda, F., Dascalescu, L., 2009. Electrostatic separators of particles : Application to plastic/metal, metal/metal and plastic/plastic mixtures, *Waste Management*, vol. 29, pp. 228-232.
- [10] Dascalescu, L., Mihalcioiu, A., Stochita, A., Notingher, P. V., 2008. Charge-Decay Characteristics of Granular Materials Forming Monolayers at the Surface of Grounded Electrodes, *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 44, . pp. 20 - 24.

## Réduction des perturbation électromagnétique conduites dans la machine asynchrone

H. Miloudi <sup>a \*</sup>, A. Bendaoud <sup>a</sup>, M. Miloudi <sup>a</sup>

<sup>a</sup> APELEC Laboratory, Université de Sidi Bel Abbès

### ARTICLE INFO

Article history :  
Received November 2013  
Accepted January 2014

Keywords :  
CEM ;  
Filtre ;  
Machine asynchrone ;  
Mode commun ;  
Perturbation électromagnétique ;  
Haute fréquence.

### ABSTRACT

La CEM est devenue un critère incontournable dans la conception des convertisseurs. Les normes imposées sont garantes de l'aptitude d'un système à fonctionner dans son environnement de façon satisfaisante et sans produire de perturbations électromagnétiques intolérables pour les appareils du voisinage.

Dans l'association onduleur câble machine les variations di/dt et dv/dt sont relativement importantes. Les fronts raides de courant et de tension ont la fâcheuse tendance à générer des perturbations électromagnétiques conduites et/ou rayonnées qui peuvent être gênantes voire destructrices. Dans cet article, les auteurs proposent ici un outil permettant l'optimisation du filtre complet en tenant compte de l'ensemble de la structure. Cette méthode permet d'estimer et réduire le niveau des courants ainsi la tension de mode commun dans la machine asynchrone.

©2014 LESI. All right reserved.

## 1. Introduction

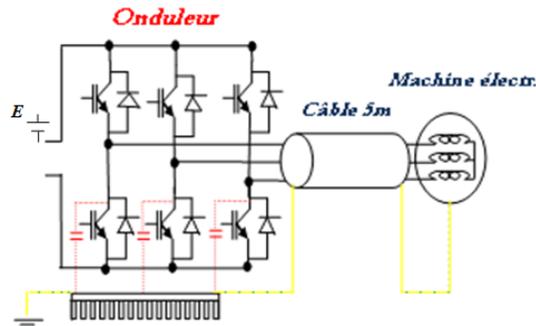
Dans les associations onduleur-câble-machine, l'interrupteur de puissance est la source principale des perturbations conduites et rayonnées [1, 2, 3]. La connexion d'un moteur asynchrone à un onduleur par un câble long possède deux problèmes principaux : les surtensions et les courants de fuite. L'augmentation des gradients de tension imposés par les interrupteurs de puissance utilisés dans les entraînements à vitesse variable provoque l'apparition de surtensions aux bornes du moteur lorsque le câble est long. Celles-ci peuvent entraîner le claquage de l'isolant des enroulements des moteurs. Les surtensions peuvent être fatales pour la machine. D'autre part une grande partie du bruit acoustique de la machine alimentée par un onduleur à MLI a une origine électromagnétique. Le spectre harmonique de la tension simple à la sortie de l'onduleur est très riche en harmoniques qui agissent directement sur l'acoustique du moteur [4].

Ce travail s'inscrit dans le cadre de la réduction des émissions conduites générées par un onduleur triphasé. Afin de limiter les PEMS, les normes donnent un gabarit à respecter

\*Email : miloud.kachi@gmail.com

par le concepteur d'un système d'électronique de puissance. Ceci induit classiquement un ajout de filtres CEM composés essentiellement d'inductances et de capacités qui ont pour but d'isoler les perturbations générées par le convertisseur et de les faire circuler le moins possible à l'extérieur de celui-ci. des filtres à l'entrée et à la sortie du l'onduleur (qu'est considéré comme la source de la pollution électromagnétique) sont testés pour avoir leur répercussion sur les PEMs.

Le système étudié est présenté sur la figure 1.



**Fig. 1.** Spectre de tension de MC du moteur.

La modélisation HF correspondant à l'étude des perturbations conduites définie sur une plage fréquentielle de [50 kHz – 30 MHz].

Dans notre cas, la prédiction des émissions conduites générées par un onduleur triphasé repose sur la linéarisation de la structure. La méthode proposée est basé sur une approche matricielle, dont l'objectif est de déterminer le spectre des signaux directement dans le domaine fréquentiel.

Cette méthode nécessite de connaître, pour une structure donnée, et d'identifier :

- les principaux mécanismes de génération des perturbations,
- l'ensemble des chemins de propagation critiques et de la victime.

En effet, les générateurs des perturbations sont constitués par la cellule de commutation, celle-ci est remplacée par des sources de tensions et de courants pour former un schéma CEM équivalent. Chaque mode de propagation est remplacé par une source équivalente :

- Le mode commun est modélisé par une source de tension,
- Le mode différentiel est modélisé par une source de courant.

## 2. La compatibilité électromagnétique dans l'électronique de puissance

Les commutations des composants semi-conducteurs de puissance utilisés dans les variateurs de vitesse de moteurs asynchrones sont la principale source des perturbations électromagnétiques conduites [5, 6, 7].

Lors de l'analyse d'une perturbation électromagnétique on constate que le problème englobe trois éléments : **une source de perturbation** qui émet de l'énergie électromagnétique, **un canal de couplage** au travers duquel l'énergie de ces perturbations se propage et enfin **un récepteur** qui capte cette énergie, la traite et la superpose à sa fonction normale [11].

Dans le cas d'un onduleur triphasé, l'analyse à trois composantes "source-chemin-victime" permet d'élaborer un schéma équivalent pertinent. Dans cette étude, la machine

asynchrone représente évidemment la victime. Les sources, quant à elles, sont relativement simples à localiser puisqu'elles sont encore une fois associées aux interrupteurs de puissance et plus précisément aux fortes variations de potentiels et de courants que ces derniers provoquent [3, 8].

Les stratégies de commande sont nettement plus complexes et engendrent des densités spectrales larges bandes. La troisième composante, le chemin de propagation, qu'est néanmoins le système triphasé de conducteurs et la machine asynchrone qui représente l'un des principaux trajets pour les courants parasites.

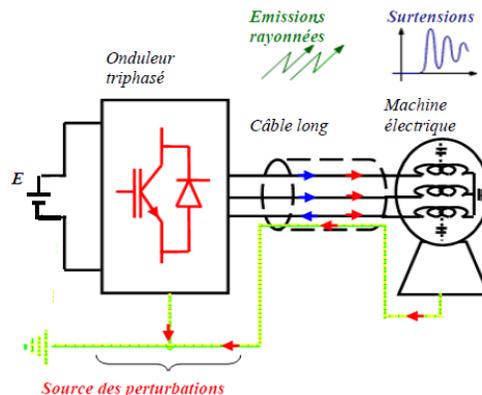
Les perturbations peuvent se propager de deux manières : soit en conduction, soit en rayonnement [5, 8, 10]. Dans le premier cas les perturbations interviennent soit en mode commun (MC) soit en mode différentiel (MD). Dans le second cas les perturbations sont rayonnées sous forme de champ électrique et de champ magnétique.

- Les perturbations conduites utilisent comme vecteur les matériaux conducteurs.
- Les perturbations rayonnées sont transmises par une onde électromagnétique et utilisent comme support les milieux diélectriques.

Un signal électrique –utile ou parasite conduit par une liaison n'a que deux façon de se propager : en mode différentiel ou en mode commun

### 3. Topologie et identification des types de pollution Em

La configuration globale du système présentée sur la figure 2 fait apparaître les différentes perturbations électromagnétiques générées par onduleur triphasé alimentant un moteur par l'intermédiaire d'un câble long. Les perturbations électromagnétiques spécifiques au variateur de vitesse sont majoritairement dues aux commutations de l'onduleur, que l'on considérera comme étant la source de perturbations. Les fronts de tension très rapides et les fréquences de commutations élevées de ces convertisseurs peuvent provoquer la circulation d'importants courants HF et donc endommager voire détruire certains éléments du système.



**Fig. 2.** Les courants de mode commun (MC) et de mode différentiel dans le système étudié.

La variation de ces grandeurs électriques est à l'origine de la pollution électromagnétique :

- la commutation du courant crée des perturbations de mode différentiel,

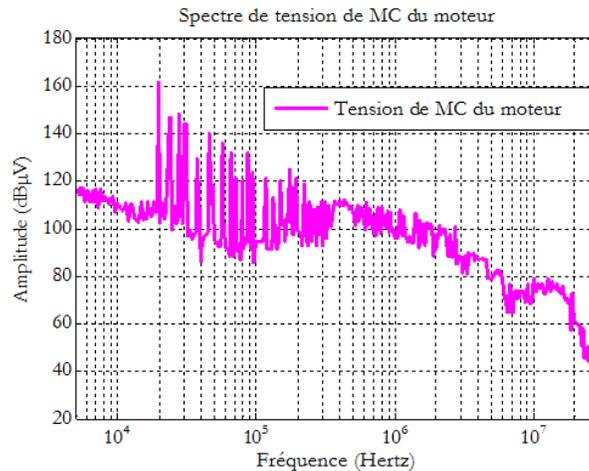
- la commutation de la tension génère des courants HF de mode commun que nous retrouvons dans les composants parasites,
- la somme de la pollution de mode différentiel et de mode commun donne la pollution EM totale générée par l'élément sous test.

Donc, pour modéliser la pollution de type mode différentiel, il faut utiliser des sources de courant ayant la forme du courant commuté. Pour modéliser la pollution de mode commun, il faut prendre des sources de tension ayant la forme de la variation de tension.

#### 4. Tension/Courant de MC dans la machine asynchrone

Les spectres de courant de mode commun ainsi que la tension de mode commun dans le moteur sont obtenus à l'aide d'une approche matricielle. Elle consiste à remplacer chaque sous système (onduleur, câble, machine) par son impédance équivalente, et remplacer la cellule de commutation par des générateurs équivalents. Dans notre cas les générateurs représentent les signaux de puissance au sein de la cellule de commutation de l'onduleur présenté par une tension de mode commun.

Les figures 3 et 4, représentent respectivement le spectre de courant de mode commun dans le moteur et le spectre de la tension de mode commun du moteur. Les résultats sont ceux issus d'une configuration de système d'entraînement à vitesse variable sans tenir en considération le filtre d'entrée,



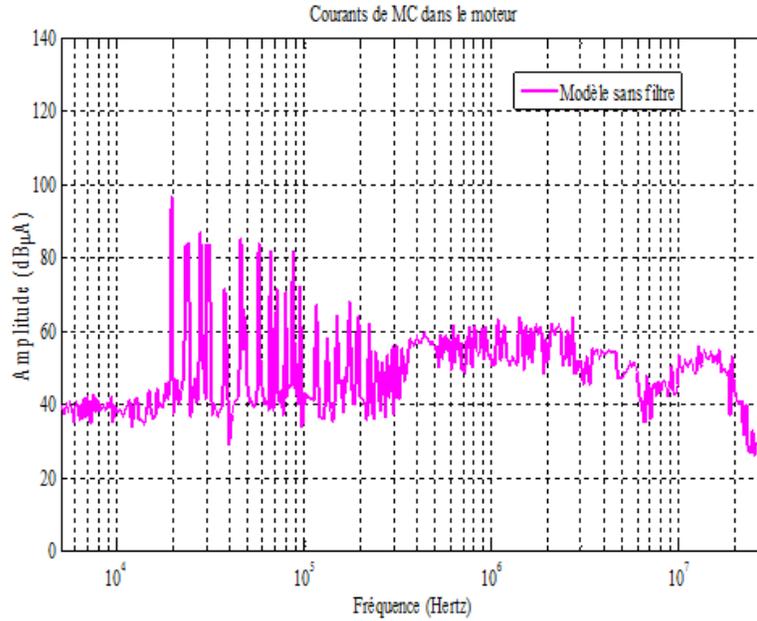
**Fig. 3.** Spectre de tension de MC du moteur.

Nous observons distinctement sur ces relevés (Fig.3 et Fig.4), les lobes issus de la perturbation conduite. Globalement, le niveau est supérieur à 40 dBµV sur une grande partie de la plage de fréquences.

donc l'insertion du filtre soit à l'entrée, ou à la sortie du variateur de vitesse reste une obligation pour réduire ces perturbations électromagnétiques.

#### 5. Reduction des Pems dans la machine asynchrone

Le filtrage reste la meilleure technique pour maîtriser les perturbations électromagnétiques conduites, pour cela. On a inséré dans un premier temps un filtre LC (de structure

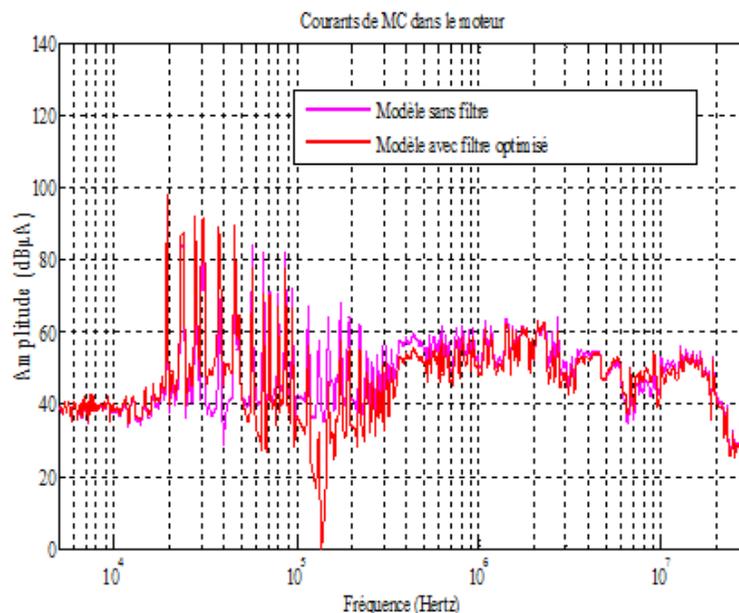


**Fig. 4.** Spectre de tension de MC du moteur.

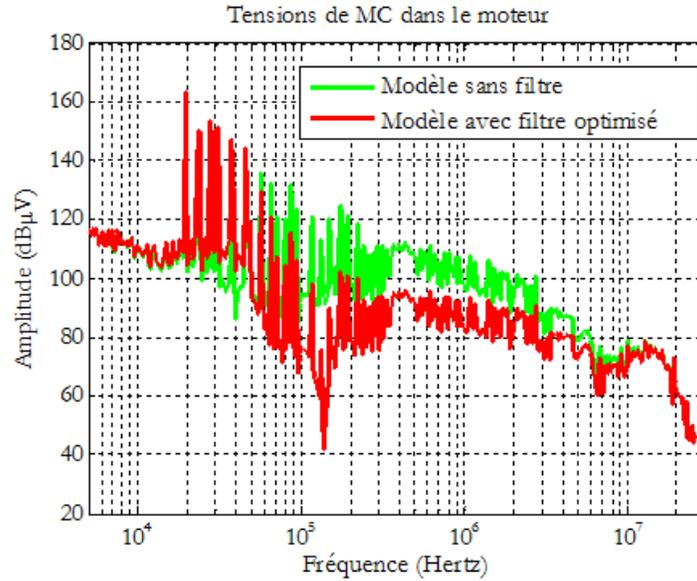
L) optimisé à l'entrée du l'onduleur puis à la sortie de ce dernier pour avoir son influence sur les spectres de la tension et du courant de mode commun dans la machine asynchrone.

### 5.1. Insertion du filtre optimisé à l'entrée de l'onduleur

Dans cette configuration, le filtre est imposé en face du réseau, cette technique est largement utilisée par les nouvelles générations de variateurs de vitesse. La combinaison de chemins fortement impédants (inductance) et faiblement impédants (capacités) permet d'aiguiller les courants perturbateurs selon des chemins ne perturbant pas le réseau.



**Fig. 5.** Spectres des courants de MC dans le moteur (avec et sans filtre CEM d'entrée).

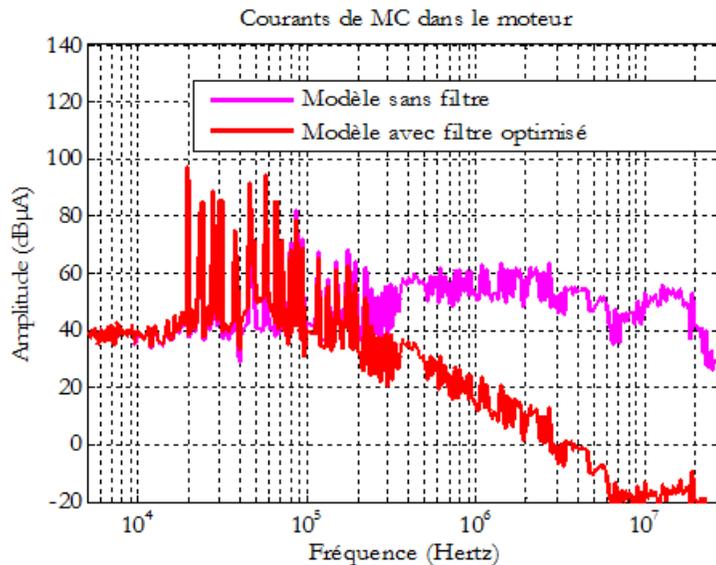


**Fig. 6.** Spectres des tensions de MC dans le moteur (avec et sans filtre CEM d'entrée).

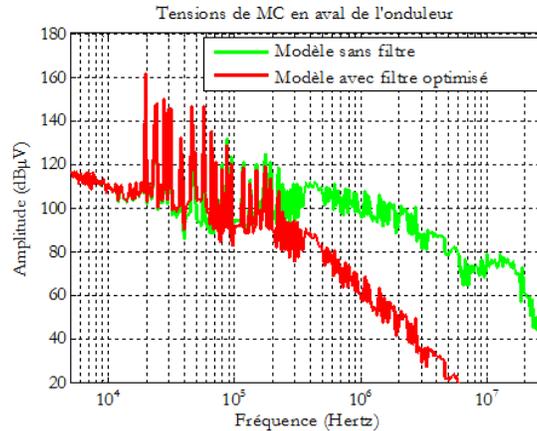
Le filtre à l'entrée n'influe pas sur le spectre du courant de mode commun dans le moteur, malgré une nette amélioration à partir de 150 kHz. Le niveau d'émission reste presque identique à celui calculé en absence du filtre CEM sur une grande partie de fréquence [50 kHz – 30 MHz].

