

La Condition Nécessaire et Suffisante d'Ergodicité des Systèmes d'Attente

L. BOUKIR

No Institute Given

Résumé Dans cet article, nous développons les démonstrations de la relation entre la distribution stationnaire d'un processus semi-Markovien et celle de la chaîne de Markov. Nous donnons la propriété PASTA (processus arrivals See Time Arevage) qui permet de donner l'égalité entre la distribution stationnaire du processus et celle de la chaîne de Markov Induite.

Mots clés : Systèmes d'attente semi Markovien système $M/G/1$, chaîne de Markov induite, propriété PAST.

6.1 Introduction

L'étude des systèmes d'attente semi-Markovien se fait en général, en utilisant la C.M.I, ie : choisir des instants particuliers de façon à obtenir une chaîne Markovienne.

Les étapes qu'il faut suivre en général pour étudier cette chaîne sont :

- Décrire le système avec les instants de discrétisation.
- Montrer que la chaîne est Markovienne.
- Donner la condition d'ergodicité de la chaîne.
- Donner la relation entre la distribution stationnaire du processus obtenue à un instant quelconque et celle de la C.M.I.

6.2 Condition nécessaire et suffisante d'ergodicité

Théorème 6.1 [*Foster 1953*] Une chaîne irréductible, apériodique est ergodique s'il existe une solution non négative pour le système :

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}x_j \leq x_i - 1 \quad (6.1)$$

et

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{0j}x_j \leq \infty \quad (6.2)$$

Théorème 6.2 *Un système aperiodique irréductible est ergodique si et seulement si, il existe une solution non nulle pour le système :*

$$\sum_{j=0}^{\infty} x_j p_{ji} = x_i \quad (6.3)$$

et

$$\sum_{j=0}^{\infty} |x_j| < \infty \quad (6.4)$$

6.3 Application pour la file $M/G/1$

Le système $M/G/1$ peut être décrit de la manière suivante : Le processus des arrivées est Poissonien, la loi de service est quelconque et les clients sont servis selon la discipline (FIFO).

Pour étudier cette file d'attente, le plus simple est de se ramener à une C.M.I.

Soit $A(t)$: le nombre d'arrivées dans la file d'attente dans l'intervalle $[0, t]$.

et Y_t : le nombre de clients dans le système au temps t .

Soit : $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ les temps de service des clients $1, 2, \dots, n, \dots$

Nous supposons que le processus $A(t), t \geq 0$ est un processus de Poisson de paramètre λ .

Les temps de service S_n sont indépendants les uns des autres et du processus des arrivées, ils sont équidistribués suivant la distribution de probabilité $G(s)$ de moyenne $\frac{1}{\mu}$.

Nous désirons trouver la condition de stabilité de cette file ainsi que la distribution du nombre de clients qui s'y trouve à l'état d'équilibre.

Soit X_n le nombre de clients dans le système juste après le n -ième départ.

Théorème 6.3 *Le processus $(X_n)_{n \geq 1}$ est une chaîne de Markov de matrice de transition*

$$P = \begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & \dots \\ \hline 0 & p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \dots \\ 1 & p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \dots \\ 2 & 0 & p_0 & p_1 & p_2 & \dots \\ 3 & 0 & 0 & p_0 & p_1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{array}$$

$$p_k = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda s} (\lambda s)^k}{k!} dG(s), \quad k = 0, 1, \dots$$

Théorème 6.4 *La chaîne X_n est récurrente positive si et seulement si*

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$$

Démonstration. Pour obtenir le résultat recherché, nous appliquons le théorème (6.1) de Foster : On pose comme solution recherchée : $x_j = \frac{j}{1-\rho}$, $j \geq 0$. De la matrice de transition P :

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} x_j &= \sum_{j=i-1}^{\infty} p_{j-i+1} \left(\frac{j}{1-\rho} \right), \\ &= \frac{p_0(i-1)}{1-\rho} + \frac{p_1 i}{1-\rho} + \frac{p_2(i+1)}{1-\rho} + \dots \\ &= \frac{p_0(i-1)}{1-\rho} + \frac{p_1(i-1)}{1-\rho} + \frac{p_2(i-1)}{1-\rho} + \dots \\ &\quad + \frac{p_1}{1-\rho} + \frac{2p_2}{1-\rho} + \dots \\ &= (i-1) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{p_j}{1-\rho} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j p_j}{1-\rho} \\ &= \frac{(i-1)}{1-\rho} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j p_j}{1-\rho} \end{aligned}$$

on a $\sum_{j=1}^{\infty} j p_j = \rho$ d'où :

