Séminaire Mathématique de Béjaïa (LaMOS)
Volume 18, 2020, pp. 111 - 125

7

Equilibre de Berge : Entre Situationnisme et Optimalité de Pareto

Kadi S., Zaidi H., Tazdaït T. et Aïssani D.

a - Département de Recherche Opérationnelle, université de Béjaia, Algérie.
b - Centre CIRED Paris, France.
C - Unité de recherche LaMOS, université de Béjaia, Algérie.

Résumé Dans ce travail, nous exposons l'intérêt pratique de l'équilibre de Berge en parlant du situationnisme lors d'un jeu, où nous montrons, à la Gauthier, quand est-ce que les individus ont intérêt à choisir la règle de comportement de Berge et quand pourront-ils choisir de se comporter selon Nash. Nous présentons également l'intérêt de l'efficacité au sens de Pareto dans le choix de la règle de comportement à suivre, en exhibant trois différentes situations de jeu.

Mots clés : Équilibre de Berge, équilibre de Nash, équilibre de Berge- Vaisman, efficacité de Pareto, situationnisme dans le jeu.

Abstract

ln this work, we expose the practical interest of Berge cquilibrium by speaking about the situational gaming, where we show, à la Gauthier', when individuals should follow the Berge rule behavior and wh en should them behave according to Nash. We also present the intercst of Pareto efficiency in making choices about the rule-following behavior, by exhibiting three different game situations.

Key words : Berge equilibrium ash equilibrium, Berge- Vais man equilibrium, Pareto efficiency, situational gaming.

.

Introduction

Berge a introduit pour la première fois l'équilibre de Berge en 1957 pour un jeu sous forme normale basé sur la notion d'équilibre d'une structure de coalition R respectivement à un ensemble de coalitions S. Cet équilibre n'a reçu aucune attention de la part des chercheurs de la théorie des jeux pendant deux décennies.
L'équilibre de Nash peut conduire chaque individu à une situation de non regret, même si elle ne peut pas lui garantir un gain optimal. Cependant, les conditions et les théorèmes d'existence de l'équilibre de Nash ne sont pas constructifs dans le sens où ils ne donnent pas une méthode pour exhiber un équilibre dans un jeu quelconque.
Dans le cas où le jeu n'admet pas d'équilibre de Nash, ou bien si on a une multitude d'équilibres de Nash, alors, on fait appel à l'équilibre de Berge, qui est considéré comme une solution alternative dans ces deux situations précédentes, où le gain de chaque joueur est maximisé par les autres joueurs.

L'objectif de ce travail est l'étude de l'équilibre de Berge sur un aspect particulier, en parlant du situationnisme et en donnant quelques exemples de situations où cet équilibre est Pareto-optimal.

La première section est consacrée à la définition d'un équilibre de Berge tel que Berge l'a introduit en 1957, puis on définit l'équilibre simple de Begre ainsi que l'équilibre de Berge individuellement Rationnel.
Dans la deuxième section, nous présenterons une synthèse bibliographique sur les différents travaux qui ont été élaborés à propos de ces équilibres.
La dernière section portera sur l'intérêt pratique de l'équilibre de Berge, en parlant du situationnisme. On décrit la prise de décision dans une vision de situation qui suppose que les règles de comportement des individus varient en fonction des situations rencontrées. On montrera également *à la Gauthier* qu'un joueur pourrait être mieux loti en jouant la règle de comportement en Berge dans quelques situations de jeu. Comme on s'intéressera à montrer l'intérêt que porte la notion Pareto-optimale dans le choix de la règle de comportement à suivre lors de différentes situations de jeux. Pour cela, on présentera trois exemples de situations illustrant que le choix de se comporter selon Berge, tout en étant individuellement rationnel, fournit un résultat optimal de Pareto. Ceci pouvant bien être une raison qui inciterait les individus à opter pour la règle de Berge.