## 5.2. Insertion du filtre optimisé à la sortie de l'onduleur

Dans cette section nous voulons insérer le filtre optimisé précédemment, à la sortie de l'onduleur, dont l'objet est de savoir son influence sur les IEMs dans le système à étudier. Les figures 7 et 8 représentent respectivement les spectres des courants et des tensions de MC dans le moteur (avec et sans filtre CEM).



**Fig. 7.** Spectres des courants de MC dans le moteur (avec et sans filtre CEM de sortie).



**Fig. 8.** Spectres des tensions de MC dans le moteur (avec et sans filtre CEM de sortie).

En terme de réduction d'harmoniques et de surtension, l'insertion d'un filtre à la sortie du variateur de vitesse peut réduire les harmoniques de tension appliqués à la machine, ainsi que les surtensions, comme le montre la Fig. 7. Le courant de mode commun dans le moteur est bien réduit, ainsi sur la figure 8, la surtension appliquée au moteur est aussi réduite.

## 6. Conclusions

L'amélioration de la compatibilité électromagnétique agit du côté des sources en tentant de réduire les perturbations qu'elles émettent, et du côté des victimes en les protégeant des influences extérieures. Les auteurs proposent une approche qui consiste à modifier le chemin de propagation des perturbations grâce à l'insertion du filtre, en amont de l'onduleur (côté réseau), en aval de celui-ci (côté machine), ou simultanément de part et d'autre, cette solution est dite solution matériel.

Filtre de MC en amont de l'onduleur est particulièrement efficace pour l'aspect normatif. Mais malheureusement, il n'y a aucune action sur les surtensions moteur, et aussi il ne permet pas de réduire les courants de mode commun circulant dans le moteur.

Le filtre déposé juste à la sortie de l'onduleur permet d'atténuer les variations de la tension de mode commun à l'entrée de l'ensemble câble-machine. Et par conséquent, la durée de vie de la machine est améliorée par réduction du courant dans le moteur. Les émissions rayonnées par les câbles sont également atténuées.

## REFERENCES

- [1] Norbert Hanigovszki, Jon Landkildehus, Giorgio Spiazzi, and Frede Blaabjerg « EMC Evaluation of the Use of Unshielded Motor Cables in AC Adjustable Speed Drive Applications » IEEE Transactions On Power Electronics, Vol.21, No.1, January 2006.
- [2] Kayhan.G, Nobuyoshi. M, Mitsukatsu. O, Fumio. H « New Approximation with Neural Networks to Estimate Common Mode (CM) Model Impedance Parameters in Motor Drive System » Proceedings of the 2002 IEEE International Symposium on Intelligent Control, 2002. Page(s) : 648 – 653, 2002.
- [3] Bertrand Revol, B. Revol, Schanen J-L., Roudet J., Souchard Y « EMI Modeling Of

- An Inverter – Motor Association » IEE, Compatibility in Power Electronics, CPE, Poland, pp 86-95, 2003.
- [4] Stefan Laurentiu Capitaneanu « Optimisation de la Fonction MLI d'un Onduleur de Tension deux-Niveaux » Thèse Doctorat de l'Institut National Polytechnique de Toulouse 2002.
- [5] G. Grandi, D. Casadei, U. Reggiani « Common and Differential-Mode HF Current Components in AC Motors Supplied by Voltage Source Inverters » IEEE Trans. on Power Elect, Vol.19, No.1, January 2004.
- [6] Y. Weens, N. Idir, J.J. Franchaud, R. Bausière, "High Frequency model of a shielded 4-wire energy cable", EPE 2005, CD ROM, Dresde, Allemagne.
- [7] N. Idir, J.J. Franchaud, R. Bausière « Evaluation and Reduction of Common Mode Currents in Adjustable Speed Drives » in conf PCIM Europe 2003, pp 279-284, Nürnberg, Germany, May 20-22, 2003.
- [8] Adam Kempinski « Emi Noise Splitting Into Common And Differential Modes In PWM Inverter Drive System » 4th International Workshop Compatibility in Power Electronics - CPE 2005. Gdynia, Polska, 2005.
- [9] S. P. Weber, E. Hoene, S. Guttowski, « Modeling Induction Machines For Emc-Analysis » 35th Annual IEEE Power Electronics Specialists Conference, Aachen, Germany, 2004.
- [10] H. Slimani, A. Bendaoud, F. Benhamida, H. Miloudi, A. Timatine, K. Medles, « Propagation des perturbations electromagnetiques dans un cable alimentant un moteur asynchrone », TELECOM2011 & 7ème JFMMA, Mars 16-18, 2011 – Tanger MAROC.
- [11] Clayton r. Paul « Introduction to Electromagnetic Compatibility », 2ème edition John Wiley et Sons 2006.

# Etude CEM sur le couplage du champ électromagnétique rayonné par un coup de foudre avec une ligne aérienne

K.Arzag <sup>a \*</sup>, Z.Azzouz <sup>b</sup>, B.Ghemri <sup>b</sup>, A.Mimouni <sup>c</sup>

<sup>a</sup> Université Tahar Moulay Saïda

<sup>b</sup> Université des Sciences et de la Technologie d'Oran, USTO-MB

<sup>c</sup> Université Ibn Khaldoun Tiaret

## ARTICLE INFO

Article history :  
Received November 2013  
Accepted January 2014

Keywords :  
CEM ;  
champ électromagnétique ;  
foudre et couplage.

## ABSTRACT

Dans cette communication nous présentons une étude CEM portant sur le couplage du champ électromagnétique rayonné par un coup de foudre avec une ligne aérienne. L'étude est basée sur la mise en œuvre des approches théoriques de S. Rusck. Pour mener à bien cette étude nous avons d'abord dû choisir des modèles de représentation du courant dans le canal de foudre et celui du courant à la base du canal. Les modèles que nous avons retenus appartiennent à la famille des modèles dits d'ingénieurs. Nous avons ensuite calculé de manière analytique les composantes du champ électromagnétique rayonné par la foudre. Enfin nous avons calculé, en s'appuyant sur la théorie de Rusck, les surtensions induites par couplage du champ électromagnétique rayonné par la foudre sur une ligne aérienne. Les calculs ont été effectués sous environnement Matlab. Les résultats obtenus par simulation ont été comparés à d'autres résultats tirés de la littérature et ont montré une assez bonne concordance.

©2014 LESI. All right reserved.

## 1. Introduction

Depuis de nombreuses années, la prise en compte des critères de compatibilité électromagnétique (CEM), constitue une étape essentielle dans la conception des systèmes notamment les installations et ouvrages électriques. Aussi, le développement d'outils numériques permettant le calcul et l'analyse des surtensions induites par la foudre sur les lignes de transmission d'énergie électrique est devenu une nécessité absolue afin d'assurer une bonne qualité de service au consommateur [1,2]. Par ailleurs, l'exploitation des théories décrivant le couplage entre le champ électromagnétique rayonné par la foudre et les lignes de transmission a permis le développement et l'implémentation de plusieurs codes de calcul dans des plateformes reconnues mondialement telles que EMTP/ATP et

\*Email : ar\_kado2006@yahoo.fr

MATLAB et ceci afin de prendre en compte toutes les complexités rencontrées dans les réseaux électriques actuels [5,7,19,20].

de transmission dans leur majorité s'expriment par des formulations différentes mais toutefois équivalentes. Ainsi, le modèle le plus populaire est celui développé par Taylor, Satterwhite et Harrison dans le cas général d'une ligne illuminée par un champ non uniforme. Les modèles proposés par Agrawal, Price et Gurbaxani ainsi que le modèle de Rachidi sont aussi très utilisés par la communauté scientifique [23]. A noter aussi qu'il existe d'autres formalismes de couplage propres au domaine des réseaux électriques.

Parmi ces derniers, on peut citer le modèle de Rusck et le modèle de Chowdhuri et Gross. Le modèle de Rusck est quant à lui basé sur un formalisme théorique simple permettant de calculer les surtensions induites à l'aide d'expressions analytiques faciles à mettre en œuvre [3]. La mise en œuvre de ce modèle fera l'objet de ce modeste travail à travers une application mettant en relief le couplage d'un champ électromagnétique rayonné par la foudre avec une ligne de transmission qui peut être une ligne de transport d'énergie électrique. Le champ électromagnétique est calculé analytiquement en utilisant les approches de Rusck aussi. Dans ce qui suit nous allons d'abord aborder la modélisation du courant de foudre à savoir le courant à la base du canal de foudre et le courant dans le canal de foudre.

## 2. Modélisation du courant de foudre

Depuis 1941, plusieurs modèles relatifs à la distribution spatio-temporelle du courant de foudre ont été proposés par la communauté scientifique. Il s'agit de modèles macroscopiques qui ont été développés dans le but d'évaluer le rayonnement électromagnétique d'un canal de foudre [17].

Les modèles de courant d'arc en retour proposés dans la littérature diffèrent l'un de l'autre. En général ils sont classés en quatre grandes classes [29] :

- Les modèles « physiques »
- Les modèles « électromagnétiques »
- Modèles dits « RLC ».
- Modèles dits « d'ingénieurs »,

Dans les modèles d'ingénieurs, la distribution spatio-temporelle du courant dans le canal de foudre est basée sur les caractéristiques observées de l'arc en retour, à savoir le courant à la base du canal et la vitesse de propagation de l'arc en retour le long du canal de foudre.

Dans ce travail, nous allons nous intéresser à cette famille de modèles, pour deux raisons essentielles à savoir :

- le nombre faible de paramètres à traiter.
- l'écriture simple du courant dans le canal de foudre qui est fonction du courant à sa base.

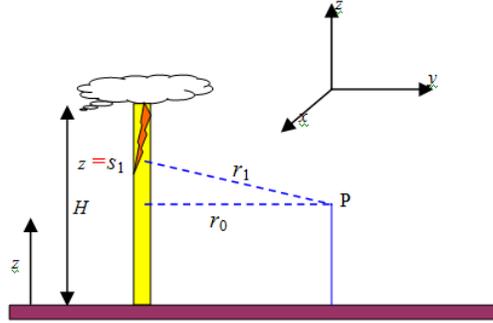
Les modèles d'ingénieurs comprennent les modèles suivants :

- le modèle de Bruce et Golde (BG),
- le modèle de la ligne de transmission (TL),
- le modèle de la ligne de transmission modifiée avec décroissance linéaire (MTLL),
- le modèle de la ligne de transmission modifiée avec décroissance exponentielle (MTLE),
- le modèle de la source de courant mobile (TCS : « Traveling Current Source »)

Les formulations mathématiques des modèles de courant dans le canal de foudre ainsi que ceux du courant à la base du canal, utilisées dans ce travail, seront présentées dans le paragraphe dédié au calcul du champ électromagnétique rayonné par la foudre.

### 3. Calcul du champ électromagnétique rayonné par un coup de foudre

La géométrie du problème étudié est présentée à la figure 1. Elle comprend le nuage, le canal de foudre, le sol supposé parfaitement conducteur dans une première approximation et le point d'observation noté « P » avec les différentes coordonnées qui lui sont associées par rapport au canal de foudre.



**Fig. 1.** Géométrie du problème étudié.

Dans ce cas là les composantes du champ électromagnétique à savoir  $(E_x, E_z)$  pour le champ électrique et  $B_y$  pour le champ magnétique peuvent être calculées analytiquement à l'aide de la formulation suivante (Fig.1) [3,10] :

$$E_x = \frac{\mu_0 \cdot \nu_0 \cdot I_0}{2 \cdot \pi \cdot \beta} \cdot x \cdot z \cdot \left[ -\frac{1 - \beta^2}{\xi^3} + \frac{1}{r^3} \right] \quad (1)$$

$$E_z = \frac{\mu_0 \cdot \nu_0 \cdot I_0}{2 \cdot \pi \cdot \beta} \cdot \left[ -\frac{1 - \beta^2}{\xi^3} + \frac{1}{r} \right] \quad (2)$$

$$B_y = \frac{\mu_0 \cdot I_0}{2 \cdot \pi \cdot r^2} \cdot \frac{\nu \cdot t \cdot x}{\xi} \quad (3)$$

Avec :

$$\xi = \sqrt{(\nu \cdot t)^2 + (1 - \beta^2) \cdot r^2}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\beta = \frac{\nu}{\nu_0} = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{500}{I_0}}} \text{ Coefficient de Lundholm et Rusck.}$$

$$\nu_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 300 \text{ m}/\mu\text{s vitesse de lumière.}$$

$I_0$  Maximum du courant de l'arc en retour (kA).

Sur la base de la théorie présentée précédemment, nous avons développé un code de calcul, sous environnement Matlab, permettant la détermination de ces trois composantes.

L'approche utilisée ainsi que le code développé ont été validés par le biais d'une analyse comparative entre nos résultats de simulation et ceux obtenus par d'autres chercheurs notamment ceux des références [17] et [18].

### 3.1. Résultats obtenus

#### 3.1.1. Composante horizontale du champ électrique : $E_r$

La composante horizontale  $E_r$  du champ électrique rayonné est calculée à l'aide de l'équation N°(1). Elle est fonction du courant à la base du canal de foudre et celui dans le canal de foudre.

##### Courant à la base du canal de foudre

Le modèle du courant à la base du canal de foudre considéré dans cette étude est représenté par une bi- exponentielle :

$$i(0, t) = I_0 [\exp(-\alpha t) - \exp(-\beta_1 t)] \tag{4}$$

Les valeurs des paramètres liés à ce modèle [17], sont consignées dans le tableau I ci-dessous.

**Tab. 1.** Paramètres du courant à la base du canal de foudre.

$I_0$ (kA)	$A$	$\beta_1$ ( $s^{-1}$ )	$\nu$ (m/s)
10	$3 \cdot 10^4$	$10^7$	$1.1 \cdot 10^8$

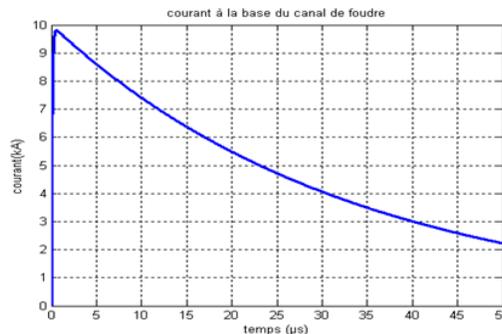
Les variations temporelles de ce courant sont représentées à la Fig. 2.

##### Courant dans le canal de foudre

Le courant dans le canal de foudre, correspondant à la phase d'arc en retour, est représenté par le modèle TL. Son expression mathématique s'écrit comme suit :

$$i(z, t) = i(0, t - z/\nu) \text{ si } z \leq \nu t \tag{5}$$

$$i(z, t) = 0 \text{ si } z > \nu t \tag{6}$$

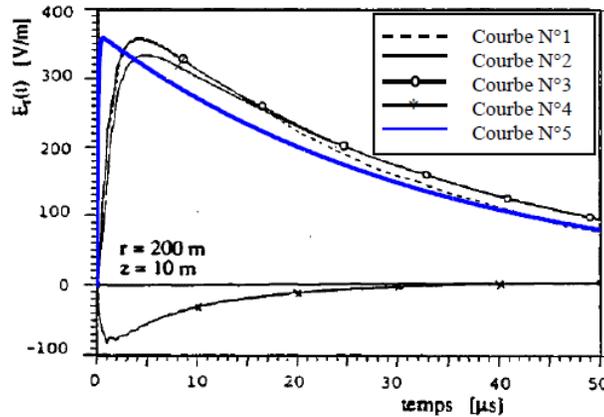


**Fig. 2.** Forme du courant à la base du canal de foudre.

La figure 3 reproduite à partir de la référence [17], présente les variations temporelles du champ électrique horizontal  $E_r$  obtenues par d'autres chercheurs (Zeddami et Rachidi) en mettant en œuvre différentes approches de calcul telles que :

- l'approximation de Norton (courbe N°1-Fig.3),
- la formule de Rubenstein (courbe N°2-Fig.3)
- l'approche du dipôle électrique de Uman et al pour un sol parfaitement conducteur (courbe N°3-Fig.3)
- l'approche utilisant l'expression de Wavetilt (courbe N°4-Fig.3).

Nous avons également reproduit sur cette même figure, par souci de comparaison et de validation de nos résultats, les variations temporelles du champ  $E_r$  que nous avons obtenues en mettant en œuvre les approches de Rusck (courbe N°5-Fig.3).



**Fig. 3.** Variations temporelles du champ électrique horizontal  $E_r$  ( $r = 200$  m,  $h = 10$  m).

Nous pouvons constater, d'après cette figure, que nous obtenons une assez bonne concordance entre nos résultats et ceux obtenus en mettant en œuvre d'autres approches notamment l'approche du dipôle électrique de Uman et al (pour un sol parfaitement conducteur). Ceci valide d'une part l'approche de Rusck qui reste une approche assez facile à mettre en œuvre et intéressante notamment du point de vue temps de calcul et d'autre part le code de calcul que nous avons développé à cet effet.

### 3.1.2. Composante verticale $E_z$ du champ électrique Courant à la base du canal de foudre

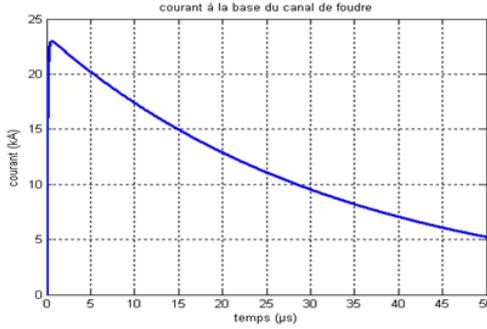
Le modèle du courant à la base du canal de foudre est représenté par l'expression suivante :

$$i(0, t) = I_0 [\exp(-t/\tau_1) - \exp(-t/\tau_2)] \quad (7)$$

Les valeurs des paramètres liés à ce modèle [18], sont consignées dans le tableau II ci-dessous.