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} x_j &= \frac{i-1+\rho}{1-\rho} \\ &= \frac{i}{1-\rho} - \frac{1-\rho}{1-\rho} \\ &= \frac{i}{1-\rho} - 1 = x_i - 1 \end{aligned}$$

(puisque $x_i \geq 0$ alors $(1-\rho) > 0$ d'où $\rho < 1$)

et

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} p_{0j} x_j &= \sum_{j=0}^{\infty} p_j x_j \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} p_j \frac{j}{1-\rho} \\ &= \frac{\rho}{1-\rho} < \infty. \end{aligned}$$

D'où, il s'en suit que la chaîne est ergodique si $\rho < 1$.

Théorème 6.5 *Pour la chaîne irréductible et apériodique, les probabilités limites :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{X_n = j\} = \pi_j \quad (\forall j)$$

existent toujours et elles sont indépendantes de la distribution à l'état initial.

- *Si les états sont tous transitoires ou récurrents nuls, alors $\pi_j = 0$ pour tout j , et existe une distribution non stationnaire.*
- *Cependant, si tous les états sont récurrents positifs (ie : ergodique), alors $\pi_j > 0$, pour tout j et $\{\pi_j\}$ est une distribution stationnaire unique et coïncide avec la probabilité limite solution de :*

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i p_{ij} \quad (\forall j \in E)$$

et

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1.$$

Pour l'obtention de la condition Nécessaire :

puisque le régime stationnaire existe (d'après le théorème 6.5), alors on a :

$$\pi P = \pi \tag{6.5}$$

$$\pi_i = \pi_0 p_1 + \sum_{j=1}^{i+1} \pi_j p_{i-j+1}, \quad (i = 0, 1, \dots) \tag{6.6}$$

si on définit :

$$U(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j z^j$$

et

$$K(z) = \sum_{j=0}^{\infty} k_j z^j.$$

En multipliant (6.6) par z^i et en sommant sur i , on trouve :

$$U(z) = \frac{\pi_0 (1 - z) K(z)}{K(z) - z}. \tag{6.7}$$

maintenant utilisant le fait que $U(1) = 1$:

$$\begin{aligned}
1 &= \lim_{z \rightarrow 1} U(z) \\
1 &= \pi_0 \frac{-K(1)}{K'(1) - 1} \\
1 &= \pi_0 \frac{-1}{\rho - 1} \quad (\rho = \frac{\lambda}{\mu}).
\end{aligned}$$

on a $\pi_0 > 0$ (théorème 6.5) d'où $\rho - 1 < 0 \Rightarrow \rho < 1$. donc $\rho < 1$ est une condition nécessaire pour l'ergodicité .

Finalement, $\rho < 1$ est une condition nécessaire et suffisante pour que $M/G/1$ soit ergodique.

6.4 Relation entre la distribution stationnaire du processus et celle de la C.M

Définition 6.1 Soit $\{X_n\}_{n \geq 1}$ une suite de v.a prenant leur valeur dans un ensemble E et soit $\{T_n\}_{n \geq 1}$ une suite croissante de v.a à valeur dans R_+ .

Le processus stochastique $(X, T) = \{X_n, T_n, n \in \mathbb{N}\}$ est un processus de renouvellement Markovien sur l'espace E si :

$$\begin{aligned}
P\{X_{n+1} = j, T_{n+1} - T_n \leq t \mid X_0, X_1, \dots, X_n; T_0, \dots, T_n\} \\
= P\{X_{n+1} = j, T_{n+1} - T_n \leq t \mid X_n\}
\end{aligned} \tag{6.8}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $j \in E$ et $t \in \mathbb{R}_+$.

Le processus stochastique (X, T) est homogène dans le temps si, pour tout $i, j \in E$ et $t \in \mathbb{R}_+$, la quantité

$$P\{X_{n+1} = j, T_{n+1} - T_n \leq t \mid X_n = i\} = Q(i, j, t)$$

est indépendante de n .

