Séminaire Mathématique de Béjaïa (LaMOS)
Volume 3, 2005, pp. 65 - 71

10

Sur l'Efficacité Relative Asymptotique de Pitman des Tests non Paramétriques de Fiabilité

M. BOURAINE[1]

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes LAMOS
Université de Béjaïa 06000, Algerie.
email : m_bouraineyahoo.fr

Résumé Si on a à comparer deux tests (test I et test II) de même niveau de signification. Si le test II a une courbe de la fonction puissance supérieure à celle du test I pour les paramètres de l'alternative alors on préfère le test II.
Cependant, en statistique non paramétrique nous n'avons pas la possibilité de générer des fonctions puissance de façon à avoir des tests uniformément plus puissants.
Pour cela on utilise les fonctions puissance de deux tests pour décrire les propriétés relatives de ces tests, ce qui n'est pas toujours possible pour la plupart des tests non paramétriques de distribution libre. On a aussi recours à la méthode de Monte Carlo.
Une autre méthode consiste à comparer deux tests sur la base des propriétés de leurs distributions asymptotiques. Donc la dépendance de la taille des échantillons n'est pas un problème et les distributions limites sont souvent continues rendant la comparaison plus facile. Si les tests sont consistants, leurs fonctions puissance asymptotiques convergent vers 1 quelque soit l'alternative, ce qui rend la comparaison plus difficile.
Pitman(1948) a contourné ce problème en considérant les propriétés asymptotiques des suites d'alternatives (suites dans H_1) d'un test qui converge vers l'hypothèse nulle.
Cette méthode de comparaison ne dépend pas du niveau α du test. Elle dépend de la distribution considérée (alternative). Cette comparaison est locale car les suites sont choisies près de l'hypothèse nulle. L'objectif de ce travail est de présenter une analyse critique des méthodes de calcul de l'éfficacité relative asymptotique de Pitman.

Mots clés : Statistique non paramétrique, tests, propriétés asymptotiques, éfficacité relative asymptotique de pitman (ERAP).

10.1 Introduction

Si on a à comparer deux tests (test I et test II) de même niveau de signification. Si le test II a une courbe de la fonction puissance supérieure à celle du test I pour les paramètres de l'alternative alors on préfère le test II.
Cependant, en statistique non paramétrique nous n'avons pas la possibilité de générer des fonctions puissance de façon à avoir des tests uniformément plus puissants.
Pour cela on utilise les fonctions puissance de deux tests pour décrire les propriétés relatives de ces tests, ce qui n'est pas toujours possible pour la plupart des tests non paramétriques de distribution libre. On a aussi recours à la méthode de Monte Carlo.
Une autre méthode consiste à comparer deux tests sur la base des propriétés de leurs dis-

tributions asymptotiques. Donc la dépendance de la taille des échantillons n'est pas un problème et les distributions limites sont souvent continues rendant la comparaison plus facile. Si les tests sont consistants, leurs fonctions puissance asymptotiques convergent vers 1 quelque soit l'alternative, ce qui rend la comparaison plus difficile.
Pitman(1948) a contourné ce problème en considérant les propriétés asymptotiques des suites d'alternatives (suites dans H_1) d'un test qui converge vers l'hypothèse nulle.
Cette méthode de comparaison ne dépend pas du niveau α du test. Elle dépend de la distribution considérée (alternative). Cette comparaison est locale car les suites sont choisies près de l'hypothèse nulle.

10.2 Efficacité relative asymptotique de Pitman(ERAP)

On considère le test de la forme H_0 : "$\theta \in \omega$" contre H_1 : "$\theta \in \Omega - \omega$" où θ (inconnu) $\in \Omega$.
Soient $\{S_n\}$ et $\{T_{n'}\}$ deux suites de statistiques pour tester H_0 contre H_1 où n et $n^{'}$ sont les tailles des échantillons utilisés pour le test. Soit θ^* un élément de $\Omega - \omega$ et on pose C_n et $D_{n'}$ les régions critiques au niveau α, $0 < \alpha < 1$, pour S_n et $T_{n'}$ resp. on a

$$\mathbf{P}_\theta(S_n \in C_n) \leq \alpha, \quad \forall\theta \in \omega \text{ et } \forall \; n \tag{10.1}$$

et

$$\mathbf{P}_\theta(T_{n'} \in D_{n'}) \leq \alpha, \quad \forall\theta \in \omega \text{ et } \forall \; n^{'}. \tag{10.2}$$

Soit β, $\alpha < \beta < 1$, arbitraire mais fixé, soient N et $N^{'}$ les plus petites valeurs de n et $n^{'}$ resp., pour lesquelles

$$\mathbf{P}_{\theta^*}(S_N \in C_N) \geq \beta \text{ et } \mathbf{P}_{\theta^*}(T_N^{'} \in D_N^{'}) \geq \beta. \tag{10.3}$$

Donc N et $N^{'}$ sont resp. les tailles minimales des observations pour lesquelles le test au niveau α, basé sur S_n et $T_n^{'}$ atteind au moins la puissance β, contre l'alternative θ^*. Donc on a
$N = N(\alpha, \beta, \theta^*, \text{ distributions})$ et $N^{'} = N^{'}(\alpha, \beta, \theta^*, \text{ distributions})$.

