Élément maximal d'une correspondance et ses applications en théorie des jeux

Karima FAHEM

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes (LAMOS)
Université de Béjaïa, Béjaïa 06000, Algérie
Tél. (213) 34 21 51 88

Résumé Nous présentons le concept d'élément maximal d'une relation de préférence et sa relation avec l'élément maximal d'une correspondance. Les conditions d'existence seront abordées avec différentes approches. Comme application, nous étudions l'existence des équilibres Slater Nash et Idéal de Nash pour un jeu multicritère en utilisant l'élément maximal d'une famille de correspondances.

Mots clés : Correspondance, élément maximal, équilibre de Nash, jeux multicritères.

3.1 Introduction

Le progrès de la théorie des jeux et de l'équilibre économique va de paire avec celui de l'analyse non linéaire, chacun interagissant sur l'autre, les développements mathématiques trouvant des applications dans les sciences économiques, celle-ci motivant de nouvelles recherches, jetant de nouveaux défis aux mathématiciens.

Bien que le problème d'équilibre économique a été posé en 1874 par Léon Walras, il a fallu attendre la naissance de l'analyse non linéaire en 1910 avec le théorème de point fixe de Brouwer qui a permis à John Von Neumann dans les années vingt et trente de construire les fondations mathématiques de la théorie des jeux pour qu'ensuite suivent les travaux de Nash, Debreux Aumann, Shapley,...etc dans les années 50 pour démontrer l'existence des équilibres économiques.

En 1961, Ky Fan démontra un lemme qui donna naissance à un autre concept d'analyse non linéaire appelé élément maximal pour une correspondance. Développé et appliqué par Sonneschein (1971), Shafer (1974),...pour établir l'existence d'un équilibre dans un jeu généralisé.

3.2 Notations et définitions

On suppose qu'une relation de préférence qu'elle soit faible ou stricte est définie sur un espace topologique Z .

On dénote par $\succ$ une relation de préférence stricte.

et par

- $U_s(x) = \{y \in Z : y \succ x\}$ section supérieure stricte de x ,
- $L_s(x) = \{y \in Z : x \succ y\}$ section inférieure stricte de x .

Définition 3.1 Une relation binaire stricte $\succ$ admet un **élément maximal** sur B s'il existe un élément $x^* \in B$ tel que

$$\nexists x \in B : x \succ x^* \quad \text{ce qui est équivalent à } B \cap U_s(x^*) = \emptyset.$$

Une relation binaire U (stricte ou faible) peut être représenté par une correspondance (une fonction multivoque) $U : Z \longrightarrow Z$ de la manière suivante $\forall x \in Z \quad U(x) = \{y \in Z : y \succeq x \text{ (ou } y \succ x)\} \subset Z$.

$$\begin{aligned} U(x) &= \{y \in Z : y \succeq x \text{ (ou } y \succ x)\} \text{ section supérieure de } x, \\ U^{-1}(x) &= \{y \in Z : x \in U(y)\} = \{y \in Z : x \succeq y \text{ (ou } x \succ y)\}, \text{ section inférieure de } x \\ Gr(U) &= \{(x, y) \in Z \times Z : y \in U(x)\} \text{ le graphe de } U. \end{aligned}$$

Définition 3.2 Une correspondance $C : Z \longrightarrow 2^Z$ admet un **élément maximal** s'il existe $x^* \in Z$ tel que $C(x^*) = \emptyset$.

3.3 Théorèmes d'existence

Soit $U : K \longrightarrow 2^K$ une correspondance représentant une relation de préférence.

Théorème 3.1 (Fan (1961)) Supposons que K est un sous ensemble compact et convexe de $\mathbb{R}^m$ et C vérifie les conditions suivantes :

1. pour tout $x \in K$, $x \notin U(x)$,
2. pour tout $x \in K$, $U(x)$ est convexe,
3. le graphe de U est ouvert dans $K \times K$.

Alors l'ensemble des éléments maximaux est non vide et compact.

3.4 Élément maximal pour une famille de correspondances

Soit I un ensemble d'indices, pour tout $i \in I$ soit $U_i : Z \longrightarrow 2^{Z_i}$

Définition 3.3 $x^* \in Z$ est un **élément maximal** pour la famille $\{U_i\}_{i \in I}$ si

$$U_i(x^*) = \emptyset, \quad \forall i \in I.$$

Théorème 3.2 [Deguire et al (1999)] Soient $\{X_i\}_{i \in I}$ une famille de sous-ensembles non vides, convexes où tout X_i est dans un espace vectoriel topologique de Hausdorff E_i et I un ensemble quelconque d'indices. Soit $X = \prod_{i \in I} X_i$ et pour tout $i \in I$, soit $A_i : X \longrightarrow 2^{X_i}$, une correspondance telle que

- a) A_i est à valeurs convexes ;
- b) $y_i \notin A_i(y)$, pour tout $y \in X$;
- c) $A_i^{-1}(y_i) = \{x \in X : y_i \in A_i(x)\}$ est ouvert dans X , pour tout $y_i \in X_i$.
- d) $\bigcup_{i \in I} \{x \in X : A_i(x) \neq \phi\} = \bigcup_{i \in I} \text{int}\{x \in X : A_i(x) \neq \phi\}$.
- e) Supposons qu'il existe un sous-ensemble non vide compact K de X et des sous-ensembles non vides convexes et compacts C_i de X_i pour tout $i \in I$, tels que, pour tout $x \in X \setminus K$, il existe $i \in I$ tel que $A_i(x) \cap C_i \neq \phi$.