Les probabilités $Q(i, j, t)$ forment le noyau semi-Markovien associé à (X, T) .

$$P(i, j) = \lim_{t \rightarrow \infty} Q(i, j, t)$$

$$P_i\{A\} = P\{A/X_0 = i\}$$

$$E_i = \{X_0 = i\}$$

On définit :

$$Q^n(i, j, t) = P_i\{X_n = j, T_n \leq t\} \quad i, j \in E, t \in \mathbb{R}_+ \quad (6.9)$$

Pour tout t on définit la fonction les fonction :

$R(i, j, t)$ qu'on appelle les fonctions de renouvellement Markovien.

$$R(i, j, t) = \sum_{n=0}^{\infty} Q^n(i, j, t) \quad \forall i, j \in E, t < \infty \quad (6.10)$$

$R = \{R(i, j, t) : i, j \in E\}$ qu'on appelle le noyau de renouvellement Markovien associé à (X, T) .

Théorème 6.6 *Soit Z un processus semi régénératif, avec un espace des états E , soit (X, T) un processus semi Markovien induit de Z , et Q et R sont le noyau semi Markovien et le noyau de renouvellement Markovien correspondant à (X, T) .*

Définissons pour un ensemble $A \subset E$:

$$K_t(i, A) = P_i\{Z_t \in A, T_1 > t\} \quad i \in E, \quad t \geq 0 \quad (6.11)$$

$$P_t(i, A) = P_i\{Z_t \in A, \} \quad i \in E, \quad t \geq 0 \quad (6.12)$$

Alors pour $i \in E$ et $t \geq 0$ on a :

$$P_t(i, A) = \sum_{j \in E} \int_0^t R(i, j, ds) K_{t-s}(j, A) \quad (6.13)$$

Théorème 6.7 *Dans les mêmes hypothèses que le théorème (6.6). Supposons que (X, T) est un processus récurrent, irréductible et apériodique, soit v la mesure invariante de X , et soit*

$$m(j) = E_j[T_1] = \int_0^{\infty} [1 - \sum_k Q(j, k, t)] dt \quad (6.14)$$

et supposons $vm < \infty$ alors

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_t(i, A) = \frac{1}{vm} \sum_j \int_0^{\infty} K_t(j, A) dt \quad (6.15)$$

Nous donnons dans ce qui suit la relation reliant la solution stationnaire obtenue à un instant quelcoque du processus d'attente $p(k)$ et celle de la chaîne de Markov induite π_k $k = 0, 1, \dots$.

On note Y_t : le nombre de clients présent dans le système à l'instant t .

$Y = \{Y_t; t \geq 0\}$ est un processus semi régénératif avec $E = \{0, 1, 2, \dots\}$ espace des états.

Théorème 6.8 *Le processus $\{X_n, T_n\}$ est un processus de renouvellement Markovien de matrice de transition $Q(t)$ (noyau semi Markovien) donnée par :*

$$Q(t) = \begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & \dots \\ \hline 0 & q_0(t) & q_1(t) & q_2(t) & q_3(t) & \dots \\ 1 & p_0(t) & p_1(t) & p_2(t) & p_3(t) & \dots \\ 2 & 0 & p_0(t) & p_1(t) & p_2(t) & \dots \\ 3 & 0 & 0 & p_0(t) & p_1(t) & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{array}$$

où $p_n(t) = \int_0^t \frac{e^{-\lambda s} (\lambda s)^n}{n!} dG(s), \quad n = 0, 1, \dots$

et $q_n(t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda s} p_n(t-s) ds, \quad n = 0, 1, \dots$

6.5 Preuve

Le processus $\{X_n, T_n\}$ est un processus de renouvellement Markovien si :

$$\begin{aligned} P\{X_{n+1} = j, T_{n+1} - T_n \leq t \mid X_0, X_1, \dots, X_n; T_0, \dots, T_n\} \\ = P\{X_{n+1} = j, T_{n+1} - T_n \leq t \mid X_n\} \end{aligned}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $j \in E$ et $t \in \mathbb{R}_+$

Comme le processus des arrivées est Poissonien et que les temps de service sont indépendants les uns des autres, la relation (6.8) est vérifiée.

Les éléments de la $(i+1)$ -ième ligne de la matrice de transition sont déterminés par :

$$\begin{aligned} Q(i, j, t) &= P\{X_{n+1} = j, d_{n+1} - d_n \leq t \mid X_n = i\} \\ &= P\{A(S_{n+1}) = j - i + 1, d_{n+1} - d_n \leq t\} \\ &= Q_{j-i+1}(t). \end{aligned}$$

La première ligne de la matrice de transition est déterminée par les termes :

$$\begin{aligned} Q(0, j, t) &= P\{X_{n+1} = j, d_{n+1} - d_n \leq t \mid X_n = 0\} \\ &= \int_0^t P\{a_n - d_n = s\} P\{A(S_{n+1}) = j; d_{n+1} - a_n \leq t - s\} ds \\ &= q_j(t). \end{aligned}$$

Nous allons utiliser le théorème fondamental des processus de renouvellement Markovien, qui permet de relier la solution stationnaire à un instant quelconque, à la solution

stationnaire sur la chaîne de Markov induite.