Définition 10.1 *Soient $\{S_n\}, \{T_{n'}\}, \alpha, \beta$ et θ^* comme déjà définis. Alors l'efficacité relative d'un échantillon de taille finie de $\{S_n\}$ par rapport à $\{T_{n'}\}$ pour l'alternative θ^* est donnée par*

$$e(S,T|alpha, \beta, \theta^*, \; distributions) = \frac{N^{'}(\alpha, \beta, \theta^*, \; distributions)}{N(\alpha, \beta, \theta^*, \; distributions)} \tag{10.4}$$

Remarque 10.1 .
Si $e(S,T|\alpha,\beta,\theta^*,\ distributions) > 1$, *on dit que le test basé sur* S_n *est plus efficace que celui basé sur* $T_{n'}$.

Cette efficacité dépend de α,β,θ^* et des distributions, ce qui rend la comparaison difficile. Pour cela on procède à la comparaison asymptotique des deux tests. Alors, les alternatives pour lesquelles on compare les deux tests convergent vers le paramètre de l'hypothèse nulle, lorsque la taille de l'échantillon augmente.

Définition 10.2 *Soient* $\{S_{n_i}\}$ *et* $\{T_{n_i'}\}$ *deux suites de statistiques pour* H_0 : "$\theta=\theta_0$", θ_0 *fixé, contre l'alternative* H_1*, au niveau* α *et soit* $\{\theta_i\}$ *une suite d'alternatives telles que* $\lim_{i\to\infty}\theta_i=\theta_0$.
De plus, soient $\beta_{S_{n_i}}(\theta_i)$ *et* $\beta_{T_{n_i'}}(\theta_i)$ *les puissances des tests basés sur* S_{n_i} *et* $T_{n_i'}$ *resp. . pour l'alternative* θ_i*. Soient* $\{n_i\}$ *et* $\{n_i'\}$ *deux suites croissantes d'entiers positifs telle que les deux suites de tests ont le même niveau de signification limite* α *et*

$$\lim_{i\to\infty}\beta_{S_{n_i}}(\theta_i)=\lim_{i\to\infty}\beta_{T_{n_i'}}(\theta_i)<1 \tag{10.5}$$

alors l'efficacité relative asymptotique de Pitman(ERAP) de $\{S_{n_i}\}$ *relativement à* $\{T_{n_i'}\}$*(ou* S *relativement à* T*) est*

$$ERAP(S,T)=\lim_{i\to\infty}\frac{n_i'}{n_i}, \tag{10.6}$$

cette limite est la même quelque soit $\{n_i\}$ *et* $\{n_i'\}$ *et indépendamment de* θ_i.

n_i et n_i' sont les nombres d'observations utilisés par les tests S et T. L'$ERAP(S,T)$ est le rapport limite pour atteindre la même puissance lorsque les alternatives convergent vers H_0, quand les niveaux de signification limites des deux tests sont égaux.
Notons que si $ERAP(S,T)=1.2$ par exemple, et si n est le nombre d'observations nécessaires au test S pour atteindre une certaine puissance, alors il faut approximativement $n'=1.2n$ observations au test T pour atteindre la même puissance.

10.3 Méthode d'évaluation de l'ERAP - Théorème de Noether

Soient $\{S_{n_i}\}$ et $\{T_{n_i'}\}$ deux suites pour tester H_0 : "$\theta=\theta_0$" contre une classe d'alternatives H_1. On suppose que le test rejette H_0 pour les grandes valeurs de la statistique.
Pour un θ quelconque, on considère $\{\mu_{S_{n_i}}(\theta)\},\{\mu_{T_{n_i'}}(\theta)\},\{\sigma^2_{S_{n_i}}(\theta)\}$ et $\{\sigma^2_{T_{n_i'}}(\theta)\}$ [1] des suites