1 Équilibre de Berge

Dans les jeux stratégiques, on se contente de l'énumération de toutes les stratégies avec les issues et les gains qu'elles engendrent. Ce sont les jeux qui se déroulent en un seul coup et où les joueurs interviennent simultanément. On les appelle les jeux sous forme normale.

$$\langle I, \{X_i\}_{i\in I}, \{f_i\}_{i\in I}\rangle; \tag{1}$$

où :
$I = \{1, 2, ..., N\}$: est l'ensemble des joueurs, supposé fini ou infini dénombrable.
X_i : est l'ensemble des stratégies du joueur i, $i \in I$. ($X_i \subset \mathbb{R}^n$).
$X = \prod_{i \in I} X_i$: est l'ensemble des profils de stratégies du jeu (issues du jeu).
$f_i : X \to \mathbb{R}$: est la fonction de gain du joueur i, $i \in I$.

On note $\mathcal{C}$ l'ensemble de toutes les coalitions (c-à-d : des sous ensembles non-vides de I) [12].
Pour chaque coalition $R \in \mathcal{C}$, on note par :
$-R$: la coalition complémentaire de R,
avec :

$$-R = \{i \in I, \quad tel \quad que \quad i \notin R\}.$$

Si R est réduit à un singleton $\{i\}$, alors on note par $-i$ l'ensemble $-R$.

On note également, $X_R = \prod_{i \in R} X_i$: l'ensemble des profils de stratégies des joueurs dans la coalition R.

Si $\{K_i\}_{i \in \{1,...,s\} \subset \mathbb{N}}$ est une partition de l'ensemble des joueurs I, alors, chaque profil de stratégies $x = (x_1, ..., x_N) \in X$ peut être écrit comme suit :

$$x = (x_{K_1}, x_{K_2}, ..., x_{K_s}), \quad \text{où} \quad x_{K_i} \in X_{K_i} = \prod_{j \in K_i} X_j.$$

Définition 1.1 ***(Équilibre de Berge)***
Considérons le jeu (1). Soit $R = \{R_i\}_{i \in M} \subset \mathcal{C}$ une partition (structure de coalition) de I et $S = \{S_i\}_{i \in M}$ un ensemble de sous-ensembles de I.

Une stratégie réalisable $\bar{x} \in X$ est un point d'équilibre pour l'ensemble R relatif à l'ensemble S ou bien ***un équilibre de Berge*** *pour le jeu (1), si :*

$$f_{r_m}(\bar{x}) \geq f_{r_m}(x_{S_m}, \bar{x}_{-S_m}),$$

$\forall m \in M$, $M \subset \mathbb{N}$;
$\forall r_m \in R_m$ et $\forall x_{S_m} \in X_{S_m}$.

Cela signifie qu'à l'équilibre de Berge, les joueurs dans la coalition S_m jouent un profil de stratégies qui maximise le gain des joueurs dans la coalition R_m, tout en ignorant ou négligeant leurs propres gains (quand $S_m \cap R_m = \emptyset$).
Cette situation fait que l'équilibre de Berge paraît insensé et irrationnel. En fait, les gains

des joueurs dans S_m sont pris en compte par quelques autres joueurs. En effet, soit $j \in S_m$, puisque la famille des coalitions R est une partition de l'ensemble des joueurs I, alors il existe un certain $p \in M$ tel que $j \in R_p$. Selon la définition de l'équilibre de Berge, les joueurs de la coalition S_p correspondante maximisent les fonctions de gain des joueurs dans R_p dont la fonction de gain du $j^{\text{ème}}$ joueur.
Il apparaît qu'à l'équilibre de Berge, globalement, chaque joueur maximise le gain d'au moins un autre joueur, en retour son gain est maximisé par au moins un autre joueur.
En général, le problème de rationalité individuelle peut paraître quand $S_m \cap R_m = \emptyset$, car dans ce cas les joueurs dans R_m ne maximisent pas leurs propres fonctions de gain.