Alors il existe $x \in K$ tel que $A_i(x) = \phi$ pour tout $i \in I$.

3.5 Application en théorie des jeux

Considérons le jeu multicitère sous sa forme normale

$$G = (I, X_i, f_i) \tag{3.1}$$

où $I = \{1, \dots, n\}$ est l'ensemble des joueurs, et pour tout joueur $i \in I$, X_i est l'ensemble de ses stratégies pures, $f_i = (f_{i1}, f_{i2}, \dots, f_{ir(i)}) : X \rightarrow \mathbb{R}^{r(i)}$ sa fonction multicritère avec $r(i)$ critères et $r(i) \in \mathbb{N}$.

Définition 3.4 (Shapley (1959)) une issue $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \in X$ est dite :

- **Équilibre Slater-Nash** pour le jeu (3.1), si pour tout joueur $i \in I$, il n'existe pas $x_i \in X_i$ tel que :

$$f_i(x_i, x_{-i}^*) > f_i(x_i^*, x_{-i}^*) \tag{3.2}$$

- **Équilibre Pareto-Nash** pour le jeu (3.1), si pour tout joueur $i \in I$, il n'existe pas $x_i \in X_i$ tel que :

$$f_i(x_i, x_{-i}^*) \geq f_i(x_i^*, x_{-i}^*). \tag{3.3}$$

Définition 3.5 (Voorneveld 2000) On dit que $x \in X$ est un **équilibre idéal de Nash** pour le jeu (3.1), si pour tout joueur $i \in I$ et tout $y_i \in X_i$,

$$f_i(x) = f_i(x_i, x_{-i}) \geq f_i(y_i, x_{-i}).$$

A l'instar du point fixe, on utilise l'élément maximal en théorie des jeux pour démontrer l'existence d'équilibres. On détermine une correspondance ou une famille de correspondances pour laquelle l'élément maximal est l'équilibre étudié. On verra dans ce qui suit deux exemples, il s'agit de l'équilibre Slater Nash et l'équilibre idéal.

3.5.1 Existence d'un équilibre Slater Nash

Pour tout $i \in I$, soit la correspondance $A_i : X \rightarrow 2^{X_i}$, par

$$A_i(x) = \{y_i \in X_i : f_i(x) < f_i(y_i, x_{-i})\}, \tag{3.4}$$

Proposition 1. *Une issue $x^* \in X$ est un équilibre Pareto faible de Nash du jeu multicritère (3.1) si et seulement si $x^* \in X$ est un élément maximal de la famille de correspondances définies par (3.4).*

En utilisant un théorème 3.2, Ansari et al [1] ont établi des conditions suffisantes de son existence.

3.5.2 Existence d'un équilibre idéal de Nash

Définition 3.6 (Voorneveld (2000)) *Une collection $\Lambda \subset \prod_{i \in I} \Delta_{r(i)}$ de vecteurs poids est dite représentative du jeu (3.1), si pour toute organisation $i \in I$ et chacun de ses membres $k \in \{1, 2, \dots, r(i)\}$, il existe un vecteur poids qui attribue le poids unité à ce membre de l'organisation, autrement dit :*

$$\forall i \in I, \forall k \in \{1, 2, \dots, r(i)\}, \exists \lambda = (\lambda_j)_{j \in I} \in \Lambda, \text{ avec } \lambda_i = e_k \in \Delta_{r(i)}.$$

Soit Λ une collection représentative pour le jeu (3.1), alors d'après Voorneveld [3], on a $x \in X$ est un équilibre idéal de Nash si et seulement si pour tout $\lambda \in \Lambda$ et $i \in I$ on a $\langle \lambda_i, f_i(x) \rangle - \langle \lambda_i, f_i(y_i, x_{-i}) \rangle \geq 0 \quad \forall y_i \in X_i$. Soit pour tout $i \in I$, la correspondance $A_i : X \rightarrow 2^{X_i}$, définie par

$$A_i(x) = \{y_i \in X_i : \exists \lambda \in \Lambda \text{ tel que } \langle \lambda_i, f_i(x) \rangle - \langle \lambda_i, f_i(y_i, x_{-i}) \rangle < 0\}. \quad (3.5)$$

Proposition 2. *Une décision $x^* \in X$ est un équilibre idéal de Nash du jeu multicritère (3.1) si et seulement si $x^* \in X$ est un élément maximal de la famille de correspondances définies par (3.5).*

En utilisant le théorème 3.2, Radjef et Fahem [2] ont établi des conditions suffisantes d'existence de cet équilibre.

Références

1. Ansari Q. H and Schaible S and Yao J. C, *The System of Generalized Vector Equilibrium Problems with Applications*, Journal of Global Optimization 22 (2002) 3-16.
2. Radjef M.S and Fahem K, *A note on ideal Nash equilibrium in multicriteria games*. Appl. Math. Lett. 2, 1105-1111 (2008).
3. Voorneveld M and Grahn S and Dufwenberg M, *Ideal Equilibria in Non cooperative Multicriteria Games*, Mathematical Methods of Operations Research 52, 65-77 (2000).