1. En général elles représentent les moyennes et les variances de $\{S_{n_i}\}$ et $\{T_{n_i'}\}$

de nombres associé à $\{S_{n_i}\}$ et $\{T_{n_i'}\}$.
Soient θ_i, $\{n_i\}$ et $\{n_i'\}$ déjà définis. On suppose que les quatre quantités suivantes ont la même distribution limite $H(w)$. En général $H(w)$ est la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, $\phi(w)$, continue, quand le paramètre est θ_i,

$$\frac{S_{n_i} - \mu_{S_{n_i}}(\theta_i)}{\sigma_{S_{n_i}}(\theta_i)} \quad \text{et} \quad \frac{T_{n_i'} - \mu_{T_{n_i'}}(\theta_i)}{\sigma_{T_{n_i'}}(\theta_i)}$$

et quand le paramètre est θ_0,

$$\frac{S_{n_i} - \mu_{S_{n_i}}(\theta_0)}{\sigma_{S_{n_i}}(\theta_0)} \quad \text{et} \quad \frac{T_{n_i'} - \mu_{T_{n_i'}}(\theta_0)}{\sigma_{T_{n_i'}}(\theta_0)} \tag{10.7}$$

Soit α, $0 < \alpha < 1$, fixé et soient $\{c_{n_i}\}$ et $\{d_{n_i'}\}$ deux suites de valeurs critiques telle que

$$\lim_{i\to\infty} \mathbf{P}_{\theta_0}(S_{n_i}) \geq c_{n_i} = \lim_{i\to\infty} \mathbf{P}_{\theta_0}(T_{n_i'} \geq d_{n_i'}) = \alpha. \tag{10.8}$$

Donc les deux test ont le même niveau limite α.
Si $\beta_{S_{n_i}}(\theta_i)$ et $\beta_{T_{n_i'}}(\theta_i)$ sont les fonctions puissances de S_{n_i} et $T_{n_i'}$, on aura

$$\beta_{S_{n_i}} = \mathbf{P}_{\theta_i}\left(\frac{S_{n_i} - \mu_{S_{n_i}}(\theta_i)}{\sigma_{S_{n_i}}(\theta_i)} \geq \frac{c_{n_i} - \mu_{S_{n_i}}(\theta_i)}{\sigma_{S_{n_i}}(\theta_i)}\right) \tag{10.9}$$

et

$$\beta_{T_{n_i'}} = \mathbf{P}_{\theta_i}\left(\frac{T_{n_i'} - \mu_{T_{n_i'}}(\theta_i)}{\sigma_{T_{n_i'}}(\theta_i)} \geq \frac{d_{n_i'} - \mu_{T_{n_i'}}(\theta_i)}{\sigma_{T_{n_i'}}(\theta_i)}\right) \tag{10.10}$$

Pour que les deux tests aient la même puissance limite sous $\{\theta_i\}$

$$\lim_{i\to\infty} \beta_{S_{n_i}}(\theta_i) = \lim_{i\to\infty} \beta_{T_{n_i'}}(\theta_i) \tag{10.11}$$

On doit avoir

$$\lim_{i\to\infty}\left(\frac{c_{n_i} - \mu_{S_{n_i}}(\theta_i)}{\sigma_{S_{n_i}}(\theta_i)}\right) = \lim_{i\to\infty}\left(\frac{d_{n_i'} - \mu_{T_{n_i'}}(\theta_i)}{\sigma_{T_{n_i'}}(\theta_i)}\right) \tag{10.12}$$

Pour que les tests aient le même niveau limite, on doit avoir

$$\alpha = \lim_{i\to\infty} \mathbf{P}_{\theta_0}\left(\frac{S_{n_i} - \mu_{S_{n_i}}(\theta_0)}{\sigma_{S_{n_i}}(\theta_0)} \geq \frac{c_{n_i} - \mu_{S_{n_i}}(\theta_0)}{\sigma_{S_{n_i}}(\theta_0)}\right) = \lim_{i\to\infty} \mathbf{P}_{\theta_0}\left(\frac{T_{n_i'} - \mu_{T_{n_i'}}(\theta_0)}{\sigma_{T_{n_i'}}(\theta_0)} \geq \frac{d_{n_i'} - \mu_{T_{n_i'}}(\theta_0)}{\sigma_{T_{n_i'}}(\theta_0)}\right). \tag{10.13}$$

où $H(h_\alpha) = 1 - \alpha$.

Le théorème suivant est dû à Noether(1955) qui donne la méthode de calcul de l'ERAP(sous certaines conditions).