Définition 1.2 ***(Équilibre simple de Berge)***
Un profil de stratégie $\bar{x} \in X$ est ***un équilibre simple de Berge*** *(au sens de Zhukovskii) pour le jeu (1), si :*

$$f_i(\bar{x}) \geq f_i(x_{-i}, \bar{x}_i), \quad \forall i \in I \quad et \quad \forall x_{-i} \in X_{-i}. \tag{2}$$

Cette définition signifie que quand un joueur $i \in I$ joue sa stratégie $\bar{x}_i$ de l'équilibre simple de Berge, il ne peut pas obtenir un gain maximum sauf si les autres joueurs $-i$ jouent volontairement (ou obligatoirement) leur stratégie $\bar{x}_{-i}$ de l'équilibre de Berge $\bar{x}$. Autrement dit, si au moins un des joueurs de la coalition $-i$ dévie de sa stratégie d'équilibre, le gain du joueur i dans le profil de stratégies résultant est inférieur ou égal à son profit $f_i(\bar{x})$.

•Cas particulier :

En posant $M = I$, $R_i = \{i\}$ et $S_i = -i$, $\forall i \in I$, on voit bien que l'équilibre simple de Berge est un cas particulier de l'équilibre de Berge.

Il est important de noter que pour quelques structures de coalitions R et ensembles de coalitions S, l'équilibre de Berge peut ne pas être individuellement rationnel tel que le stipule Vaisman pour un équilibre simple de Berge (voir définition 1.3). Alors, pour chaque équilibre de Berge, il est nécessaire d'introduire la notion de rationalité individuelle à sa définition ou bien choisir uniquement les équilibres de Berge qui sont individuellement rationnels dans le processus de résolution du jeu.

Définition 1.3 ***(Équilibre de Berge-Vaisman)***
On dit qu'un profil de stratégies $\bar{x} \in X$ est ***un équilibre de Berge-Vaisman*** *(ou bien un équilibre de Berge individuellement rationnel) pour le jeu (1), si :*

1. $\forall i \in I$, $\forall y_{-i} \in X_{-i}$, $f_i(\bar{x}) \geq f_i(y_{-i}, \bar{x}_i)$,
2. $\forall i \in I$,

$$\alpha_i = \sup_{x_i \in X_i} \inf_{y_{-i} \in X_{-i}} f_i(y_{-i}, x_i) \leq f_i(\bar{x}). \tag{3}$$

La première condition de la définition signifie que l'équilibre de Berge-Vaisman est un équilibre simple de Berge. La deuxième condition stipule que le profil de stratégies $\bar{x}$ est individuellement rationnel. Autrement dit, pour chaque joueur $i \in I$, l'équilibre de Berge-Vaisman $\bar{x}$ fournit un gain qui est supérieur ou égal à son seuil de sécurité, noté α_i. On dit alors que l'équilibre de Berge-Vaisman est individuellement rationnel.
Il y a deux principales raisons qui ont motivé l'introduction de l'équilibre de Berge-Vaisman comme solution alternative de l'équilibre de Nash. La première est l'absence du concept de solution (en stratégies pures) dans les jeux où il n'y a pas d'équilibre de Nash, la seconde réside dans la difficulté de choisir un équilibre de Nash dans les jeux où il y a plus d'un équilibre de Nash.
L'équilibre de Berge-Vaisman peut être utilisé dans l'étude de plusieurs modèles non-coopératifs, plus particulièrement les jeux de coalition. De plus, contrairement à l'équilibre de Nash, ce concept permet d'atteindre des profils de stratégies coopératifs. En effet, avec cet équilibre il n'est pas nécessaire d'introduire des suppositions comportementales afin d'obtenir des profils de stratégies coopératifs. Par conséquent, il devient possible d'atteindre la coopération dans un contexte non-coopératif. Cette propriété est très importante pour les jeux tels que le dilemme du prisonnier.