**Tab. 2.** Paramètres du courant à la base du canal de foudre.

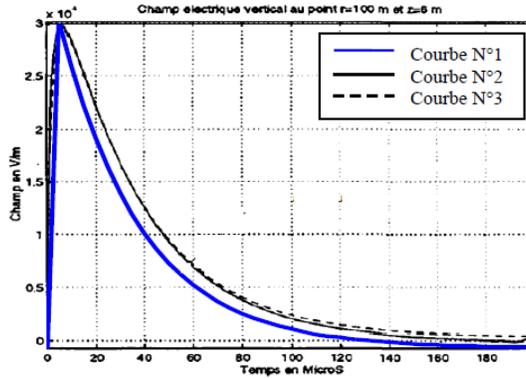
$I_0$ (kA)	$\tau_1$ ( $\mu s$ )	$\tau_2$ ( $\mu s$ )	$\nu$ (m/s)
23.5	3.33	0.1	$1.1 \cdot 10^8$



**Fig. 4.** Forme du courant à la base du canal de foudre.

Nous présentons à la figure 5, les variations temporelles du champ électrique vertical  $E_z$  que nous avons obtenues en mettant en œuvre l’approche de Rusck (courbe N°1-Fig.5) et que nous comparons avec celles issues de la référence [18] (courbes N°2 et N°3-Fig.5). En effet, les courbes N°2 et N°3 correspondent aux formes d’ondes du champ électrique vertical obtenues respectivement par Zeddami et al utilisant la méthode fréquentielle (intégrales de Sommerfeld)[18] et par Orzan utilisant la méthode temporelle basée sur l’échantillonnage temporel à pas variable [18].

D’après cette figure, nous constatons la bonne concordance de nos résultats avec ceux obtenus par D.Orzan [18].



**Fig. 5.** Champ électrique vertical  $E_z$  ( $r = 100$  m,  $h = 6$  m).

### 3.1.3. Champ magnétique

#### Courant à la base du canal de foudre

Le courant à la base du canal est représenté par le modèle d’Heidler dont l’expression mathématique est donnée par la relation suivante :

$$i(0, t) = \frac{I1}{\eta_1} \frac{(t/\tau_{11})^{n_1}}{1 + (t/\tau_{11})} \exp(-t/\tau_{11}) + \frac{I1}{\eta_2} \frac{(t/\tau_{21})^{n_1}}{1 + (t/\tau_{21})} \exp(-t/\tau_{22}) \quad (8)$$

Les paramètres associés à ce courant sont consignés dans le tableau (III), la forme d’onde de ce courant, basée sur ce modèle est donnée à la figure 6.

### Courant dans le canal de foudre

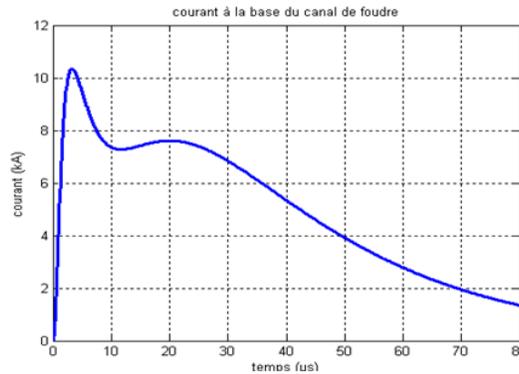
Le courant dans le canal de foudre est représenté quant à lui par le modèle MTLE dont la représentation mathématique est donnée par les équations 9 et 10 suivantes :

$$i(z, t) = i(0, t - z/\nu) e^{-i/\lambda} \text{ si } z \leq \nu t \tag{9}$$

$$i(z, t) = 0 \text{ si } z > \nu t \tag{10}$$

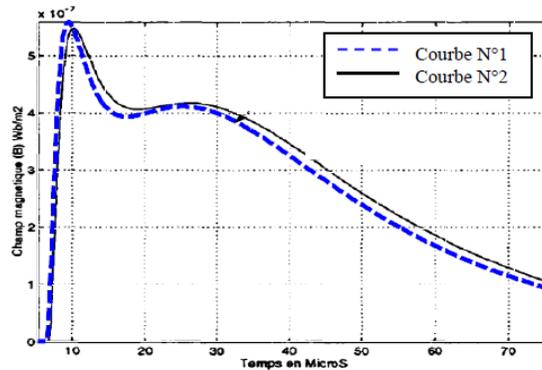
**Tab. 3.** Paramètres du courant à la base du canal de foudre [18].

$I_1$	$\tau_{11}$	$\tau_{12}$	$n_1$	$I_2$	$\tau_{21}$	$n_2$	$\lambda$	$\nu$
10.5kA	2μs	4.8μs	2	9kA	20μs	26μs	2km	1.5 · 10 <sup>8</sup> m/s



**Fig. 6.** Forme du courant à la base du canal de foudre.

Nous présentons à la figure 7 suivantes les variations temporelles du champ magnétique que nous avons obtenues en utilisant l'équation N°(3) et que nous comparons à celles obtenues par D. Orzan qui a utilisé la méthode temporelle [18].



**Fig. 7.** Variations temporelles du champ magnétique(r =2 Km, h =10 m).

La comparaison de ces résultats montre clairement la concordance observée précédemment. De plus, l'approche que nous avons adoptée dans ce travail a permis de retrouver

les caractéristiques typiques de la forme d'onde du champ magnétique obtenue expérimentalement, à savoir le pic initial et la bosse «hump».

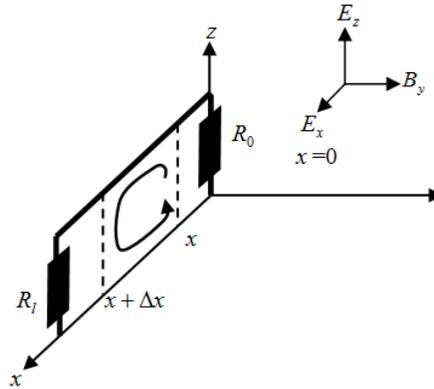
Enfin nous pouvons conclure que le code de calcul que nous avons développé, basé sur les approches de Rusck a été validé dans ce cas là aussi et que ces approches se montrent comme une bonne alternative au calcul du champ électromagnétique rayonné par un coup de foudre.

#### 4. Modèle de couplage

Dans ce travail nous avons mis en œuvre le modèle de Rusck. Aussi avant de présenter les résultats, de simulation, obtenus sur la base de ce modèle, nous avons jugé utile de rappeler le principe général de modèle.

Ce modèle est basé sur l'approximation des lignes de transmission, ce qui veut dire que les dimensions transversales sont considérées petites par rapport à la petite longueur d'onde [11].

Nous allons considérer le cas d'un conducteur sans pertes au dessus du sol. Ce dernier est supposé être parfaitement conducteur car le modèle de Rusck a été introduit en partant de cette hypothèse. La géométrie du problème est présentée à la Figure 8.



**Fig. 8.** Géométrie du problème étudié.

Le modèle de Rusck [3] est exprimé en fonction des tensions induites par les potentiels scalaire et vecteur :

$$\frac{\partial U_{sp}(x, t)}{\partial x} + \acute{L} \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} + \acute{C} \frac{\partial}{\partial t} [u_{sp}(x, t) - u_{sp}^i(x, t)] = 0 \quad (12)$$

Où :

$\acute{L}$  et  $\acute{C}$  désignent l'inductance et la capacité linéique de la ligne ;

$i(x, t)$  représente le courant le long de la ligne ;

$u_{sp}(x, t)$  est le potentiel scalaire induit ;

$u_{sp}^i(x, t)$  est le potentiel scalaire inducteur.

Selon ce modèle, la tension induite  $u(x, t)$  s'obtient en rajoutant au potentiel scalaire induit, solution des équations (5) et (6), le potentiel vecteur induit donné par l'expression suivante :

$$u_{vp} = \int_0^h \frac{\partial A_z^i(x, t)}{\partial t} dz \quad (13)$$

Où  $h$  est la hauteur du conducteur et  $A_z^i$  est la composante verticale du potentiel scalaire induit.

Les conditions aux limites pour les équations (5) et (6) sont [23] :

$$u_{sp}(0, t) = -R_0 i(0, t) - \int_0^h \frac{\partial A_z^i(0, t)}{\partial t} dz \quad (14)$$

$$u_{sp}(l, t) = -R_0 i(l, t) - \int_0^h \frac{\partial A_z^i(l, t)}{\partial t} dz \quad (15)$$

A noter enfin que le modèle de Rusck a été adopté dans plusieurs travaux dont celui de Yokoyama et al.[4,10]. En effet, ces auteurs ont utilisé ce modèle pour calculer les tensions induites partant d'un courant de foudre mesuré. Les résultats de simulation obtenus, par ces auteurs, ont montré une bonne concordance lorsqu'on les compare à des résultats expérimentaux disponibles dans la littérature.

Par ailleurs, d'autres auteurs sont arrivés aux mêmes conclusions obtenues par Yokoyama et al.[4,10], il s'agit d'Erikson et al [13].

## 5. Théorie de Rusck

Le modèle de Rusck est basé sur une expression analytique qui permet de calculer la tension induite  $U(x, t)$  à un point  $x$  d'un conducteur d'une ligne aérienne qui se trouve à une hauteur  $h$  du sol (fig. 8). Cette expression est la somme de deux termes à savoir :  $U_1(x, t)$  et  $U_2(x, t)$ . Le premier terme est en relation avec la contribution de la tension induite localisée à droite de  $x$ , et le deuxième terme est en relation avec contribution de la tension induite localisée à gauche de  $x$  (Eq. (16)-(17)). La décharge orageuse est modélisée selon les hypothèses simplificatrices suivantes : sol parfaitement conducteur et canal de foudre strictement vertical.

En se basant sur la géométrie illustrée sur la figure (9), l'application du modèle de Rusck permet l'écriture des expressions suivantes :

$$U(x, t) = U_1(x, t) + U_2(x, t) \quad (16)$$

$$U_1 = Z_0 I_0 h \beta \frac{\nu_0 t - x}{y^2 + \beta^2 (\nu_0 t - x)^2} \left[ 1 + \frac{x + \beta^2 (\nu_0 t - x)}{\beta^2 (\nu_0 t) + (1 - \beta^2) (x^2 + y^2)} \right] \quad (17)$$

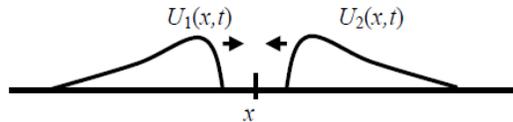
$$U_2(x, t) = U_1(-x, t) \tag{18}$$

Avec :

$\nu$  : Vitesse de l'arc en retour ( $m/\mu s$ ).

$x$  : Coordonnée d'un point quelconque sur la ligne.

$y$  : La plus petite distance entre le canal de foudre et la ligne.



**Fig. 9.** Tension induite au point x.

Il est important de mentionner que Rusck a proposé une formule simplifiée qui peut être utilisée pour estimer la valeur crête :  $U_{max}$  de la surtension induite sur une ligne longue partant de la valeur crête  $I_0$  du courant de foudre [3,8] ; cette formule s'écrit :

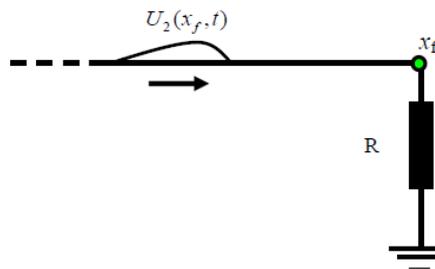
$$U_{max} = \frac{Z_0 I_0 h}{y} \tag{19}$$

### 5.1. Application des approches de Rusck pour une ligne de longueur finie

La théorie présentée ci-dessus permet de déterminer les surtensions induites pour une ligne infinie. Cependant, le traitement du cas d'une ligne de longueur finie permet d'envisager des configurations de réseaux électriques réels. Ainsi, le traitement du cas d'une ligne finie est basé sur l'idée des sources de compensations, ces dernières sont calculées à l'aide du principe de superposition en relation avec l'effet de discontinuité.

#### 5.1.1. Tension induite sur une ligne monofilaire

La figure (10) présente la configuration étudiée



**Fig. 10.** Discontinuité au point  $x_f$ .

La source de compensation en ce point est donnée par la formule suivante [3], [4],[8] :

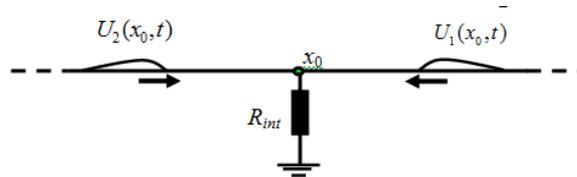
$$\Delta U = -U_1(x_f, t) + \Gamma_f U_2(x_f, t) \tag{20}$$

Le coefficient de réflexion s'exprime à l'aide de la formule suivante [3,8] :

$$\Gamma = \frac{R_f - Z}{R_f + Z} \tag{21}$$

$Z$ , est l'impédance caractéristique du conducteur.

La tension induite en ce point est la somme des expressions (16) et (20). La même procédure peut être considérée si la discontinuité se trouve dans le coté gauche de  $x$ .



**Fig. 11.** Discontinuité au point  $x_0$ .

Si la discontinuité se trouve au point d'origine  $x_0$  (fig.11), le coefficient de réflexion s'exprime par [3],[8] :

$$\Gamma_{int} = \frac{-Z}{2R_{int} + Z} \tag{22}$$

La source de compensation s'écrit alors comme suit :

$$\Delta U = \Gamma_{int} [U_1(x_0, t) + U_2(x_0, t)] \tag{23}$$

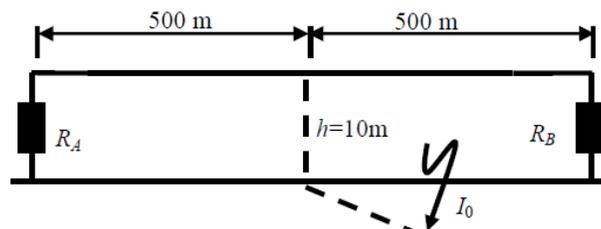
La tension induite en ce point est donnée par [1,2,6] :

$$U(x_0, t) = U_1(x_0, t) + U_2(x_0, t) + \Gamma_{int} [U_1(x_0, t) + U_2(x_0, t)] \tag{24}$$

Pour calculer la tension induite sur un point  $x$  intermédiaire situé entre et la formule suivante est utilisée [8] :

$$U(x, t) = U_1(x, t) + U_2(x, t) + [\Gamma_f U_2(x_f, t) - U_1(x_f, t)] u(t - t_f) + [\Gamma_{int} U_1(x_0, t) + U_2(x_0, t)] u(t - t_0) \tag{25}$$

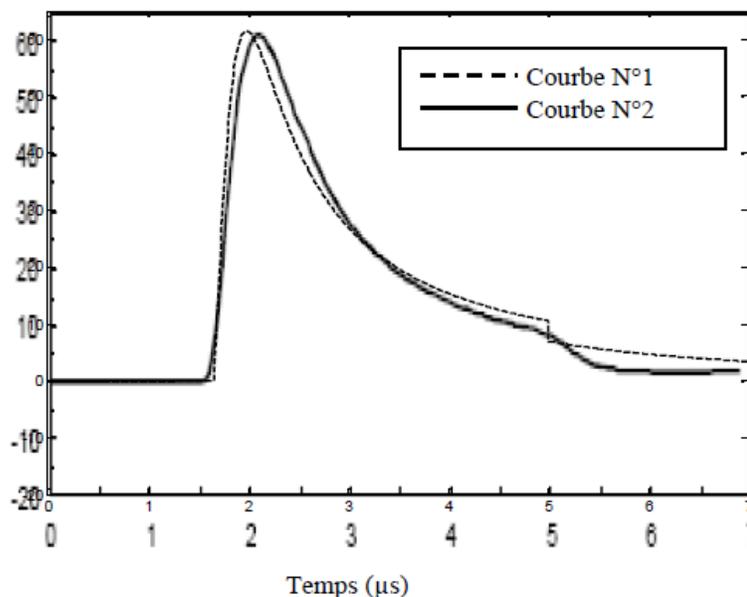
$t_0$  et  $t_f$  sont les temps de passage du point  $x_0$  et  $x_f$  respectivement aux points  $x$ .  
 $u(t)$  est la fonction échelon unité.



**Fig. 12.** Diagramme schématique de ligne.

La configuration de la ligne est illustrée sur la figure (12), avec  $R_A = R_B = 480\Omega$ . Dans la figure (13) nous présentons les variations temporelles de la tension induite obtenue pour l'extrémité de la ligne distante de  $500m$  de l'origine  $x = 0$  (Courbe N°1-Fig13). Le point d'impact se trouve à  $50m$  de la ligne, la valeur maximale du courant est égale à  $12kA$ .

Nous constatons que cette tension induite a la forme d'une impulsion avec un retard égal au temps de passage du point  $x = 0$  au point  $x = 500m$ . Sur cette même figure nous avons reporté le graphe de cette tension induite obtenu à l'aide du modèle d'Agrawal (Courbe N°2-Fig12) issu de la référence [30] dans un but de comparaison des résultats. Nous observons aussi qu'autant pour le modèle de Rusck que pour celui d'Agrawal, la tension totale le long de la ligne se présente sous la forme d'une onde unipolaire positive. De plus la forme d'onde de cette dernière est caractérisée par un temps de montée très court. Enfin la comparaison des formes d'ondes obtenues par le modèle de Rusck et d'Agrawal montre une assez bonne concordance, ce qui valide l'approche du modèle de Rusck et l'équivalence théorique entre les deux modèles établie par Cooray et al dans la référence [27].



**Fig. 13.** Tension induite sur une ligne monofilaire finie ( $I_0 = 12kA$ ,  $v = 170m/s$ ,  $y = 50m$ ,  $h = 10m$ ,  $x = 500m$ ).