Théorème 10.1 *Soient $\{S_{n_i}\}$ et $\{T_{n_i'}\}$ deux suites de tests auxquelles on associe $\{\mu_{S_{n_i}}(\theta)\}$, $\{\mu_{T_{n_i'}}(\theta)\}, \{\sigma^2_{S_{n_i}}(\theta)\}$, $\{\sigma^2_{T_{n_i'}}(\theta)\}$, et vérifiant les hypothèses suivantes*

A1. $\frac{S_{n_i}-\mu_{S_{n_i}}(\theta_i)}{\sigma_{S_{n_i}}(\theta_i}$ *et* $\frac{T_{n_i'}-\mu_{T_{n_i'}}(\theta_i)}{\sigma_{T_{n_i'}}(\theta_i)}$ *ont la même distribution limite $H(w)$, continue avec θ_i valeur de θ.*

A2. Même hypothèse que A1. avec $\theta_i = \theta_0$.

A3. $\lim_{i\to\infty} \frac{\sigma_{S_{n_i}}(\theta_i)}{\sigma_{S_{n_i}}(\theta_0)} = \lim_{i\to\infty} \frac{\sigma_{T_{n_i'}}(\theta_i)}{\sigma_{T_{n_i'}}(\theta_0)} = 1.$

A4. $\frac{d}{d\theta}[\mu_{S_{n_i}}(\theta)] = \mu'_{S_{n_i}}(\theta)$ *et* $\frac{d}{d\theta}[\mu_{T_{n_i'}}(\theta)] = \mu'_{T_{n_i'}}(\theta)$, *sont supposées existantes et continues sur un intervalle fermé autour de $\theta = \theta_0$ avec $\mu'_{S_{n_i}}(\theta_0)$ et $\mu'_{T_{n_i'}}(\theta_0) \neq 0$.*

A5. $\lim_{i\to\infty} \frac{\mu' S_{n_i}(\theta_i)}{\mu' S_{n_i}(\theta_0)} = \lim_{i\to\infty} \frac{\mu' T_{n_i'}(\theta_i)}{\mu' T_{n_i'}(\theta_0)} = 1.$

A6. $\lim_{i\to\infty} \frac{\mu' S_n(\theta_0)}{\sqrt{n\sigma^2_{S_n}(\theta_0)}} = K_S$ *et* $\lim_{i\to\infty} \frac{\mu' T_{n'}(\theta_0)}{\sqrt{n\sigma^2_{T'_n}(\theta_0)}} = K_T$, *où K_S et K_T sont des constantes positives.*

Alors,

$$ERAP(S,T) = \frac{K_S^2}{K_T^2}. \tag{10.14}$$

Définition 10.3 *La quantité*

$$K_S = \lim_{i\to\infty} \frac{\mu' S_n(\theta_0)}{\sqrt{n\sigma^2_{S_n}(\theta_0)}}$$

est appelée efficacité du test basé sur S_n et notée $eff(S)$.

Remarque 10.2 *Donc*

$$ERAP(S,T) = [\frac{eff(S)}{eff(T)}]^2 \tag{10.15}$$

Remarque 10.3 *.*

1. *Dans l'expression de $eff(S)$, la quantité $\mu'_{S_n}(\theta_0)$ mesure le taux de changement dans $\mu_{S_n}(\theta)$ pour les valeurs de θ proches de θ_0.*
2. *On a $\lim_{i\to\infty} \theta_i = \theta_0$. Le taux de convergence de θ_i vers θ_0 est donné implicitement dans A1.-A6. . De la preuve du théorème 10.1(de Noether)(cf. Randles et Wolfe(1979)) on déduit*
$$\lim_{i\to\infty}[n_i^{\frac{1}{2}}(\theta_i - \theta_0)] = \frac{h_\alpha - h_\beta}{K_S}, \tag{10.16}$$
où h_α est le 100α quantile de la distribution limite $H(w)$.
Enfin, on obtient

$$\theta_i = \theta_0 + \frac{C_S}{\sqrt{n_i}} + g_S(n_i), \tag{10.17}$$

avec C_s *une constante et* $g_S(n_i)$ *une fonction de* n_i *vérifiant* $\lim_{i\to\infty} n_i^{\frac{1}{2}} g_S(n_i) = 0$*. Ces alternatives sont appelées les alternatives de translation de Pitman.*