•Cas particulier :

Dans le cas où $M = I$, $R_i = \{i\}$ et $S = \{i\}$, $\forall i \in I$, alors l'équilibre de Berge est un équilibre de Nash.

Remarque 1.1 *Un équilibre de Berge, qui est aussi un équilibre de Nash, est appelé* **équilibre de Berge-Nash** *ou équilibre B-Nash.*

De façon similaire, on peut définir l'équilibre simple de Berge-Nash, et l'équilibre de Berge-Vaisman-Nash.

2 Synthèse bibliographique

L'équilibre de Berge, du concept d'équilibre non-coopératif, a été développé, en 1957, par le mathématicien français Claude Berge. Il fait ressortir la coopération comme issue d'équilibre dans le dilemme du prisonnier. Ce concept est passé totalement inaperçu dans la littérature alors même que Berge l'avait introduit pour pallier aux situations de multiplicité d'équilibres de Nash et aux situations caractérisées par l'absence de cet équilibre.

L'équilibre de Berge est donc resté à l'écart pendant deux décennies. Dans les années 80, Zhukovskii et son groupe de chercheurs ont commencé à étudier un cas spécial de cet équilibre, qu'on appellera **"équilibre simple de Berge"** (voir définition 1.2) [14].

En 1988, Radjef a étudié l'existence d'un équilibre de Berge pour des jeux différentiels à N personnes. Il a donc ainsi fourni un théorème qui a été une référence de base dans plusieurs travaux qui lui ont succédé [13].

Abalo et Kostreva [1] s'intéressent aux jeux non-coopératifs et au concept de solution qui est l'équilibre de Berge relié à l'équilibre de Nash. Pour cela, ils ont fourni deux théorèmes d'existence (théorème 2.2 et théorème 2.3) qui donnent des conditions suffisantes pour l'existence d'un équilibre de Berge qui est aussi un équilibre de Nash (équilibre de Berge-Nash). Plus tard [3], ils généralisent leurs résultats et fournissent également deux théorèmes d'existence (théorème 3.1 et théorème 3.2) qui constituent aussi des conditions suffisantes pour l'existence, cette fois-ci, d'un équilibre de Berge. Ces théorèmes ont été démontrés pour des jeux où le nombre de joueurs est fini et aussi dans le cas d'une infinité de joueurs. Puis, ils présentent des résultats contribuant à une nouvelle solution au problème de selection d'un équilibre de Nash approprié [4].

En 2007, Nessah, Larbani et Tazdaït ont présenté un article fournissant une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'un équilibre de Berge au sens de Zhukovskii [10]. Les auteurs ont repris les théorèmes d'Abalo et Kostreva (théorème 3.1 et théorème 3.2 [3], théorème 2 et théorème 3 [4]) et ont montré, par un contre exemple, qu'au fait, les conditions de ces théorèmes n'étaient pas suffisantes. Donc, ils ont proposé une condition qui pallie à ce problème.
Ces mêmes auteurs se sont intéressés également aux conditions d'existence pour un équilibre de Berge-Vaisman pour un jeu sous forme normale. Ils fournissent aussi deux méthodes de calcul des équilibres de Berge-Vaisman : la première calcule les équilibres de Berge-Vaisman et la seconde ceux de Berge-Vaisman qui sont aussi des équilibres de Nash (équilibres de Berge-Vaisman-Nash) [12].

En 2008, Larbani et Nessah se sont intéressés au problème d'existence des équilibres de Berge et ceux de Berge-Nash [9].