## 6. Conclusion

Dans cette communication nous avons étudié le problème du couplage du champ électromagnétique (EM) rayonné par un coup de foudre avec une ligne aérienne. Le calcul de ce champ a été effectué à l'aide des approches théoriques de Rusck. Ces dernières se sont avérées tout à fait valables après comparaison des résultats de calcul avec ceux obtenus par d'autres chercheurs mettant en œuvre des approches beaucoup plus complexes. Le calcul des surtensions induites par couplage du champ EM calculé avec une ligne aérienne, mettant en œuvre le modèle de couplage de Rusck, a été effectué avec succès tout en mettant en jeu un formalisme analytique assez simple facilitant ainsi la mise en œuvre informatique.

## REFERENCES

- [1] S. Bauzac, « La protection contre la foudre à France- Telecom : des kiloampères aux kilo-Francs », Journées sur la Compatibilité Electromagnétique, Installation CEM et Protection des Electroniques, Grenoble (18 - 19 Mai 1993).
- [2] R.Thottappillil " Electromagnetic Pulse Environment of Cloud-to-Ground Lightning for EMC studies", IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility, vol. 44, no. 1, pp. 203–213, Feb.2002.
- [3] S.Rusck, "Induced lightning over voltages on power transmission lines with special reference to the over voltage protection of low voltage networks", PhD thesis, Royal Institute -Stockholm, Sweden, 1958.
- [4] Jos Paulino, JS Lopes, W. C. Boaventura, J. Pissolato Filho "Lightning induced voltages on distribution lines with shield wires" EMC'94, Roma, Italy.
- [5] J.P.Silva, A. E .A. Araujo, os Paulino "Calculation of lightning induced voltages with Rusck's méthode in EMTP :part I and part II" IPST 2001, Rio De Janeiro, Brazil.
- [6] S. Yokoyama"Calculation of lightning induced voltages on overhead multiconductors systems" IEEE Trans. On power Apparatus and Systems, Vol.PAS-103 N0. 1 Jan.1984.
- [7] Sandro C.Assis, Wellace C. Boaventura "Desenvolvimento de um modelo de calculo de tensoes indizadas por descargas atmosfericas em conductors multiaterredos e incorporacao Do modelo ao EMTDC/PSCAD"1 :Eng.UFMG 2 :Prof. UFMG (Brazil).
- [8] I. N. da Silva, R. A. Flauzino, et J. A. C. Luzón "Design of expert system for optimized protection studies against Atmospheric Discharges in Distribution Systems" 2006 IEEE PES Transmission and distribution conference and exposition Latin America, Venezuela.
- [9] Hans Kristian Hoidalen, " Calculation of lightning induced overvoltages using MODELS".SINTEF Energy Research, Trondheim, Norway.
- [10] Hans Kristian Hoidalen, "lightning induced voltages in low-voltage systems and its dependency on overhead line terminations". SINTEF Energy Research, Trondheim, Norway.
- [11] A.Borghetti, S.Guerriere, C.A.Nucci, F.Rachidi « Modèles de calcul des surtensions induites par la foudre : Analyse comparative ». ", Proceedings of 7 éme Colloque International et Exposition Sur La Compatibilité Électromagnétique, Toulouse, 2-4 Mars 1994.
- [12] S. Yokoyama " Advanced observations of lightning induced voltages on power distribution lines " IEEE Trans. On power delivery, Vol. 4 N0. 4, Jan.1989.
- [13] A.J. Erikson et al. " lightning induced voltages on overhead distribution lines" IEEE trans. On power apparatus and systems, Vol.PAS-101 N0. Jan.1982.
- [14] Mat Davenisa " A pratical extension of Rusck's formula for maximum lightning induced voltages that a ccounts for ground resistivity " IEEE trans. On power delivery, Vol. 22 N0. 1 Jan.2007.
- [15] Yoshihiro Bada, Vladimir A.Rakov. " voltages induced on overhead wires by lightning strikes to nearby tall grounded object" IEEE Trans. On EMC , Vol.48 N0. 1 Feb.2006.
- [16] A.Borghetti, C.A.Nucci, M.Paolone" An improved procedure for the assessment of overhead line indirect lightning performance and its comparison with the IEEE Std. 1410 method" , IEEE trans. On Power Delivery, Vol. 22 N0. 1 Jan.2007.

- [17] Farhad Rachidi-Haeri “ Effet électromagnétique de foudre sur les lignes de transmission aériennes modélisation et simulation ».Thèse doctorat es science EPFL, Lausanne, Suisse, 1991 .
- [18] David Orzan « Couplage externe et interne entre un champ électromagnétique et un réseau de ligne multifilaires » Thèse de Doctorat Es Science EPFL, Lausanne, Suisse, 1998.
- [19] Hans Kristian Hoidalén, “calculation of lightning induced voltages in MODELS including lossy ground effects”.IPST 2003 New Orleans, USA.
- [20] Raul Montano « The effects of lightning on low voltage power networks » Thèse doctorat Université d’Uppsala, Suède 2005.
- [21] Ernesto Pérez Gonzalez « Avances en el modelamiento y experimentacion de tensiones inducidas en redes de distribucion » Thèse de Doctorat, Université National de Colombia, 2006.
- [22] Mario Paolone « Modeling of lightning induced voltages on distribution networks for solution of power quality problems, and relevant implementation in a transient program” Thèse PHD, Université de Bologne, Italie 2001.
- [23] C.A. Nucci “Tensions induites par la foudre sur les lignes aériennes de transport d’énergie” ELECTRA N. 162 Oct.1995.
- [24] A.K.Agrawal, H.J.Price, S.H.Gurbaxani, " Transient response of multiconductor transmission lines excited by a nonuniform electromagnetic field, IEEE Transactions On Electromagnetic Compatibility, Vol-22, pp : 119-129, 1980.
- [25] G.Deindorfer, "Induced voltage on overhead line due to nearby lightning", IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility, Vol-32, No.4, pp : 388-399, Nov1990.
- [26] C.Nucci, F.Rachidi, M.Ianoz, C. Mazzetti," Lightning induced voltages on overhead lines", IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility, Vol-35, No.1, pp :75-86, Feb.1993.
- [27] [V. Cooray «Calculation of lightning-induced overvoltages in power lines : A comparison of two coupling models » IEEE Trans. On EMC, Vol.36 N0. 3, Aout.1994.
- [28] V. A. Rakov, m. A. Uman, " Review and evaluation of lightning return stroke models including some aspects of their application" IEEE Transactions On Electromagnetic Compatibility, Vol. 40, No. 4, Pp. 403–426, Nov. 1998.
- [29] L.Bermudez Arboleda « Lightning currents and electromagnetic fields associated with return strokes to elvated strike objects » Thèse doctorat es science, EPFL, Lausanne, Suisse, 2003
- [30] C.A Nucci, F. Rachidi “Lightning induced overvoltages” IEEE transmiión and distribution conference, Panel session – distribution lightning protection-, new Orleáns, April 14, 1999.

# Semigroup's approach to the study of the Hölder continuous regularity for Laplace equation in nonsmooth domain.

Belkacem Chaouchi <sup>a \*</sup>,

<sup>a</sup> Laboratoire de l'Energie et des Systèmes Intelligents, Khemis Miliana University, 44225, Algeria.

## ARTICLE INFO

Article history :  
Received December 2013  
Accepted April 2014

Keywords :  
Fractional powers of linear operators ;  
Analytic semigroup ;  
Operational differential equation of elliptic type ;  
Little Hölder space ;  
Cuspidal point ;  
Interpolation spaces.

## ABSTRACT

We will investigate the Dirichlet problem for Laplace equation set in an singular domain with cuspidal point. We look to describe the behavior of the unique solution near the cuspidal point in the framework of the little Hölder space  $h^{2\sigma}(\Omega)$  with  $\sigma \in ]0, 1/2[$ .

©2014 LESI. All right reserved.

## 1. Introduction

Let  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  a bounded domain. We assume that its boundary  $\partial\Omega$  is of class  $C^\infty$  except at the origin  $(0, 0)$  where  $\partial\Omega$  has a cuspidal point. To be more precise, assume that we can choose cartesian coordinates so that

$$\Omega_{x_0} := \Omega \cap B(0, x_0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < x_0, 0 < y < \psi(x)\},$$

where  $B(0, x_0)$  is the ball of center 0 and radius  $x_0$ . Here  $x_0 > 0$  is small enough and  $\psi$  is a real function satisfying the following conditions

1.  $\psi \in C^2([0, x_0]) \cap C^\infty(]0, x_0[)$ .
2.  $\psi < 0$  on  $]0, x_0[$ .
3.  $\int_0^{x_0} \frac{dt}{\psi(t)}$  diverges.
4.  $\psi(0) = \psi'(0) = 0$ .

\*Email : chaouchicukm@gmail.com

5.  $\psi(0)\psi''(0) = 0$ .

6. We assume also that  $\psi$  can be extended to  $[x_0, +\infty[$ , so that  $\frac{1}{\psi}$  remains in  $L^1(]x_0, +\infty[)$ .

Consider the problem

$$\Delta u = h, \quad \text{in } \Omega, \tag{1}$$

under the homogenous boundary conditions

$$u = 0, \quad \text{on } \partial\Omega. \tag{2}$$

The right hand term  $h$  is taken in the little Hölder space  $h^{2\sigma}(\Omega)$  which denotes the subspace of  $C^{2\sigma}(\Omega)$  consisting of the functions  $f$  such that

$$\forall (x, y), (x', y') \in \Omega : \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \sup_{0 < \|(x,y)-(x',y')\| \leq \delta} \frac{\|f(x, y) - f(x', y')\|_E}{\|(x, y) - (x', y')\|^{2\sigma}} = 0.$$

We assume also that

$$h(x_0, 0) = h(x_0, \psi(x_0)) = 0, \tag{3}$$

(more details about these spaces will be given later).

The study of elliptic problems posed in cusp domains was considered by numerous authors, see e.g. [ 7] and [ 12] (and the extensive bibliography therein). The majority of these works deals with the  $L^p$  setting of these problems. Comparatively, there are a few results concerning the little Hölder regularity. The difficulty related to this kind of problems comes from the typical properties of the functional framework. In our situation, the classical methods such as the variational method do not apply, see [ 9], [ 10]. Furthermore, we know that such spaces have not the UMD character, see [ 3]. This explains why the operatioanl approach used in [ 1], [ 6], [ 7] is excluded. Hence, we use an alternative approach, namely the theory of abstract differential equations. This technique has been fruitfully used in [ 4] to prove some regularity results for Problem (1). These results are restricted to the domain

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < x_0, -x^\alpha < y < x^\alpha\},$$

with  $1 < \alpha \leq 2$ .

In this work, we follow the same strategy. Our goal is to give a complete study of the problem (1) in the neighborhood of the cusp edge it means in  $\Omega_{x_0}$ . We will prove that Problem (1)-(2) has a unique strict solution. Furthermore, we show that the regularity of this solution near the cuspidal edge is dependent to the geometry of the domain  $\Omega_{x_0}$  and the exponent  $\sigma$ .

The schedule of the paper is the following one : In Section 2, we introduce some notations and definitions concerning some functions spaces to be used throughout this paper. Section 3, there are two main steps. First, we use an appropriate change of variables to transform our singular domain  $\Omega$  into a fixed one. Secondly, we write the transformed problem as an abstract differential equation of elliptic type. Section 4, is devoted to the complete study of the abstract version of the transformed problem, the techniques are essentially based on the use of the semigroup's theory and some interpolation spaces. Section 5, we go back to the original domain and we give our main result describing the regularity of the solution  $u$  of Problem (1)-(2).

## 2. Preliminaries

In this work, it is necessary to introduce some Banach spaces of vector-valued functions. Let  $(E, \|\cdot\|_E)$  be a complex Banach space and let  $\mu \in ]0, 1[$ . We consider the following functional spaces  $B([0, +\infty[; E)$ ,  $C([0, +\infty[; E)$ ,  $C^2([0, +\infty[; E)$  consisting respectively of the bounded, continuous, 2 times continuously differentiable functions  $f : [0, +\infty[ \rightarrow E$ .

We set also

$$C_b([0, +\infty[; E) = \left\{ f \in C([0, +\infty[; E) : \lim_{\xi \rightarrow +\infty} f(\xi) = 0 \right\},$$

$$C_b^2([0, +\infty[; E) = C^2([0, +\infty[; E) \cap C_b([0, +\infty[; E).$$

The Banach spaces of Hölder continuous functions  $C^\mu([0, +\infty[; E)$  is defined by

$$C_b^\mu([0, +\infty[; E) = \left\{ f \in C_b([0, +\infty[; E) : \sup_{\xi_1 > \xi_0 \geq 0} \frac{\|f(\xi_1) - f(\xi_0)\|_E}{|\xi_1 - \xi_0|^\mu} < +\infty \right\}, \text{ with}$$

$$\|f\|_{C_b^\mu([0, +\infty[; E)} := \|f\|_{C([0, +\infty[; E)} + \sup_{\xi_1 > \xi_0 \geq 0} \frac{\|f(\xi_1) - f(\xi_0)\|_E}{|\xi_1 - \xi_0|^\mu}.$$

The Banach spaces of little Hölder continuous functions  $h_b^\mu([0, +\infty[; E)$ ,  $h_b^{\mu+2}([0, +\infty[; E)$  are defined by

$$h_b^\mu([0, +\infty[; E) = \left\{ f \in C_b^\mu([0, +\infty[; E) : \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{\xi_1 > \xi_0 \geq 0, |\xi_1 - \xi_0| \leq \delta} \frac{\|f(\xi_1) - f(\xi_0)\|_E}{(\xi_1 - \xi_0)^\mu} = 0 \right\}.$$

$$h_b^{\mu+2}([0, +\infty[; E) = \{f \in C_b^2([0, +\infty[; E) : f, f', f'' \in h_b^\mu([0, +\infty[; E)\}.$$

$$L^\infty([0, +\infty[; E) = \left\{ f : ]0, +\infty[ \rightarrow E, \text{ Bochner measurable and } \sup_{\xi \in U} \text{ess} \|f(\xi)\|_E < \infty \right\}.$$

**Remark 1** for  $\mu \in ]0, 1[$ , One has

$$C_b^2([0, +\infty[, E) \subset C_b^1([0, +\infty[, E) \subset h_b^\mu([0, +\infty[, E) \subset C_b^\mu([0, +\infty[, E) \subset C_b([0, +\infty[, E).$$

**Remark 2** For  $\mu \in ]0, 1[$ , every function of  $h^\mu(\Omega)$  can be extended to a function of  $h^\mu(\bar{\Omega})$ .

## 3. Change of variables

We set

$$\begin{aligned} \Pi : \Omega_{x_0} &\rightarrow Q_{\xi_0} \\ (x, y) &\mapsto \left( \xi := \theta^{-1}(x) := - \int_x^{+\infty} \frac{d\sigma}{\psi(\sigma)}, \eta := \frac{y}{\psi} \right), \end{aligned}$$

where  $Q_{\xi_0}$  is the semi-infinite strip

$$Q_{\xi_0} = ]\xi_0, +\infty] \times ]0, 1[, \xi_0 = - \int_{x_0}^{+\infty} \frac{d\nu}{\psi(\nu)},$$

which mean that the cuspidal point  $(0, 0)$  is transformed in

$$D_\infty = \{(+\infty, \eta) : \eta \in ]0, 1[ \} = \{+\infty\} \times ]0, 1[. \tag{4}$$

Now, consider the following change of functions

$$\begin{cases} v(\xi, \eta) := u(x, y), \\ g(\xi, \eta) := h(x, y). \end{cases} \tag{5}$$

Consequently. Problem (1)-(2) is equivalent to

$$\begin{cases} \Delta_{(\xi, \eta)} v(\xi, \eta) + [Lv](\xi, \eta) = f(\xi, \eta), & (\xi, \eta) \in Q_{\xi_0}, \\ v(\xi_0, \eta) = 0, & 0 < \eta < 1, \\ v(\xi, 0) = v(\xi, 1) = 0, & \xi > \xi_0, \end{cases} \tag{6}$$

where

$$f(\xi, \eta) = \psi^2 g(\xi, \eta), \tag{7}$$

and  $L$  is the second differential operator with  $C^\infty$ -bounded coefficients on  $Q_{\xi_0}$  given by

$$\begin{aligned} [Lv](\xi, \eta) &= \eta^2 (\psi')^2 \partial_\eta^2 v(\xi, \eta) + 2\eta\psi' \partial_{\eta\xi}^2 v(\xi, \eta) \\ &\quad + \psi' \partial_\xi v(\xi, \eta) - \eta \left( 2(\psi')^2 - (\psi\psi'')^2 \right) \partial_\eta v. \end{aligned} \tag{8}$$

**Remark 3** Note here that

$$\forall \eta \in [0, 1] : \lim_{\xi \rightarrow +\infty} g(\xi, \eta) = \lim_{\xi \rightarrow +\infty} h(\theta(\xi), \eta\psi(\theta(\xi))) = h(0, 0). \tag{9}$$

and

$$\forall \eta \in [0, 1] : \lim_{\xi \rightarrow +\infty} f(\xi, \eta) = \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \psi^2(\theta(\xi)) h(\theta(\xi), \eta\psi(\theta(\xi))) = 0.$$

In the sequel, we will focus ourselves on the study of the concrete problem :

$$\begin{cases} \Delta_{(\xi, \eta)} v(\xi, \eta) = f(\xi, \eta), & (\xi, \eta) \in Q_{\xi_0}, \\ v(\xi_0, \eta) = 0, & 0 < \eta < 1, \\ v(\xi, 0) = v(\xi, 1) = 0, & \xi > \xi_0. \end{cases} \tag{10}$$

Using the same argument as in [ 4] and [ 8], one has

**Proposition 4** Let  $\sigma \in ]0, \frac{1}{2}[$ . Then

$$h \in h^{2\sigma}(\overline{\Omega}_{x_0}) \Rightarrow f \in h_b^{2\sigma}(\overline{Q}_{\xi_0}).$$

### 3.1. The abstract formulation of the problem (10)

Set  $E = C([0, 1])$  endowed with its usual norm. Define the vector-valued following functions :

$$\begin{aligned} v &: [\xi_0, +\infty[ \rightarrow E; \xi \longrightarrow v(\xi); \quad v(\xi)(\eta) = v(\xi, \eta), \\ f &: [\xi_0, +\infty[ \rightarrow E; \xi \longrightarrow f(\xi); \quad f(\xi)(\eta) = f(\xi, \eta). \end{aligned}$$

Consider the operator  $A$  defined by

$$\begin{cases} D(A) &= \{w \in C^2([0, 1]) : w(0) = w(1) = 0\}, \\ (Aw)(\eta) &= D_\eta^2 w(\eta). \end{cases} \tag{11}$$

Then, the concrete problem

$$\begin{cases} \Delta_{(\xi, \eta)} v(\xi, \eta) = f(\xi, \eta), & (\xi, \eta) \in Q_{\xi_0}, \\ v(\xi_0, \eta) = 0, & 0 < \eta < 1, \\ v(\xi, 0) = v(\xi, 1) = 0, & \xi > \xi_0, \end{cases} \tag{12}$$

is written in the following operational form

$$\begin{cases} v''(\xi) + Av(\xi) = f(\xi) & \xi > \xi_0, \\ v(\xi_0) = 0. \end{cases} \tag{13}$$

In order to obtain more optimal results for the problem (13), it will be more convenient to study the problem

$$\begin{cases} v''(\xi) + Av(\xi) = f(\xi) & \xi > \xi_0, \\ v(\xi_0) = \varphi, \end{cases} \tag{14}$$

where

$$f \in h_b^{2\sigma}(\overline{Q_{\xi_0}}), \tag{15}$$

and  $\varphi \in E$ .