Nous obtenons :

$$K(t, j, k) = \begin{cases} e^{-\lambda t} & \text{si } j=k=0; \\ \int_0^t \lambda e^{-\lambda(t-s)} \frac{e^{-\lambda s} (\lambda s)^{k-1}}{(k-1)!} (1 - G(s)) ds & \text{si } k > j = 0; \\ (1 - G(t)) \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^{k-j}}{(k-j)!} & \text{si } k \geq j > 0; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Revenons au théorème fondamental : si la chaîne de Markov induite est récurrente positive (ie : si $\rho < 1$), le processus de renouvellement markovien est aussi ergodique et le temps moyen entre deux instants de la chaîne de Markov induite est simplement λ^{-1} . Comme nous voulons trouver la relation entre v_k et π_k , il suffit d'appliquer la relation (6.15), c'est à dire :

$$v(k) = \sum_j \lambda \pi_j \int_0^\infty K(t, j, k) dt \quad (6.16)$$

Vérifions l'égalité des séries $V(z) = \sum_{k=0}^\infty v_k z^k$ et $U(z) = \sum_{k=0}^\infty \pi_k z^k$ pour tout $|z| < 1$. Posons $\alpha = \lambda(1 - z)$, nous obtenons à partir de (6.16) :

$$\begin{aligned} (1 - z)V(z) &= \alpha \sum_{j=0}^\infty \pi_j \int_0^\infty dt \sum_{k=j}^\infty K(t, j, k) z^k \\ &= \pi_0 \left\{ \int_0^\infty \alpha e^{-\lambda t} dt \right. \\ &\quad \left. + z \int_0^\infty dt \int_0^\infty \alpha e^{-\alpha s} [1 - G(s)] \lambda e^{-\lambda(t-s)} ds \right\} \\ &\quad + \sum_{j=1}^\infty \pi_j z^j \int_0^\infty \alpha e^{-\alpha t} [1 - G(t)] dt \\ &= \pi_0 [1 - z + z(1 - F(z))] + \sum_{j=1}^\infty \pi_j z^j (1 - F(z)) \\ &= U(z) [1 - F(z)] + \pi(0)(1 - z)F(z) \end{aligned} \quad (6.17)$$

où $F(z) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} g(t) dt$.

$$\begin{aligned}
F(z) &= \int_0^{\infty} \alpha e^{-\alpha t} G(t) dt \\
&= \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} g(t) dt.
\end{aligned}$$

En utilisant le système $\pi = \pi P$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
zU(z) &= \sum_i \pi_i \sum_j P(i, j) z^{j+1} \\
&= [\pi_0 z + \pi_1 z + \pi_2 z^2 + \dots] F(z) \\
&= U(z) F(z) - \pi_0 (1 - z) F(z)
\end{aligned} \tag{6.18}$$

A partir de (6.17) et (6.18) et en éliminant $\pi_0 (1 - z) F(z)$, nous obtenons :

$$(1 - z)V(z) = U(z)[1 - F(z)] + G(z)F(z) - zG(z) = (1 - z)U(z).$$

Ce qui démontre l'égalité pour $|z| < 1$.

Nous avons montré que la solution stationnaire à un instant quelconque, est la même que celle obtenue aux instants de la chaîne incluse X_n .

6.6 Conclusion

Pour terminer nous donnons la propriété PASTA (Poisson Arrivals See Time Average) qui permet de donner l'égalité entre la distribution stationnaire du processus et celle de la chaîne de Markov induite, une condition nécessaire pour qu'il y ait cette égalité est que le processus des arrivées soit Poissonien, ie : si le processus des arrivées n'est pas Poissonien alors il n'y a pas égalité entre les deux distributions.

Référence

1. Donal Gross et Carl M. Harris
"Fundamental of queueing theory", John Wiley and Sons, New York, 1974.
2. E. Gelenbe et G. Pujolle
"Introduction aux réseaux de files d'attente", édition Eyrolles et Cnfr Enst, 1982.
3. Cinlar E.
"Introduction to stochastic processus", Englewoods Cliff, N.J. Prentice Hall, 1975.