Au cours de cette année (2011), plusieurs auteurs ont publié quelques ouvrages. Parmi eux, on trouve un article intéressant [5] où sont démontrés quelques résultats de base des équilibres de Berge et leurs relations avec les équilibres de Nash, en fournissant une méthode directe qui trouve les équilibres de Berge pour des jeux à N-personnes. Les auteurs ont exploré quelques exemples spécifiques. Ils ont expliqué comment l'équilibre de Berge fourni un modèle contraignant de coopération dans les dilemmes sociaux.
Puis, on trouve également l'article [6], qui fournit une étape vers la manière de traiter les préférences morales en se basant sur des règles de comportement. Les auteurs décrivent, ainsi, la prise de décision dans une vision de situation (de jeu) qui suppose que les règles de comportement des individus varient en fonction des situations rencontrées. De ce fait, ils

proposent une règle de comportement, complémentaire à celle de Nash, qui est la règle de Berge.
Au cours de ce mois d'avril, est paru l'ouvrage [7], où les auteurs s'intéressent également à la prise de décision dépendant, à la fois, des individus et de la situation dans laquelle se déroule les jeu. Étant donné que l'action est gouvernée par plusieurs règles de comportement, ils se sont basés sur celle de Berge, susceptible de compléter la règle de Nash. Ils définissent, alors, des conditions d'existence pour les équilibres de Berge, Berge individuellement rationnels et Berge-Nash. Pour le cas général avec un nombre infini dénombrable de joueurs, ils utilisent le théorème de l'égalité g-maximum pour dériver des conditions générales suffisantes pour l'existence de ces équilibres. Ils définissent également des procédures qui les calculent.

3 Situationnisme et optimalité au sens de Pareto

Le situationnisme traduit l'idée que les individus adaptent leur comportement aux situations auxquelles ils sont confrontés. Donc, ils coopèrent dans les situations de coopération et ils jouent selon leur propre intérêt dans les situations de concurrence.

3.1 Équilibre de Berge entre utilitarisme et situation de jeu

Considérons un individu qui joue suivant la règle de Berge en espérant que l'autre joueur fera de même, tout en sachant que cette règle de comportement conduit à un meilleur résultat. Autrement dit, on pose que quelque soit la règle de comportement choisie, les individus sont incités (motivés) par des motivations utilitaristes.
Ils jouent suivant une règle de comportement orientée vers un égoïsme ou bien vers un soutien mutuel, mais bien sûr, motivés par le succès.
La règle de comportement en Berge et l'équilibre de Berge donnent des résultats particuliers dans les situations de jeux à somme nulle. Afin d'illustrer cela, considérons un jeu à somme nulle et à deux joueurs, avec :
f_1 : la fonction d'utilité du premier joueur, et
f_2 : la fonction de perte du second joueur.
Donc, $f_2 = -f_1$

Sachant que $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ est un équilibre de Berge si :

$$\begin{cases} \forall x_2 \in X_2, \quad f_1(\bar{x}_1, x_2) \leq f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2), \\ \\ \forall x_1 \in X_1 \quad f_2(x_1, \bar{x}_2) \leq f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2). \end{cases} \tag{4}$$

Étant donné que $f_2 = -f_1$, le premier joueur obtient son gain maximum si le second accepte de jouer sa stratégie de Berge $\bar{x}_2$ qui consiste à la maximisation de sa perte (c-à-d :

$\max_{x_2} f_1(\bar{x}_1, x_2) = \max_{x_2}[-f_2(\bar{x}_1, x_2)]$).

De manière similaire, le second joueur obtient sa perte minimale si le premier accepte de jouer sa stratégie de Berge $\bar{x}_1$ de manière à minimiser son utilité ($\min_{x_1} f_2(x_1, \bar{x}_2) = \min_{x_1}[-f_1(x_1, \bar{x}_2)]$).

Ceci est un comportement sacrificiel qui n'est pas compatible avec un traitement utilitariste. Plus généralement, les situations de compétition, telles que les jeux compétitifs, les duopoles de Bertrand ou Cournot, ne concordent pas avec le soutien mutuel, qui nécessite l'atteinte d'un but exclusif mutuel.