10.4 Application

Considérons le test (développé par Bengt Klefsjö (1983)) :
H_0 " F est exponentiel "
contre
H_1 " F est HNBUE (HNWUE) mais pas exponentiel"
Ce test est basé sur la statistique

$$\mathbf{Q_1 = \sum_{j=1}^{n} J_1(j/n)t(j)/S_n} \tag{10.18}$$

où
$0 = t(0) \le t(1) \le t(2) \le \dots t(n)$ sont les statistiques d'ordre de l'échantillon $t_1, t_2, \dots, t_n$
n est la taille de l'échantillon $J_1(u) = -1/\nu + \nu(1-u)^{\nu-1}$ pour $\nu = 2, 3, \dots$
$S_n = \sum_{j=1}^{n}(n-j+1)(t(j)-t(j-1))$
On essaye de choisir ν de façons à avoir une efficacité relative aussi meilleure que possible. Dans notre cas

$$E_F(Q_1) = \{\mu^{'}(j_1, F)_{\theta=\theta_0}\}^2/\sigma^2(j_1, F)_{\theta=\theta_0}\}^2 \tag{10.19}$$

où θ_0 correspond à la distribution exponentielle. On calcule $E_F(Q_1)$ pour les distributions :

- Linear failure rate : $F_1(x) = 1 - exp(-(x + \frac{1}{2}\theta x^2))$, pour $\theta \ge 0$, $x \ge 0$,
- Makeham : $F_2(x) = 1 - exp(-(x + \theta(x + e^{-x} - 1)))$, pour $\theta \ge 0$, $x \ge 0$,
- Pareto : $F_3(x) = 1 - (1 + \theta x)^{-1/\theta}$, pour $\theta \ge 0$, $x \ge 0$,
- Weibull : $F_4(x) = 1 - exp(-x^\theta)$, pour $\theta > 0$, $x \ge 0$,
- Gamma $F_5(x) = \frac{1}{\Gamma(\theta)} \int_0^x t^{\theta-1} e^{-t} dt$, pour $\theta > 0$, $x \ge 0$,

Pour F_1, F_2 et F_3 on a H_0 si $\theta = \theta_0 = 0$ et pour F_4 et F_5 si $\theta = \theta_0 = 1$. Les calculs donnent :
$E_{F_1}(Q_1) = (2\nu-1)/\nu^2$, $E_{F_2}(Q_1) = (2\nu-1)/(4(\nu+1)^2)$, $E_{F_3}(Q_1) = (2\nu-1)/\nu^2$,
$E_{F_4}(Q_1) = (ln\ \nu)^2(2\nu-1)/(\nu-1)^2$, $E_{F_5}(Q_1) = (\nu\ ln\ \nu - \nu + 1)^2(2\nu - 1/(\nu-1)^4$

On remarque que : $E_{F_1}(= E_{F_3})$ et E_{F_2} sont décroissante, E_{F_4} a un maximum entre $\nu = 3$ et $\nu = 4$ et E_{F_5} a un maximum entre $\nu = 6$ et $\nu = 7$.
Le tableau suivant donne l'efficacité relative asymptotique pour quelques valeurs de ν.

ν	$E_{F_1} = E_{F_3}$	E_{F_2}	E_{F_4}	E_{F_5}
2	0.750	0.083	1.441	0.448
3	0.556	0.078	1.509	0.524
4	0.438	0.070	1.495	0.556
5	0.360	0.063	1.457	0.576
6	0.306	0.056	1.413	0.582
7	0.266	0.051	1.367	0.583
8	0.234	0.046	1.324	0.580

Du tableau on constate que la valeur optimal de ν depend de la distribution F de H_1. $\nu = 3$ paraît un bon compromis.

La statistique

$$\mathbf{Q_2} = \sum_{\mathbf{j=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{J_2(j/n)t(j)/S_n} \tag{10.20}$$

permet aussi de tester H_0 contre H_1 où $J_2(u) = \sum_{j=1}^{\nu} \frac{1}{j} - \nu\ u^{\nu-1}$ Le tableau ci-dessous donne l'efficacité asymptotique de Q_2 pour les mêmes distributions $F_1, \ldots, F_5$.

ν	$E_{F_1} = E_{F_3}$	E_{F_2}	E_{F_4}	E_{F_5}
2	0.750	0.083	1.441	0.448
3	0.822	0.082	1.339	0.390
4	0.867	0.079	1.256	0.349
5	0.896	0.077	1.187	0.319
6	0.916	0.074	1.130	0.296
7	0.930	0.071	1.081	0.277
8	0.940	0.069	1.039	0.261

Des tables 1 et 2, on remarque que le test basé sur Q_2 a une meilleure efficacité asymptotique que le test basé sur Q_1 dans le cas des alternatives Linear failure rate et Pareto. On remarque le contraire dans le cas des alternatives Weibull ou Gamma. Donc un test Q_3 basé sur $J_3(u) = J_1(u) + aJ_2(u),\ a > 0$ (combinaison linéaire de j_1 et J_2 est recommandé).