It is well known that  $A$  it is a closed non densely defined operator satisfying the Krein-ellipticity property, that is :  $\mathbb{R}^+ \subset \rho(A)$  and

$$\exists C > 0 : \forall \lambda \geq 0 \quad \|(A - \lambda I)^{-1}\|_{L(E)} \leq \frac{C}{1 + |\lambda|}, \tag{16}$$

(here  $\rho(A)$  is the resolvent set of  $A$ ).

Assumption (16) implies that operator  $B = -(-A)^{1/2}$  is well defined and it is the infinitesimal generator of the generalized analytic semigroup  $(e^{\xi B})_{\xi > 0}$ . More precisely, there exists a sector

$$\Pi_{\delta, r_0} = \{z \in \mathbb{C}^* : |\arg z| \leq \delta + \pi/2\} \cup \overline{B(0, r_0)},$$

(with some positive  $\delta, r_0$ ) and  $C > 0$  such that  $\rho(B) \supset \Pi_{\delta, r_0}$  and

$$\exists C > 0 : \forall z \in \Pi_{\delta, r_0}, \quad \|(B - zI)^{-1}\| \leq \frac{C}{1 + |z|}.$$

**Remark 5** Let us state some properties of the analytic semigroup  $(e^{\xi B})_{\xi>0}$  :

1.  $\exists \omega > 0 : \forall k \in \mathbb{N}, \exists m_k \geq 1$  such that

$$\|\xi^k B^k e^{B\xi}\|_{L(E)} \leq m_k e^{-\omega\xi}, \tag{17}$$

2.  $\lim_{\xi \rightarrow 0} e^{\xi B} \varphi = \varphi$  if and only if  $\varphi \in \overline{D(B)}$ .

Note that in our case, one has

$$\overline{D(A)} = \{\psi \in C([0, 1]) : \psi(0) = \psi(1) = 0\} = \overline{D(B)},$$

Thanks to Assumption (16), we introduce the real Banach interpolation spaces between  $D(A)$  and  $E$  :

$$D_A(2\sigma) = \left\{ \zeta \in E : \lim_{r \rightarrow +\infty} \|r^{2\sigma} A(A - rI)^{-1} \zeta\|_E = 0 \right\}, \sigma \in ]0, 1/2[.$$

More details about these Banach spaces are given in [ 11] and [ 14].

As in [ 2] and [ 13], we are studying our equation (14) under the hypothesis

$$f \in L^\infty(] \xi_0, +\infty[; h^{2\sigma}([0, 1])) \cap h_b^{2\sigma}(] \xi_0, +\infty[; C([0, 1])). \tag{18}$$

#### 4. Optimal results for Problem (14)

Consider the natural change of function : for  $\xi \in [0, +\infty[$ , set

$$V(\xi) = v(\xi + \xi_0), \quad F(\xi) = f(\xi + \xi_0),$$

where  $v$  is the eventual solution of (14) and  $f$  satisfying (18). Therefore it is clear that

$$F \in L^\infty(]0, +\infty[; h^{2\sigma}([0, 1])) \cap h_b^{2\sigma}([0, +\infty[; C([0, 1])); \tag{19}$$

now the complete analysis of (14) on  $[\xi_0, +\infty[$  is equivalent to the one done for the following

$$\begin{cases} V''(\xi) + AV(\xi) = F(\xi) & \xi > 0, \\ V(0) = \varphi, \end{cases} \tag{20}$$

on  $[0, +\infty[$ .

Let us focus ourselves on the study of the problem (20). The solution of (20) is given formally by

$$\begin{aligned} V(\xi) = & e^{B\xi} \varphi + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{B(\xi+s)} B^{-1} F(s) ds \\ & - \frac{1}{2} \int_0^\xi e^{B(\xi-s)} B^{-1} F(s) ds \\ & - \frac{1}{2} \int_\xi^{+\infty} e^{B(s-\xi)} B^{-1} F(s) ds. \end{aligned} \tag{21}$$

Note that the absolute convergence of the second and fourth integral is obtained due to the estimate (17). In fact, for instance, one has

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\xi}^{+\infty} e^{B(s-\xi)} B^{-1} F(s) ds \right\| &\leq C \left( \int_{\xi}^{+\infty} e^{-\omega(s-\xi)} ds \right) \max_{t \in [0, +\infty[} \|F(t)\|_E \\ &\leq C \max_{t \in [0, +\infty[} \|F(t)\|_E. \end{aligned}$$

We can state some regularity properties of  $V$  :

**4.1. Optimal results using  $F \in h_b^{2\sigma}([0, +\infty[; E)$**

In this subsection we will use the fact that

$$F \in h_b^{2\sigma}([0, +\infty[; E);$$

recall also that  $F$  verifies

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} F(\xi) = 0. \tag{22}$$

Assume that  $\varphi \in D(A) = D(B^2)$ . Write

$$\begin{aligned} V(\xi) &= e^{B\xi} \varphi + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{B(\xi+s)} B^{-1} F(s) ds \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^{\xi} e^{B(\xi-s)} B^{-1} F(s) ds \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\xi}^{+\infty} e^{B(s-\xi)} B^{-1} F(s) ds \\ &= V_1(\xi) + V_2(\xi) + V_3(\xi) + V_4(\xi). \end{aligned} \tag{23}$$

Then

$$\|B^2 V_1(\xi)\|_E = \|e^{B\xi} B^2 \varphi\|_E \leq C \|\varphi\|_{D(B^2)}.$$

Concerning  $V_2(\xi)$ , one has

$$V_2(\xi) = \frac{B^{-1}}{2} \int_0^{+\infty} e^{B(\xi+s)} F(s) ds \in D(B),$$

and

$$\begin{aligned} B V_2(\xi) &= \frac{e^{B\xi}}{2} \int_0^{+\infty} e^{Bs} F(s) ds \\ &= \frac{e^{B\xi}}{2} \int_0^{+\infty} e^{Bs} (F(s) - F(0)) ds + \frac{1}{2} B^{-1} e^{B\xi} F(0), \end{aligned}$$

from which it follows that

$$B^2V_2(\xi) = \frac{e^{B\xi}}{2} \int_0^{+\infty} B e^{Bs} (F(s) - F(0)) ds + \frac{1}{2} e^{B\xi} F(0),$$

and clearly

$$\begin{aligned} \|B^2V_2(\xi)\|_E &\leq C \left( \int_0^{+\infty} e^{-\omega s} s^{2\sigma-1} ds \right) \|F\|_{h_b^{2\sigma}([0,+\infty[;E)} + C' \|F(0)\|_E \\ &\leq C \frac{\Gamma(2\sigma)}{\omega^{2\sigma}} \|F\|_{h_b^{2\sigma}([0,+\infty[;E)} + C' \|F(0)\|_E \\ &\leq C \|F\|_{h_b^{2\sigma}([0,+\infty[;E)}, \end{aligned}$$

where  $\Gamma$  is the usual Euler function defined by

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-w} \cdot w^{z-1} dw, \quad \text{Re } z > 0.$$

For  $V_3(\xi)$ , by writing

$$\begin{aligned} BV_3(\xi) &= -\frac{1}{2} \int_0^\xi e^{B(\xi-s)} F(s) ds \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^\xi e^{B(\xi-s)} (F(s) - F(\xi)) ds - \frac{B^{-1}}{2} e^{B\xi} F(\xi) + \frac{B^{-1}}{2} F(\xi); \end{aligned}$$

we have

$$B^2V_3(\xi) = -\frac{1}{2} \int_0^\xi B e^{B(\xi-s)} (F(s) - F(\xi)) ds - \frac{1}{2} e^{B\xi} F(\xi) + \frac{1}{2} F(\xi);$$

thus

$$\|B^2V_3(\xi)\|_E \leq C \|F\|_{h_b^{2\sigma}([0,+\infty[;E)} + C' \|F(\xi)\|_E \leq C'' \|F\|_{h_b^{2\sigma}([0,+\infty[;E)}.$$

Finally

$$\begin{aligned} &BV_4(\xi) \\ &= -\frac{1}{2} \int_\xi^{+\infty} e^{B(s-\xi)} F(s) ds \\ &= -\frac{1}{2} \int_\xi^{+\infty} e^{B(s-\xi)} (F(s) - F(\xi)) ds + \frac{B^{-1}}{2} F(\xi), \end{aligned}$$

and

$$B^2V_4(\xi) = -\frac{1}{2} \int_{\xi}^{+\infty} B e^{B(s-\xi)} (F(s) - F(\xi)) ds + \frac{1}{2} F(\xi),$$

which gives the estimate

$$\|B^2V_4(\xi)\|_E \leq C \|F\|_{h_b^{2\sigma}([0,+\infty[;E)} + C' \|F(\xi)\|_E \leq C'' \|F\|_{h_b^{2\sigma}([0,+\infty[;E)}.$$

Summarizing, we obtain the following decomposition

$$\begin{aligned} & B^2V(\xi) & (24) \\ = & e^{B\xi} [B^2\varphi + F(0)] + F(\xi) \\ & + \frac{e^{B\xi}}{2} \left( \int_0^{+\infty} B e^{Bs} (F(s) - F(0)) ds \right) \\ & - \frac{1}{2} \int_0^{\xi} B e^{B(\xi-s)} (F(s) - F(\xi)) ds \\ & - \frac{1}{2} \int_{\xi}^{+\infty} B e^{B(s-\xi)} (F(s) - F(\xi)) ds. \end{aligned}$$

**Proposition 6** *Let  $V$  given in (23). Then  $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} V(\xi) = 0$ .*

**Proof.** We know that there exists  $\omega > 0$  and  $m_0 > 0$  such that for any  $\xi > 0$

$$\|V_1(\xi)\|_E \leq m_0 e^{-\omega\xi} \|\varphi\|_E,$$

then

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \|V_1(\xi)\|_E = 0.$$

the same is true for  $V_2(\xi)$ .

For  $V_3(\xi)$ , one write

$$\begin{aligned} & V_2(\xi) \\ = & -\frac{1}{2} \left( \int_0^{\xi/2} e^{B(\xi-s)} B^{-1} F(s) ds + \int_{\xi/2}^{\xi} e^{B(\xi-s)} B^{-1} F(s) ds \right) \\ = & -\frac{1}{2} (V_{21}(\xi) + V_{22}(\xi)). \end{aligned}$$

One has

$$\begin{aligned} \|V_{21}(\xi)\|_E &\leq C \left( \int_0^{\xi/2} e^{-\omega(\xi-s)} ds \right) \|F\|_{h_b^{2\sigma}([0,+\infty[;E)} \\ &\leq \frac{C}{\omega} (e^{-\omega\xi/2} - e^{-\omega\xi}) \|F\|_{h_b^{2\sigma}([0,+\infty[;E)}, \end{aligned}$$

consequently,

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} V_{21}(\xi) = 0.$$

Since  $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} F(\xi) = 0$ , then

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \sup_{\frac{\xi}{2} \leq s \leq \xi} \|F(s)\|_E = 0.$$

So,

$$\begin{aligned} \|V_{22}(\xi)\|_E &\leq C \sup_{\frac{\xi}{2} \leq s \leq \xi} \|F(s)\|_E \int_{\xi/2}^{\xi} \|e^{B(\xi-s)}\|_{L(E)} ds \\ &\leq C (1 - e^{-\omega\xi/2}) \left( \sup_{\frac{\xi}{2} \leq s \leq \xi} \|f(s)\|_E \right). \end{aligned}$$

Therefore,

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \|V_{22}(\xi)\|_E = 0.$$

In the same way we obtain

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} V_3(\xi) = 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} V_4(\xi) = 0.$$

We have the following result summarizing the complete analysis of  $V$  for  $F \in h_b^{2\sigma}([0, +\infty[; E)$ .

**Proposition 7** *Let  $\varphi \in D(A)$ . Then  $V$  given in (23) is the unique solution of (20) satisfying*

1.  $V'', AV(\cdot) \in C_b([0, +\infty[; E)$  if and only if  $F(0) - A\varphi = F(0) + B^2\varphi \in \overline{D(A)}$ ,
2.  $V'', AV(\cdot) \in h_b^{2\sigma}([0, +\infty[; E)$  if and only if  $F(0) - A\varphi = F(0) + B^2\varphi \in D_A(\sigma)$

**Sketch of the proof.** Recall that

$$\begin{aligned}
 & B^2V(\xi) \tag{25} \\
 = & e^{B\xi} (B^2\varphi + F(0)) \\
 & + \frac{e^{B\xi}}{2} \left( \int_0^{+\infty} B e^{Bs} (F(s) - F(0)) ds \right) \\
 & - \frac{1}{2} \int_0^\xi B e^{B(\xi-s)} (F(s) - F(\xi)) ds \\
 & - \frac{1}{2} \int_\xi^{+\infty} B e^{B(s-\xi)} (F(s) - F(\xi)) ds \\
 & + F(\xi).
 \end{aligned}$$

The proof is essentially based on the representation (24) and all the properties proved in [ 14], in particular see Proposition 1.2, p. 20 and Theorem 4.5, p. 53. For instance, the term

$$e^{B\xi} (B^2\varphi + F(0)),$$

is continuous at 0 if and only if  $F(0) + B^2\varphi \in \overline{D(A)}$  and its limit when  $\xi \rightarrow 0^+$  is  $B^2\varphi + F(0)$ . The second term writes

$$\begin{aligned}
 & \frac{e^{B\xi}}{2} \left( \int_0^{+\infty} B e^{Bs} (F(s) - F(0)) ds \right) \\
 = & \frac{e^{B\xi}}{2} \left( \int_0^1 B e^{Bs} (F(s) - F(0)) ds + \int_1^{+\infty} B e^{Bs} (F(s) - F(0)) ds \right) \\
 = & \frac{e^{B\xi}}{2} [(a) + (b)],
 \end{aligned}$$

it is well known that  $(a) \in D_A(\sigma, +\infty)$  when  $F$  is only in  $C_b^{2\sigma}([0, +\infty[; E)$  and  $(a) \in D_A(\sigma)$  in our case  $F \in h_b^{2\sigma}([0, +\infty[; E)$  while  $(b)$  is very regular since it belongs to  $D(B^k)$  for all  $k \in \mathbb{N}^*$ . In the same way we analyze the other integrals in  $B^2V(\xi)$ .

Remark also that each term in (25) tends to 0 when  $\xi \rightarrow +\infty$ ; the proof is the same as for  $V$ .