Dans de telles situations, on peut supposer que les individus adoptent un comportement de type Nash. Cependant, la règle de Berge est souvent appropriée dans les situations de coopération où les agents doivent coordonner leurs activités afin d'atteindre des résultats satisfaisants.

Mais dans tous les cas, et comme suggéré par une preuve expérimentale, il n'y a pas de règle précise et une partie de l'approche de situation est l'environnement dans lequel les joueurs communiquent, qui affecte significativement la règle de comportement qu'ils choisissent de suivre.

3.2 Situationnisme selon Gauthier

En 1986, Gauthier a été le premier qui a effectué une analyse des jeux suivant une vision de situation. L'approche de Gauthier est spécialement pertinente dans le sens où elle capte le besoin d'une association entre les règles de comportement et les situations de jeu.
L'approche de Gauthier nous dit, en terme d'utilitarisme, si un jeu quelconque doit se jouer suivant la règle de Berge ou bien Nash.

Gauthier considère que les individus prennent leurs dispositions avant d'interagir. Les dispositions sont définies comme étant des règles de comportement pouvant varier suivant la situation de jeu.
En se basant sur le dilemme du prisonnier, Gauthier suppose que les individus peuvent adopter une des dispositions suivantes :

1. *"Maximisation directe" :* une règle de comportement selon laquelle ils cherchent à maximiser leurs profits étant données les stratégies de ceux avec lesquels ils interagissent.
2. *"Maximisation contraignante" :* une règle de comportement suivant laquelle ils cherchent, en quelque sorte, à maximiser leurs gains, pas suivant les stratégies mais selon les profits de ceux avec lesquels ils interagissent.

Étant données ces deux possibilités, le résultat de Gauthier est que les joueurs choisissent la maximisation contraignante dans le dilemme du prisonnier.

En utilisant cette approche, les individus sont donc face à deux dispositions qui s'offrent à eux : adopter la règle de comportement en Berge ou bien en Nash. L'exemple suivant montre, en quelque sorte, la manière de procéder [6].

Exemple 3.1 *Soit le jeu de la confiance suivant :*

		P_2	
		Honorer	*Exploiter*
P_1	*Confiance*	*X, X*	*Y, Z*
	Méfiance	*0, 0*	*0, 0*

$Y < 0 < X < Z$.
L'équilibre de Nash est unique, donné par (Méfiance, $Exploiter$) et l'équilibre de Berge est aussi unique, donné par $(Confiance, Honorer)$.

En supposant que les joueurs sont couplés aléatoirement. Ils ont le choix entre deux dispositions basées sur la règle de comportement en Nash (RN) ou bien la règle de comportement en Berge (RB).
On appelle le joueur RN, le premier type, et le joueur RB, le second type. Les joueurs suivent RB quand ils s'attendent à ce que leurs adversaires feront de même, et le choix d'appartenir à un type plutôt qu'à un autre dépend des gains relatifs espérés.
La probabilité de jouer en tant que type 1 ou type 2 est la même. On note par α la part des joueurs RB dans la population.

• D'abord, on suppose qu'avant le début du jeu, les joueurs savent à la fois leur propre type et le type de leurs adversaires. Les gains RN et RB espérés sont donc respectivement :

$$\begin{cases} g_e(RN) = 0, \\ \\ g_e(RB) = \alpha X. \end{cases} \tag{5}$$

- Pour $\alpha > 0$:
  Le gain espéré pour les joueurs RB est strictement supérieur au gain espéré pour les joueurs RN, $g_e(RB) > g_e(RN)$.
- Pour $\alpha = 0$:
  Les gains espérés pour les deux types de joueurs sont les mêmes, $g_e(RB) = g_e(RN)$.

Être un joueur RB améliore le bien être dès qu'il y a d'autres joueurs RB dans la population avec lesquels les relations de confiance peuvent être établies. Autrement dit, s'il y a un unique joueur RB il jouera comme s'il était un joueur RN.