Going back to our operational problem (14), one obtains obviously, for  $\xi \geq \xi_0$

$$\begin{aligned}
 v(\xi) &= V(\xi - \xi_0) = e^{B(\xi - \xi_0)}\varphi + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{B(\xi - \xi_0 + s)} B^{-1} F(s) ds \\
 &\quad - \frac{1}{2} \int_0^{\xi - \xi_0} e^{B(\xi - \xi_0 - s)} B^{-1} F(s) ds \\
 &\quad - \frac{1}{2} \int_{\xi - \xi_0}^{+\infty} e^{B(s - \xi + \xi_0)} B^{-1} F(s) ds,
 \end{aligned} \tag{26}$$

and the following result

**Proposition 8** *Let  $\varphi \in C^2([0, 1])$  such that  $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ . Then  $v$  given in (26) is the unique solution of (14) satisfying*

1.  $\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} \in C_b([\xi_0, +\infty[; C([0, 1]))$  if and only if

$$\begin{cases} \eta \mapsto f(\xi_0, \eta) - \varphi''(\eta) \in C([0, 1]) \text{ and} \\ f(\xi_0, 0) - \varphi''(0) = f(\xi_0, 1) - \varphi''(1) = 0. \end{cases}$$

2.  $\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} \in h_b^{2\sigma}([\xi_0, +\infty[; C([0, 1]))$  if and only if

$$\begin{cases} \eta \mapsto f(\xi_0, \eta) - \varphi''(\eta) \in h^{2\sigma}([-1, 1]) \text{ and} \\ f(\xi_0, 0) - \varphi''(0) = f(\xi_0, 1) - \varphi''(1) = 0. \end{cases}$$

**Remark 9** *Let  $\varphi = 0$ . We can also give the following representation of the solution by using the Grisvard method, see [ 5]*

$$\begin{aligned}
 V(\xi) &= -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_1} \int_0^\xi \frac{e^{-\sqrt{-z}\xi} \sinh \sqrt{-z}s}{\sqrt{-z}} (A - zI)^{-1} F(s) ds dz \\
 &\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_1} \int_\xi^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{-z}s} \sinh \sqrt{-z}\xi}{\sqrt{-z}} (A - zI)^{-1} F(s) ds dz,
 \end{aligned}$$

where  $\gamma_1$  is the boundary of

$$S(\omega_0, \epsilon_0) = \{z \in \mathbb{C}^* : |\arg z| \leq \omega_0\} \cup B(0, \epsilon_0).$$

Thus

$$\begin{aligned}
 V(\xi, \eta) &= V(\xi)(\eta) \\
 &= -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_1} \int_0^\xi \frac{e^{-\sqrt{-z}\xi} \sinh \sqrt{-z}s}{\sqrt{-z}} ((A - zI)^{-1} F(s))(\eta) ds dz \\
 &\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_1} \int_\xi^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{-z}s} \sinh \sqrt{-z}\xi}{\sqrt{-z}} ((A - zI)^{-1} F(s))(\eta) ds dz;
 \end{aligned}$$

or equivalently

$$\begin{aligned} v(\xi, \eta) &= v(\xi)(\eta) = V(\xi - \xi_0)(\eta) \\ &= -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_1} \int_0^{\xi - \xi_0} \frac{e^{-\sqrt{-z}(\xi - \xi_0)} \sinh \sqrt{-z}s}{\sqrt{-z}} ((A - zI)^{-1}F(s))(\eta) ds dz \\ &\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_1} \int_{\xi - \xi_0}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{-z}s} \sinh \sqrt{-z}(\xi - \xi_0)}{\sqrt{-z}} ((A - zI)^{-1}F(s))(\eta) ds dz; \end{aligned}$$

but in our case, one has

$$\begin{aligned} &((A - zI)^{-1}F(s))(\eta) \\ &= -\int_0^\eta \frac{\sinh \sqrt{z}(1 - \eta) \sinh \tau \sqrt{z}}{\sqrt{z} \sinh \sqrt{z}} F(s)(\tau) d\tau \\ &\quad - \int_\eta^1 \frac{\sinh \sqrt{z}(1 - \tau) \sinh \eta \sqrt{z}}{\sqrt{z} \sinh \sqrt{z}} F(s)(\tau) d\tau \\ &= \int_0^1 K_z(\eta, \tau) F(s)(\tau) d\tau \\ &= \int_0^1 K_z(\eta, \tau) f(s + \xi_0, \tau) d\tau, \end{aligned}$$

with some natural modification for  $(A - zI)^{-1}$  near zero (which is deduced from the explicit calculus of  $A^{-1}$ ).

We then obtain the formula

$$\begin{aligned} v(\xi, \eta) &= -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_1} \int_0^{\xi - \xi_0} \frac{e^{-\sqrt{-z}(\xi - \xi_0)} \sinh \sqrt{-z}s}{\sqrt{-z}} \left[ \int_0^1 K_z(\eta, \tau) f(s + \xi_0, \tau) d\tau \right] ds dz \\ &\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_1} \int_{\xi - \xi_0}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{-z}s} \sinh \sqrt{-z}(\xi - \xi_0)}{\sqrt{-z}} \left[ \int_0^1 K_z(\eta, \tau) f(s + \xi_0, \tau) d\tau \right] ds dz. \end{aligned}$$

#### 4.2. Optimal results using $F \in L^\infty(]0, +\infty[; h^{2\sigma}([0, 1]))$

In this case, we decompose our problem

$$\begin{cases} \Delta_{(\xi, \eta)} v(\xi, \eta) = f(\xi, \eta), & (\xi, \eta) \in Q_{\xi_0}, \\ v(\xi_0, \eta) = \varphi(\eta), & 0 < \eta < 1, \\ v(\xi, 0) = v(\xi, 1) = 0, & \xi > \xi_0, \end{cases} \tag{27}$$

in the two following problems

$$\begin{cases} \Delta_{(\xi, \eta)} v_1(\xi, \eta) = 0 = f_1(\xi, \eta), & (\xi, \eta) \in Q_{\xi_0}, \\ v_1(\xi_0, \eta) = \varphi(\eta), & 0 < \eta < 1, \\ v_1(\xi, 0) = v_1(\xi, 1) = 0, & \xi > \xi_0, \end{cases} \tag{28}$$

and

$$\begin{cases} \Delta_{(\xi,\eta)} v_2(\xi, \eta) = f(\xi, \eta), & (\xi, \eta) \in Q_{\xi_0}, \\ v_2(\xi_0, \eta) = 0, & 0 < \eta < 1, \\ v_2(\xi, 0) = v_2(\xi, 1) = 0, & \xi > \xi_0. \end{cases} \quad (29)$$

As above, clearly (28) leads to

$$\begin{cases} V_1''(\xi) + AV_1(\xi) = F_1(\xi) = 0 & \xi > 0, \\ V_1(0) = \varphi, \end{cases} \quad (30)$$

and here

$$F_1 = 0 \in C_b([0, +\infty[, h_0^{2\sigma}([0, 1])) = C([0, +\infty[; D_A(\sigma))$$

since, one has exactly

$$D_A(\sigma) = \{ \phi \in h^{2\sigma}([0, 1]) : \phi(0) = \phi(1) = 0 \} = h_0^{2\sigma}([0, 1]).$$

Therefore we can use for the abstract equation (30), the same operational techniques as above and due to [14], see Theorem 5.5, p. 60. We then obtain the following result.

**Proposition 10** *Let  $\varphi \in D(A)$ . Then there exists a unique solution  $V_1$  to (30) satisfying*

1.  $V_1'', AV_1(\cdot) \in C_b([0, +\infty[; E)$
2. *if*  $A\varphi \in D_A(\sigma)$  *then*  $V_1'', AV_1(\cdot) \in h_b^{2\sigma}([0, +\infty[; E) \cap L^\infty([0, +\infty[; h^{2\sigma}([0, 1]))$ .

The same results hold true for  $v_1$  which gives

**Proposition 11** *Let  $\varphi \in C^2([0, 1])$  such that  $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ . Then there exists a unique solution  $v_1$  to (28) satisfying*

1.  $\frac{\partial^2 v_1}{\partial \xi^2}, \frac{\partial^2 v_1}{\partial \eta^2} \in C_b([\xi_0, +\infty[; E)$
2. *if*

$$\eta \longmapsto \varphi''(\eta) \in h^{2\sigma}([0, 1]) \text{ and } \varphi''(0) = \varphi''(1) = 0,$$

$$\text{then } \frac{\partial^2 v_1}{\partial \xi^2}, \frac{\partial^2 v_1}{\partial \eta^2} \in h_b^{2\sigma}([\xi_0, +\infty[; E) \cap L^\infty([\xi_0, +\infty[; h^{2\sigma}([0, 1])).$$

It remains to analyze (29) with

$$f \in L^\infty([\xi_0, +\infty[; h^{2\sigma}([0, 1]))$$

without boundary condition on  $f(\xi, \cdot)$  at 0 and 1. One must invert the abstract writing of (29) in order to use the regularity with respect to  $\eta$ . We write (29) in the following form

$$\begin{cases} V_2''(\eta) + A_2 V_2(\eta) = F(\eta) & 0 < \eta < 1, \\ V_2(0) = V_2(1) = 0, \end{cases} \quad (31)$$

in the space  $E_2 = L^\infty([\xi_0, +\infty[)$  where for all  $\eta \in [0, 1]$  and for a.e.  $\xi \in ]\xi_0, +\infty]$

$$F(\eta) : \eta \longmapsto F(\eta)(\xi) = f(\xi, \eta), \quad V_2(\eta) : \xi \longmapsto V_2(\eta)(\xi) = v_2(\xi, \eta),$$

and  $A_2$  is the closed linear operator

$$\begin{cases} D(A_2) = \{\psi \in W^{2,\infty}([\xi_0, +\infty]) : \psi(\xi_0) = 0\} \\ (A_2\psi)(\xi) = \psi''(\xi). \end{cases}$$

Note that here also  $D(A_2)$  is not dense in  $E = L^\infty([\xi_0, +\infty])$ .

As for  $A$ , operator  $A_2$  satisfies the Krein-ellipticity property, that is :  $\mathbb{R}^+ \subset \rho(A_2)$  and  $\exists C > 0 : \forall \lambda \geq 0$

$$\|(A_2 - \lambda I)^{-1}\|_{L(E)} \leq \frac{C}{1 + |\lambda|},$$

which implies that operator  $B_2 = -(-A_2)^{1/2}$  is well defined and is the infinitesimal generator of the generalized analytic semigroup  $(e^{\xi B_2})_{\xi > 0}$ .

Therefore the techniques used in the above subsection apply and one obtains

**Proposition 12** *There exists a unique solution  $V_2$  of (31) satisfying*

1.  $V_2'', A_2 V_2(\cdot) \in C([0, 1]; E_2)$  if and only if  $F(0), F(1) \in \overline{D(A_2)}$ ,
2.  $V_2'', A V_2(\cdot) \in h^{2\sigma}([0, 1]; E_2)$  if and only if  $F(0), F(1) \in D_{A_2}(\sigma)$ .

This Proposition has the equivalent for  $v_2$  by inverting the variables  $(\eta, \xi)$

**Proposition 13** *There exists a unique solution  $v_2(\xi, \eta)$  of (27) satisfying*

1.  $\frac{\partial^2 v_2}{\partial \eta^2}, \frac{\partial^2 v_2}{\partial \xi^2} \in L^\infty([\xi_0, +\infty]; C([0, 1]))$  if and only if
 
$$\begin{cases} \xi \mapsto f(\xi, 0), f(\xi, 1) \in C_b([\xi_0, +\infty[) \\ f(\xi_0, 0) = f(\xi_0, 1) = 0, \end{cases}$$
2.  $\frac{\partial^2 v_2}{\partial \eta^2}, \frac{\partial^2 v_2}{\partial \xi^2} \in L^\infty([\xi_0, +\infty]; h^{2\sigma}([0, 1]))$  if and only if
 
$$\xi \mapsto f(\xi, 0), f(\xi, 1) \in D_{A_2}(\sigma).$$

Therefore we summarize the results in the case of  $F \in L^\infty([\xi_0, +\infty]; h^{2\sigma}([0, 1]))$  by writing for  $v = v_1 + v_2$

**Proposition 14** *Let  $\varphi \in C^2([0, 1])$  such that  $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ . Then there exists a unique solution  $v$  such that if*

$$\begin{cases} \eta \longmapsto \varphi''(\eta) \in h^{2\sigma}([0, 1]) \text{ and } \varphi''(0) = \varphi''(1) = 0 \text{ and} \\ \xi \mapsto f(\xi, 0), f(\xi, 1) \in D_{A_2}(\sigma), \end{cases}$$

then  $\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} \in L^\infty([\xi_0, +\infty]; h^{2\sigma}([0, 1]))$ .

**4.3. Complete results using  $f \in h^{2\sigma}(\overline{Q_{\xi_0}})$**

Now we are in position to summarize all the results concerning our Problem (12) with

$$f \in h_b^{2\sigma}([\xi_0, +\infty[; E) \cap L^\infty([\xi_0, +\infty[; h^{2\sigma}([0, 1])) = h_b^{2\sigma}(\overline{Q_{\xi_0}}).$$

From the results in the above subsections, one obtains

**Proposition 15** *Let  $\varphi \in C^2([0, 1])$  such that  $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ . Then there exists a unique solution  $v$  of (10) such that*

1. *if*

$$\begin{cases} \eta \longmapsto \varphi''(\eta) \in h^{2\sigma}([0, 1]) \text{ and } \varphi''(0) = \varphi''(1) = 0 \text{ and} \\ \xi \longmapsto f(\xi, 0), f(\xi, 1) \in D_{A_2}(\sigma), \end{cases}$$

$$\text{then } \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} \in L^\infty([\xi_0, +\infty[; h^{2\sigma}([0, 1])).$$

2.  $\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} \in h_b^{2\sigma}([\xi_0, +\infty[; C([0, 1]))$  *if and only if*

$$\begin{cases} \eta \longmapsto f(\xi_0, \eta) - \varphi''(\eta) \in h^{2\sigma}([0, 1]) \text{ and} \\ f(\xi_0, 0) - \varphi''(0) = f(\xi_0, 1) - \varphi''(1) = 0. \end{cases}$$

Let us focus ourselves on the case when

$$\varphi = 0,$$

recall that the conditions

$$\xi \longmapsto f(\xi, 0), f(\xi, 1) \in D_{A_2}(\sigma), \tag{32}$$

mean that

$$f(\xi_0, 0) = f(\xi_0, 1) = 0,$$

then, one has

**Proposition 16** *Let  $f \in h^{2\sigma}(\overline{Q_{\xi_0}})$ , ( $\sigma \in ]0, 1/2[$ ) such that*

$$\xi \longmapsto f(\xi_0, 0) = f(\xi_0, 1) = 0. \tag{33}$$

*Then there exists a unique solution  $v$  of (12) such that*

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} \in L^\infty([\xi_0, +\infty[; h^{2\sigma}([0, 1])) \cap h_b^{2\sigma}([\xi_0, +\infty[; C([0, 1])) = h_b^{2\sigma}(\overline{Q_{\xi_0}}).$$

Set

$$X_d = \{v \in h^{2+2\sigma}(\overline{Q_{\xi_0}}) : v = 0 \text{ on } \partial\overline{Q_{\xi_0}}\} \tag{34}$$

and

$$X_a = \{f \in h_b^{2\sigma}(\overline{Q_{\xi_0}}) : f(\xi_0, 0) = f(\xi_0, 01) = 0\}. \tag{35}$$

Therefore, we deduce that the Laplace operator

$$\Delta : X_d \rightarrow X_a,$$

is an isomorphism.

At this level, we recall that we look to study the regularity of the solution of Problem (6) at the vicinity of  $D_\infty$  ( given by 4 ). For this reason, we introduce the two following operators

$$T : \begin{matrix} h_b^{2\sigma}(\overline{Q_{\xi_0}}) \\ f \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} h_b^{2\sigma}(\overline{Q_{\xi_0}}) \\ k(\xi) f, \end{matrix} \tag{36}$$

where  $k : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  is the the truncation function defined by

$$\begin{cases} k(\xi) = 0 & 0 \leq \xi \leq 2\xi_0 := \xi_1, \\ k(\xi) = \xi - \xi_1 & \xi_1 \leq \xi \leq 2\xi_1 := \xi_2, \\ k(\xi) = 1 & \xi \geq \xi_2. \end{cases}$$

$$\bar{L} : \begin{matrix} h_b^{2+2\sigma}(\overline{Q_{\xi_0}}) \\ f \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} h_b^{2\sigma}(\overline{Q_{\xi_0}}) \\ (T \circ L) f \end{matrix} \tag{37}$$

where  $L$  is given by (8).

**Lemma 17** *Let  $\sigma \in ]0, 1/2[$  One has*

1. *The linear operator  $T$  is continuous with*

$$\|Tf\|_{h^{2\sigma}(\overline{Q_{\xi_0}})} \leq 2 \|f\|_{h^{2\sigma}(\overline{Q_{\xi_0}})}.$$

2. *The linear operator  $\bar{L}$  is continuous with*

$$\|\bar{L}f\|_{h^{2+2\sigma}(\overline{Q_{\xi_0}})} \leq 2 \|L\|_{h^{2+2\sigma}(\overline{Q_{\xi_0}})}.$$

Using the same argument as in [ 7 ] and Keeping in mind the results of the previous section. We deduce that there exist  $\xi^* \geq \xi_2$  large enough such that

$$\Delta + \bar{L} : X_d \rightarrow X_a$$

is an isomorphism. This justifies our main result concerning our complete transformed problem (6)

**Proposition 18** Let  $f \in h_b^{2\sigma}(\overline{Q_{\xi_0}})$ , ( $\sigma \in ]0, 1/2[$ ) such that

$$\xi \mapsto f(\xi_0, 0) = f(\xi_0, 1) = 0.$$

Then there exists  $\xi^* \geq \xi_2$  such that (6) admits a unique strict solution  $v$  satisfying

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} \in h_b^{2\sigma}(\overline{Q_{\xi^*}}).$$

**Remark 19** In the sequel, for simplicity, we assume that  $\xi^* = \xi_2$ .

#### 4.4. Go back to the original problem

Let  $\bar{u}$  the unique variational solution of Problem (1), see [ 7]. Set

$$u = \Theta(x) \bar{u}$$

where  $\Theta(x) \in C^\infty([0, x_0])$  such that

$$\begin{cases} 0 \leq \Theta \leq 1 \\ \Theta(x) = 0 & x > x_1 := \Pi^{-1}(\xi_1) \\ \Theta(x) = 1 & x \leq x_2 := \Pi^{-1}(\xi_2) \end{cases}$$

**Remark 20** It is easy to see that :

1.  $\begin{cases} u = 0 & x > x_1 \\ u = \bar{u} & 0 < x < x_2 \end{cases}$
2.  $\Delta u \in h^{2\sigma}(\Omega_{x_0})$ .

Taking into account, the results of the previous section, we conclude that for  $x \leq x_2$ , one has

$$\bar{u} = \Pi^{-1}(v)$$

where  $v$  is the unique solution of (6).

Now, we give the following result describing the effect of the inverse change of variables.

**Lemma 21** Let  $\sigma \in ]0, 1/2[$ . Then

$$g \in h_b^{2\sigma}(\overline{Q_{\xi_0}}) \Rightarrow (\psi(x))^{2\sigma} h \in h^{2\sigma}(\overline{\Omega_{x_0}}).$$

Recall that for all  $(x, y) \in \overline{\Omega}$

$$h(x, y) = g\left(\theta^{-1}(x), \frac{y}{\psi(x)}\right).$$

Given a small  $\delta > 0$ . Let  $(x_2, y_2), (x_1, y_1) \in \Omega_{x_0}$  such that

$$(x_2, y_2) \neq (x_1, y_1),$$

and  $\|(x_2 - x_1, y_2 - y_1)\| \leq \delta$ . Assume, for instance that  $x_1 \leq x_2, y_1 \leq y_2$ . First, it is easy to see that

$$\sup_{(x,y) \in \Omega_{x_0}} |(\psi(x))^{2\sigma} h(x,y)| < \infty.$$

One has

$$\begin{aligned} & (\psi(x_2))^{2\sigma} h(x_2, y_2) - (\psi(x_1))^{2\sigma} h(x_1, y_1) \\ &= ((\psi(x_2))^{2\sigma} - (\psi(x_1))^{2\sigma}) h(x_2, y_2) + (\psi(x_1))^{2\sigma} (h(x_2, y_2) - h(x_1, y_1)) \\ &= P_1 + P_2. \end{aligned}$$

Then

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{\|(x_2, y_2) - (x_1, y_1)\| \leq \delta} \frac{|P_1|}{\|(x_2 - x_1, y_2 - y_1)\|^{2\sigma}} = 0.$$

For  $P_2$ , one has

$$\begin{aligned} & \frac{|P_2|}{\|(x_2 - x_1, y_2 - y_1)\|^{2\sigma}} \\ &= (\psi(x_1))^{4\sigma} \frac{|g \circ \Pi(x_2, y_2) - g \circ \Pi(x_1, y_1)|}{\|\Pi(x_2, y_2) - \Pi(x_1, y_1)\|^{2\sigma}} \frac{\|\Pi(x_2, y_2) - \Pi(x_1, y_1)\|^{2\sigma}}{\|(x_2 - x_1, y_2 - y_1)\|^{2\sigma}}. \end{aligned}$$

From  $g \in h^{2\sigma}(\overline{Q_{\xi_0}})$ , we get

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{\|\Pi(x_2, y_2) - \Pi(x_1, y_1)\| \leq \delta} \frac{|g \circ \Pi(x_2, y_2) - g \circ \Pi(x_1, y_1)|}{\|\Pi(x_2, y_2) - \Pi(x_1, y_1)\|^{2\sigma}} = 0.$$

It remains to estimate the second fraction; one has

$$\begin{aligned} & \|\Pi(x_2, y_2) - \Pi(x_1, y_1)\|^{2\sigma} \\ & \leq \left\| \left( \theta^{-1}(x_2) - \theta^{-1}(x_1), \frac{y_2}{\psi(x_2)} - \frac{y_1}{\psi(x_1)} \right) \right\|^{2\sigma} \\ & \leq \left\| \left( \theta^{-1}(x_2) - \theta^{-1}(x_1), \frac{y_2\psi(x_1) - y_1\psi(x_2)}{\psi(x_2)\psi(x_1)} \right) \right\|^{2\sigma} \\ & \leq \left\| \left( \theta^{-1}(x_2) - \theta^{-1}(x_1), y_2 \frac{(\psi(x_1) - \psi(x_2))}{\psi(x_2)\psi(x_1)} + \psi(x_2) \frac{(y_2 - y_1)}{\psi(x_2)\psi(x_1)} \right) \right\|^{2\sigma} \end{aligned}$$

since  $x_1 < x_2$  Thus

$$\|\Pi(x_2, y_2) - \Pi(x_1, y_1)\|^{2\sigma} \leq \frac{C}{(\psi(x_1))^{2\sigma}} \|(x_2 - x_1, y_2 - y_1)\|^{2\sigma}$$

from which we deduce that

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{\|(x_2 - x_1, y_2 - y_1)\| \leq \delta} \frac{|P_2|}{\|(x_2 - x_1, y_2 - y_1)\|^{2\sigma}} = 0.$$

Summing up, we get

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{\|(x_2 - x_1, y_2 - y_1)\| \leq \delta} \frac{|h(x_2, y_2) - h(x_1, y_1)|}{\|(x_2 - x_1, y_2 - y_1)\|^{2\sigma}} = 0.$$

Now, taking into account this result and using the same techniques as in [7], we give our main result

**Theorem 22** *Let  $h \in h^{2\sigma}(\bar{\Omega})$ , ( $\sigma \in ]0, 1/2[$ ) satisfying (3). Then, there exists  $x_2 < x_0$  such that Problem (1)-(2) admits a unique strict solution  $u$  satisfying*

$$(\psi(x))^{2\sigma} \partial_y^2 u \text{ and } (\psi(x))^{2\sigma} \partial_x^2 u \in h^{2\sigma}(\bar{\Omega}_{x_2}).$$

where

$$\Omega_{x_2} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < x_2, 0 < y < \psi(x)\}. \quad (38)$$

## REFERENCES

- [1] K. Belahdji, La régularité  $L^p$  de la Solution du Problème de Dirichlet dans un Domaine à Points de Rebroussement, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I 322 (1996), 5–8.
- [2] T. Berroug, D. Hua, R. Labbas, B. K Sadallah, On a Degenerate Parabolic Problem in Hölder Spaces. Applied Mathematics and Computation, vol. 162, Issue 2 (2005), 811-833.
- [3] D. L. Burkholder, A geometrical Characterisation of Banach Spaces in which Martingale Difference Sequences are Unconditional, Ann. Probab, 9 (1981), 997-1011.
- [4] B. Chaouchi, R. Labbas, B. K. Sadallah, Laplace Equation on a Domain With a Cuspidal Point in Little Hölder Spaces, to appear in Mediterranean Journal of Mathematics.
- [5] G Da Prato, P Grisvard, Sommes d'opérateurs linéaires et équations différentielles opérationnelles, J. Math. Pures Appl. (9) 54 (1975), no. 3, 305–387.
- [6] G. Dore, A. Venni, An Operational Method to Solve a Dirichlet Problem for the Laplace Operator in a Plane Sector, Differential and integral equations, Volume 3, Number 2,(1990), 323-334.
- [7] P. Grisvard, Problèmes aux Limites dans des Domaines avec Points de Rebroussement, Partial Differential Equations and Functional Analysis, Progress in Nonlinear Differential Equations Appl, 22, Birkhäuser Boston, Boston, MA (1996).
- [8] P. Guidotti, 2-D Free Boundary Value Problem with Onset of a Phase and Singular Elliptic Boundary Value Problems, Journal of Evolution Equations, Vol. 2 (4) 2002, 395-424.
- [9] K. Ibuki, Dirichlet problem for elliptic equations of the second order in a singular domain of  $\mathbb{R}^2$ , Journal Math. Kyoto Univ. 14, n° 1 (1974), pp. 54-71.
- [10] A. Khelif, Problèmes aux limites pour le laplacien dans un domaine à points cuspidés, CRAS, Paris, 287 (1978), pp. 1113-1116.
- [11] A. Lunardi, Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems, Birkhäuser, (1995).

- [12] V. Maz'ya, A. Soloviev, Boundary Integral Equations on Contours with Peaks, Operator Theory, Advances and Applications, Vol. 196, Birkhauser, 2010.
- [13] M. Najmi, Régularité-Singularité dans les Espaces de Hölder pour un Problème Elliptique et l'Equation de la Chaleur dans des Domaines Non Réguliers, Thèse d'état, Université de Nice, (1992).
- [14] E. Sinestrari, On the Abstract Cauchy Problem of Parabolic Type in Spaces of Continuous Functions, J. Math. Anal. Appli, 66 (1985), 16-66.

## Static and dynamic behavior of piezoelectric beams : Elastic and piezoelectric cases

Sofiane Bouhedma <sup>a \*</sup>, Mohammed Ouali <sup>a</sup>, Ali Mahieddine <sup>b</sup>

<sup>a</sup> Structural Mechanics Research Laboratory, Mechanical Engineering Department, Blida University, Algeria

<sup>b</sup> Energy and Smart Systems Laboratory, Khemis Miliana University, 44225, Algeria

### ARTICLE INFO

Article history :  
Received January 2014  
Accepted May 2014

Keywords :  
Piezoelectricity ;  
Piezoelectric beams ;  
Modal analysis ;  
Variational formulation ;  
Newmark approach.

### ABSTRACT

Piezoelectric materials are subject to a great deal of research in recent years, whether for mechanical purposes for their potential applications in the fields of mechanical engineering, as a tool of control and regulation, or for technological purposes in electronics such as crystal oscillators areas. They can also be used as actuators as well as vibration sensors. The study of the behavior of piezoelectric beams is the subject of our work. We propose to solve the equations of motion obtained by a variational method, applying the NEWMARK approach and based on a finite element discretization. A MATLAB code is developed to simulate and compare the results of a system formed by a piezoelectric and an elastic beam.

©2014 LESI. All right reserved.

## 1. Introduction

The advantage of the piezoelectric materials lies in their physical properties, mainly their ability to generate controllable deformations by application of an electric field and vice versa, converting a mechanical load (deformation) into an electrical signal. This reciprocity of the piezoelectric phenomenon is what allows their use as sensors or actuators.

Currently, the design and the control of piezoelectric structures is the subject of many theses and research works, we mention : Shen [1] proposed a finite element model based on the Timoshenko beam theory, modeling the beam and the piezoelectric element separately by using beam elements. Donthireddy Chandrashekhara and [2] develop a finite element model for analysis and control of piezoelectric beams form with integrated actuators stuck to the surface. Dettwiler and Al [3] conducted a finite element analysis of multilayer piezoelectric structures comprising actuators and sensors. Legrain and Petitjean [4] perform an experimental study on the behavior of piezoelectric materials. Sun and Huang [5] presented an analytical model of multilayer composite beams including piezoelectric sensors

\*Email : bouhedmasofiane1990@gmail.com

and actuators. Ishihara and N. Noda [6] studied a surface crack in a piezo-thermo-elastic body due to thermal loading. Liang Wang, Rui-xiang Bai and Chen Haoran [7] studied the static behavior of a crack situated at the interface between the piezoelectric actuator and the elastic beam. Ali Mahieddine Joël Pouget and Mohammed Ouali [8] presented a finite element model for piezoelectric beams presenting partially delaminated layers; this model allows the modeling of delamination anywhere in the structure.

The aim of the present work is to develop a finite element model for the study of the static and dynamic behavior of piezoelectric actuator beams. This model is based on the first order Kirchoff's theory.

## 2. Mathematical formulation :

Piezoelectricity is an electromechanical interaction, as piezoelectric materials are dielectrics which are deformed under the effect of an electric field and polarized under the effect of deformation.

In our case, we consider a beam with length  $L$ , width  $b$ , thickness  $h$ , the density  $\rho$  and right section  $S$ .

Using Kirchoff's first order theory, the displacement field is given by :

$$\begin{cases} U(x, y, z, t) = u(x, t) - z\theta(x, t) \\ V(x, y, z, t) = 0 \\ W(x, y, z, t) = W(x, t) \end{cases} \quad (1)$$

And the deformation field :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \varepsilon_{xz} = \frac{\partial W}{\partial x} - \theta \end{cases} \quad (2)$$

With :  $u, v$  and  $w$  are the displacements in the  $X, Y$  and  $Z$  directions.

The constitutive equations of piezoelectricity, if we neglect the thermal effect can be expressed in the following form :

$$\begin{aligned} \sigma &= \bar{C}\varepsilon - \bar{e}^t E \\ D &= \bar{e}\varepsilon + \bar{\epsilon} E \end{aligned} \quad (3)$$

$\sigma, \varepsilon, \bar{C}, \bar{e}, D, \bar{\epsilon}, E$  are respectively the stress ( $6 \times 1$ ), the deformations ( $6 \times 1$ ), the stiffness matrix ( $6 \times 6$ ), the piezoelectric constant matrix ( $3 \times 6$ ), the electric displacement ( $3 \times 1$ ), the permittivity matrix ( $3 \times 3$ ) and the electric field ( $3 \times 1$ ).

By assuming that :

- The stresses :  $\sigma_y, \sigma_{yz}, \sigma_{xz}$  are negligible compared with  $\sigma_x$ .
- The upper surface of the beam is free to move in the  $Z$  direction, which results in  $\sigma_z = 0$ .
- The electric fields  $E_1$  and  $E_2$  are negligible in front of  $E_3$ .

Equations (3) become :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{11} & 0 \\ \tilde{a} & \tilde{C}_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_{XZ} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} e_{11} \\ 0 \end{Bmatrix} E_Z \quad (4)$$

$$D_z = \tilde{e}_{31}\varepsilon_x + \tilde{\varepsilon}_{33}E_Z \quad (5)$$

With :

$$\tilde{C}_{11} = C_{11} + C_{11} \left( \frac{C_{12}C_{26} - C_{16}C_{22}}{C_{22}C_{66} - C_{26}^2} \right) - C_{12} \left( \frac{C_{12}C_{66} - C_{16}C_{26}}{C_{22}C_{66} - C_{26}^2} \right)$$

$$\tilde{C}_{55} = C_{55} - \frac{C_{45}^2}{C_{44}}$$

$$\tilde{e}_{31} = e_{31} \left( 1 - \frac{C_{16}C_{26} - C_{12}C_{66}}{C_{26}^2 - C_{22}C_{66}} \right)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{33} = \varepsilon_{33} + \frac{C_{66}e_{31}^2}{C_{22}C_{66} - C_{26}^2}$$

The expression of the kinetic energy is :

$$E_c = \frac{1}{2}\rho \int \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} - z \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] d\Omega \quad (6)$$

The potential energy is given by :

$$E_p = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\sigma\varepsilon - ED) d\Omega \quad (7)$$

$$E_p = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left( \tilde{C}_{11}\varepsilon_x\varepsilon_x + \tilde{C}_{55}\varepsilon_{xz}\varepsilon_{xz} - \tilde{e}_{31}\varepsilon_x E_z - \tilde{e}_{31}E_z\varepsilon_x - \tilde{\varepsilon}_{33}E_z E_z \right) d\Omega \quad (8)$$

The vector of external forces :

$$W_{ext} = \int_A (wp_z + \theta_y m_y + \phi D) dA \quad (9)$$

Where  $D$  is the load applied on the surface,  $p_z$  is a distributed load and  $m_y$  is a pair of linear intensity.

### 2.1. Finite element formulation

For our study, the interpolation functions are chosen as follows :

$$N_1 = 1 - \frac{x}{L_e}, N_2 = \frac{x}{L_e}, N_3 = \frac{x^3}{L_e^3} - 2\frac{x^2}{L_e} + x, N_4 = 2\frac{x^3}{L_e^3} - 3\frac{x^2}{L_e^2} + 1, N_5 = \frac{x^3}{L_e^3} - \frac{x^2}{L_e},$$

$$N_6 = 3\frac{x^3}{L_e^3} - 4\frac{x^2}{L_e} + 1, N_7 = 6\frac{x^2}{L_e^2} - 6\frac{x}{L_e}, N_8 = 3\frac{x^2}{L_e^2} - 2\frac{x}{L_e}, N_9 = -6\frac{x^2}{L_e^3} + 6\frac{x}{L_e}$$

$L_e$  : elementary length.

These functions form the interpolation matrix  $N$  such that :

$$N = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & N_3 & N_4 & 0 & N_5 & N_6 \\ 0 & N_7 & N_8 & 0 & N_9 & N_{10} \end{bmatrix}$$

$N_\phi = \begin{bmatrix} 1 - \frac{z}{h} & \frac{z}{h} \end{bmatrix}$  is the interpolation matrix for the electric field.

So :

$$\begin{Bmatrix} u \\ \theta \\ w \end{Bmatrix} = Nq_e \text{ and } \Phi = N_\phi \Phi_e$$

Where :  $q_z \begin{Bmatrix} u_i \\ \theta_i \\ w_i \\ u_j \\ \theta_j \\ w_j \end{Bmatrix}$  and  $\Phi_e$  are respectively the nodal displacements and the nodal

electric potential.

By replacing the displacements by their expressions we obtain :

$$E_c = \frac{1}{2} \dot{q}_e^T [M_e] \dot{q}_e \tag{10}$$

With :

$$[M_e] = \rho \int_{\Omega} \left( [N_u]^T [N_u] + z^2 [N_\theta]^T [N_\theta] + [N_w]^T [N_w] - 2z [N_{wu}]^T [N_\theta] \right) d\Omega$$

$$E_p = \frac{1}{2} \dot{q}_e^T [K_{uu}]_e \dot{q}_e \tag{11}$$

With :

$$[K_{uu}]_e = \int_{\Omega} \left[ \begin{array}{c} \tilde{C}_{11} \left( \left( \left[ \frac{N_u}{dx} \right]^T \left[ \frac{N_u}{dx} \right] + z^2 \left[ \frac{N_\theta}{dx} \right]^T \left[ \frac{N_\theta}{dx} \right] - 2z \left[ \frac{N_u}{dx} \right]^T \left[ \frac{N_\theta}{dx} \right] \right) + \\ + \tilde{C}_{55} \left( \left( \left[ \frac{N_w}{dx} \right] - N_\theta \right)^T \left( \left[ \frac{N_w}{dx} \right] - N_\theta \right) \right) \end{array} \right] d\Omega$$

$$E_{p \text{ piezo}} = \frac{1}{2} q_e^T [K_{u\phi}] \phi + \frac{1}{2} \phi_e [K_{\phi u}] q_e^T \tag{12}$$

With :

$$[K_{u\phi}] = - \int_{\Omega} \tilde{\epsilon}_{31} \left( \left[ \frac{N_u}{dx} \right]^T [N_\theta] + z \left[ \frac{N_\theta}{dx} \right]^T [N_\theta] \right) d\Omega$$

$$[K_{\phi u}] = - \int_{\Omega} \tilde{\epsilon}_{31} \left( [N_\theta]^T \left[ \frac{N_u}{dx} \right] + [N_\theta]^T \left[ \frac{N_\theta}{dx} \right] \right) d\Omega$$

$$E_{p \text{ dielect}} = \frac{1}{2} \phi_e^T [K_{\phi\phi}] \phi_e \tag{13}$$

With :

$$[K_{\phi\phi}] = - \int_{\Omega} \tilde{\epsilon}_{31} \left( [N_\theta]^T [N_\theta] \right) d\Omega$$

$$\{F\}_e = \int_A \left( [N_w]^T p_z + [N_\theta]^T m_y \right) dA \quad (14)$$

$$\{Q\}_e = \int_A \phi_e^T \left( [N_\phi]^T D \right) dA \quad (15)$$

Where :

$$\{f\}_e = \left\{ \begin{array}{l} \{F\}_e \\ \{Q\}_e \end{array} \right\} \quad (16)$$

Once the elementary vectors and matrices are defined, we proceed to the assembly step, to express them in global coordinates, to form the global matrices and global vectors representing the entire structure.

$$\left[ \begin{array}{cc} [M] & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \{\ddot{u}\} \\ \{\ddot{\Phi}\} \end{array} \right\} + \left[ \begin{array}{cc} [K_{uu}] & [K_{u\phi}] \\ [K_{\phi u}] & [K_{\phi\phi}] \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \{u\} \\ \{\Phi\} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} F \\ Q \end{array} \right\} \quad (17)$$

To solve these equations, we opt for the Newmark approach, given its simplicity, accuracy and stability. Approximations for the Newmark method are provided by :

$$\begin{aligned} \dot{u}_{n+1} &\simeq \dot{u}_n + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{u}_n + \gamma \Delta t \ddot{u}_{n+1} \\ u_{n+1} &\simeq u_n + \Delta t \dot{u}_n + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{u}_n + \beta \Delta t^2 \ddot{u}_{n+1} \end{aligned} \quad (18)$$

Introducing the numerical scheme (18) in the equations of motion (17) we obtain :

$$\tilde{M} \ddot{u}_{n+1} = F_{n+1} - K \left( u_n + \Delta t \dot{u}_n + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{u}_n \right) \quad (19)$$

With :

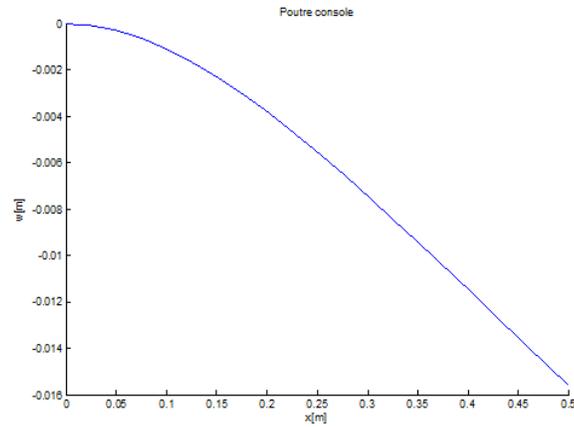
$$\tilde{M} = M + \beta \Delta t^2 K$$

$$\gamma = \frac{1}{2}$$

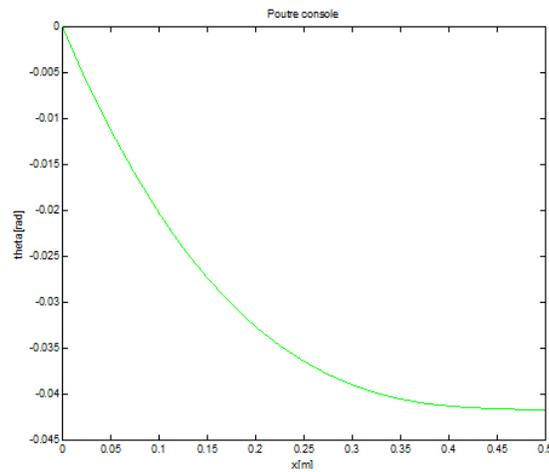
$$\beta = \frac{1}{6}$$

## 2.2. Results

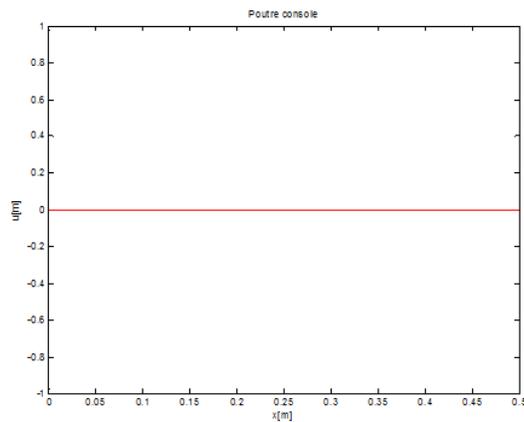
For the validation of our model for the study of beams, a MATLAB code is developed. This code takes into account both elastic and piezoelectric case. In order to perform numerical simulations of an elastic beam bending, we consider a console beam-ie clamped-free with a length  $L = 0.5m$ , width  $b = 0.03m$  and thickness  $h = 0.01m$ . This beam is subjected to the action of a uniformly distributed load over its entire length. The selected material (mild steel) has the following mechanical properties : Young's modulus :  $E = 2 \cdot 10^{11} N/m^2$ , Poisson coefficient :  $\nu = 0.3$  and density :  $\rho = 8000 kg/m^3$ .



**Fig. 1.** The deflection of the elastic beam.



**Fig. 2.** Rotation of the elastic beam.



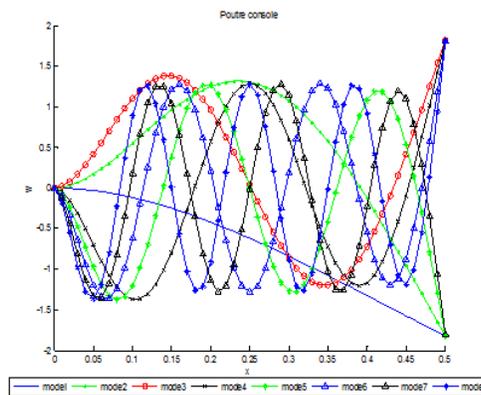
**Fig. 3.** The axial displacement of the elastic beam.

To validate the finite element model, we proceed to a comparison between analytical eigenvalues and those obtained by finite elements for the first 20 modes.

**Tab. 1.** Comparison between the analytical and numerical eigenvalues.

Modes	Frequencies (exact)	Frequencies (FE)	Relative error
1	202.974704	202.979418	0.002322
2	1272.112568	1271.384009	0.057272
3	3562.310339	3556.908165	0.151648
4	6980.317978	6961.565494	0.268648
5	11538.892984	11489.741877	0.425960
6	17237.111742	17130.495851	0.618525
7	24074.974252	23871.677245	0.844433
8	32052.480512	31699.167162	1.102296
9	41169.630525	40597.153041	1.390533
10	51426.424289	50548.361883	1.707415
11	62822.861804	61534.309574	2.051088
12	75358.943071	73535.556627	2.419602
13	89034.668090	86531.964641	2.810931
14	103850.036860	100502.948007	3.223002
15	119805.049382	115427.715894	3.653714
16	136899.705655	131285.500183	4.100962
17	155134.005680	148055.765653	4.562662
18	174507.949457	165718.399369	5.036762
19	195021.536984	184253.876833	5.521267
20	216674.768264	203643.403014	6.014251

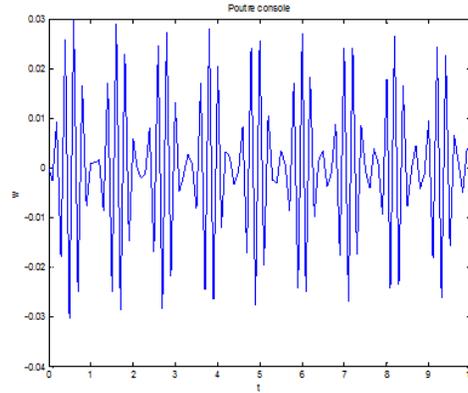
This comparison shows that the finite element model is well-chosen as the relative error does not exceed 6% for the 20th mode, and the results are almost identical.



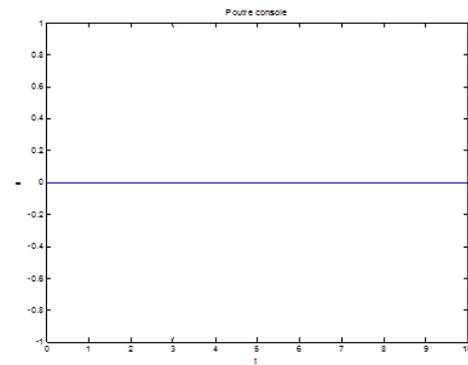
**Fig. 4.** Overlapping 8 eigenmodes of vibration of the elastic beam.

To talk over the dynamic problem, we consider the same beam (forced undamped vibration mode) subjected to the action of a harmonic force  $F = F.cos(100.t)$ .

The resolution of this problem by Newmark approach gives the graph (Figure 5), which represents the vertical vibrations of the beam.



**Fig. 5.** The vertical vibration end of the elastic beam.



**Fig. 6.** The axial vibration end of the elastic beam.

To investigate the piezoelectric case, we consider a beam having the same dimensions as those of the elastic case. This beam is subjected this time to the action of a mechanical load uniformly distributed over the entire length and a difference in electric potential  $V$  in the thickness direction. The material of the beam is piezoelectric, it is a piezoelectric ceramic, PZT-4, which has the following mechanical and electrical properties :

Density  $\rho = 7500kg/m^3$

The stiffness matrix is :

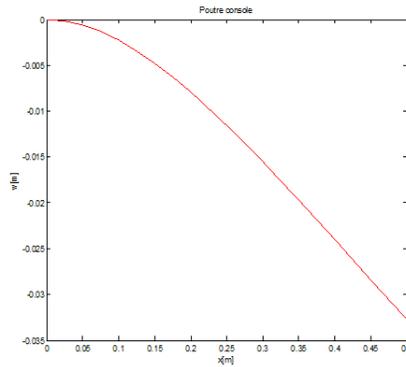
$$C = \begin{bmatrix} 13.90 & 7.78 & 7.43 & 0 & 0 & 0 \\ 7.78 & 13.90 & 7.43 & 0 & 0 & 0 \\ 7.43 & 7.43 & 11.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.56 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.56 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.07 \end{bmatrix} \cdot 10^{10} [N/m^2]$$

The matrix of piezoelectric constants is :

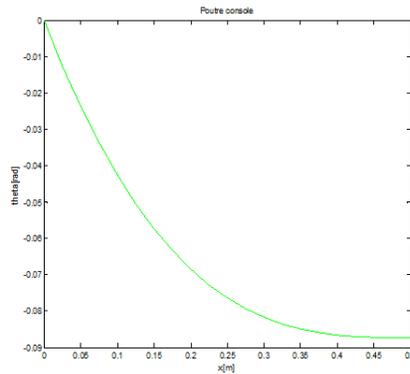
$$e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 12.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12.7 & 0 & 0 \\ -5.2 & -5.2 & 15.1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} [C/m^2]$$

The matrix of dielectric constants is :

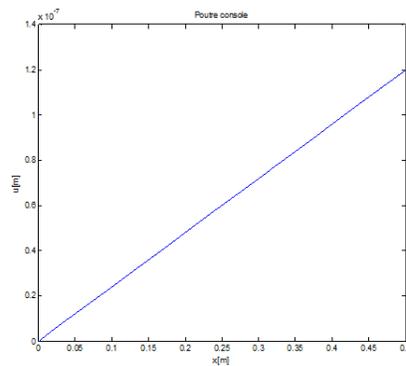
$$\varepsilon = \begin{bmatrix} 13.06 & 0 & 0 \\ 0 & 13.06 & 0 \\ 0 & 0 & 11.51 \end{bmatrix}$$



**Fig. 7.** The deflection  $w$  of the console beam in actuator mode.



**Fig. 8.** The rotation  $\theta$  of a console beam in actuator mode.



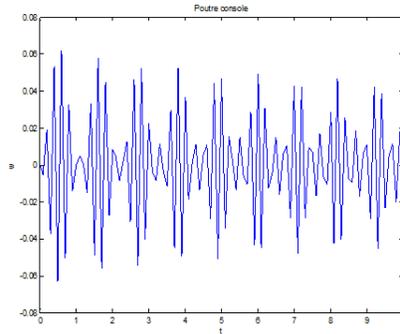
**Fig. 9.** The axial displacement  $u$  of a console beam in actuator mode.

The first important finding, we can notice by comparing the results of the elastic and piezoelectric case is that in the later case, the axial displacement  $u$  is non-zero, but in

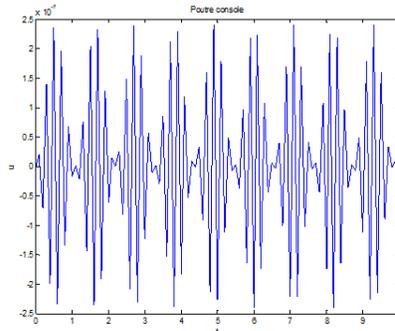
linear variation, which results of the application of an electric potential difference between the upper and lower surfaces of the beam.

Turning now to the results of the dynamic problem (ie the forced vibration) without taking into account the structural damping of the beam. The external excitation is harmonic  $F = F.cos(100.t)$ .

The graph (Figure 10) and (Figure 11) give the vertical and the axial vibrations of the piezoelectric beam.

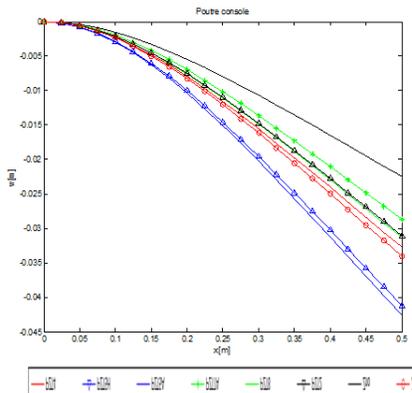


**Fig. 10.** The vertical vibrations of the piezoelectric beam.

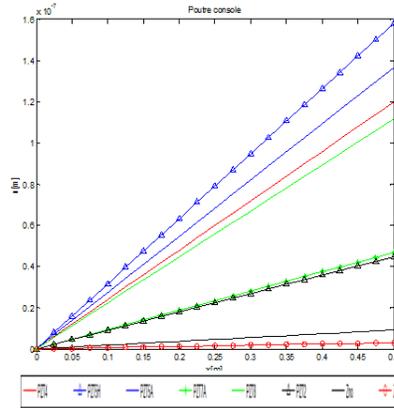


**Fig. 11.** The axial vibrations of the piezoelectric beam.

In order to show the importance of choosing the piezoelectric material on the behavior of the beam, we propose to study the same beam considered in actuator mode, but for different materials : PZT2, PZT-4, PZT-5A, PZT-5H, PZT-7A, PZT8, ZnO and ZnS.



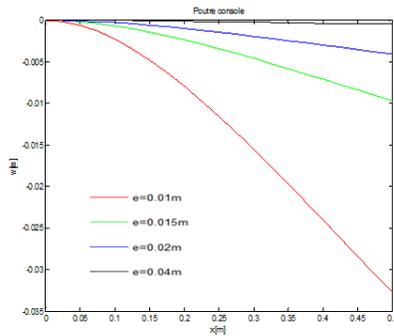
**Fig. 12.** Comparison of the beam deflection in actuator mode for different materials.



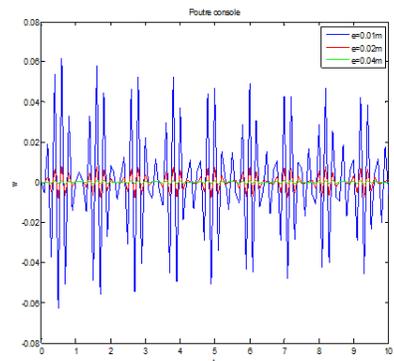
**Fig. 13.** Comparison of the axial displacements of the beam in actuator for different materials.

The graphs (12) and (13) show that the shape of the deflection  $w$  and the slope of the axial displacements  $u$  differ from piezoelectric material to another, mainly because the mechanical and electrical characteristics are different. Hence we can conclude that each piezoelectric material is intended for a certain class of applications. For example, if the application requires a large deflection and axial movement PZT-5A and PZT-5H are used instead of using a PZT-2, and so on ...

In this section we try to see the influence of the beam's thickness on the static and dynamic behavior of the piezoelectric beam, that's why we consider the same beam, but for different thicknesses.



**Fig. 14.** Influence of the thickness on the deflection of the piezoelectric beam.



**Fig. 15.** Influence of the thickness on the vertical vibrations of the beam.

It is clear that the choice of the dimensions of the beam is also important because of their impact on the static and dynamic behavior of the beam. For example, if we consider the influence of the thickness, we can simply find that increasing the thickness leads to reduce the deflection in the static case and to reduce the amplitude of the vertical vibrations of the beam in the dynamic case.

### **3. Conclusions**

Throughout this work, we study the impact of the application of piezoelectric effect on the behavior of beams and modeling of these beams on the one hand. And on the other hand, we have numerically simulated the behavior of these beams in both elastic and piezoelectric case. A finite element formulation is presented for piezoelectric beams in actuator mode.

### **REFERENCES**

- [1] M.H.H. Shen, 1995, A new modeling technique for piezoelectrically actuated beams, *Computers and Structures* 57 (3).
- [2] Donthireddy, K. Chandrashekhara, 1996, Modeling and shape control of composite beams with embedded piezoelectric actuators, *Composite structures* 35.
- [3] D. T. Detwiler, M. H. H. Shen, V. B. Venkayya, 1995, Finite element analysis of laminated composite structures containing distributed piezoelectric actuators and sensors, *Finite Elements in Analysis and Design* 20.
- [4] I. Legrain, B. Petitjean, 1997, Evaluation de céramiques électrostrictives en vue d'une utilisation en tant qu'actionneurs dans le domaine du contrôle actif des vibrations, *Rapport ONERA N°9776*.
- [5] B. Sun, D. Huang, 2001, Vibration suppression of laminated composite beams with a piezoelectric damping layer, *Composite Structures* 53 437-447.
- [6] Masayuki Ishihara, Naotake Noda, May–June 2005 , Control of thermal stress intensity factor in a piezo-thermo-elastic semi-infinite body with an edge crack, *European Journal of Mechanics A/Solids*, Volume 24, Issue 3, Pages 417-426.
- [7] Liang Wang, Rui-xiang Bai , Haoran Chen, January 2013 , Analytical modeling of the interface crack between a piezoelectric actuator and an elastic substrate considering shear effects, *International Journal of Mechanical Sciences*, Volume 66, Pages 141-148.
- [8] Ali Mahieddine, Joël Pouget, Mohammed Ouali, Modeling and analysis of delaminated beams with integrated piezoelectric actuators, *Comptes Rendus Mécanique*, Volume 338, Issue 5, May 2010, Pages 283-289.