• En relaxant la supposition que les individus peuvent identifier le type de leurs adversaires, le résultat demeure vigoureux. Pour voir cela, on suppose qu'à la fois les joueurs RB et RN manquent à identifier ceux avec lesquels ils interagissent.

Soit β la probabilité que les joueurs RB s'identifient les uns les autres et θ la probabilité qu'ils manquent à identifier les joueurs RN.
Les gains espérés des joueurs RB et RN sont respectivement :

$$\begin{cases} g_e(RB) = \alpha\beta X + (1-\alpha)\frac{\theta Y}{2}, \\ \\ g_e(RN) = \frac{\alpha\theta Z}{2}. \end{cases} \tag{6}$$

et un individu choisit d'être un joueur RB si :

$$\frac{\beta}{\theta} > \frac{\alpha Z - (1-\alpha)Y}{2\alpha X}. \tag{7}$$

Si la condition (7) est vérifiée, les joueurs adoptent la règle de Berge même s'ils peuvent interagir sans le savoir avec des joueurs RN.

Remarque 3.1 *Quand la proportion des joueurs RB croît, $\frac{\beta}{\theta}$ croît également, en diminuant le risque de prendre des joueurs RN pour des joueurs RB.*

Remarque 3.2 *Quand le gain relatif à la coopération croît, la condition (7) devient moins contraignante rendant, ainsi, la règle de Berge plus attrayante.*

On déduit que les individus seront plus probables d'adopter la règle de Berge quand l'ampleur du dilemme social est importante et quand leur environnement social n'est pas aussi égoïste.

Il existe d'autres situations de jeu pouvant mener au résultat contraire, faisant de la règle de Nash la plus préférée, telles que les situations de jeux à somme nulle, la plupart des situations de compétition et même dans les jeux de coopération où les intérêts ne sont pas conflictuels. Considérons cet exemple :

Exemple 3.2 *Soit le jeu suivant :*

		P_2	
		C	D
P_1	C	*3, 3*	*4, 1*
	D	*1, 4*	*2, 2*

Il y a un unique équilibre de Nash en (C, C) et un unique équilibre de Berge en (D, D).

En laissant les individus choisir leur disposition avant le début du jeu, on peut déduire que la meilleure option pour les joueurs est de jouer en mode Nash.

• Afin d'illustrer cela, d'abord, on considère que les individus savent le type de leurs adversaires. On aura alors :

$$\begin{cases} g_e(RN) = 3, \\ \\ g_e(RB) = 3 - \alpha. \end{cases} \tag{8}$$

et pour $\alpha > 0$, il y a intérêt à choisir une disposition RN.

• Maintenant, supposons que les individus ne connaissent pas le type de leurs adversaires. On a alors :

$$\begin{cases} g_e(RN) = \alpha\theta + 3, \\ \\ g_e(RB) = \alpha(2\theta - \beta) + 3 - 2\theta. \end{cases} \tag{9}$$

On déduit que : $g_e(RN) > g_e(RB)$, ce qui nous mène à l'inégalité suivante :

$$\frac{\beta}{\theta} > \frac{(\alpha - 2)}{\alpha}.$$

Ceci est toujours vrai et les individus choisiront toujours de jouer en mode Nash.

Généralement, et en prenant en compte la vision rationnelle révisionniste suivant laquelle les individus suivent des règles de conduite qui font que leur vie va mieux, cette approche de disposition peut être appliquée pour une situation de jeu quelconque qui indique quand est-ce que l'équilibre de Berge pourrait être appliqué et quand est-ce que l'équilibre de Nash est meilleur.
Le choix de chacun d'eux se rapporte à la structure d'utilité du jeu et à l'appréciation probabiliste, des joueurs, subjective du type des adversaires avec lesquels ils interagissent.

3.3 Équilibre de Berge et optimalité de Pareto

Parmi les raisons qui peuvent inciter un individu à choisir d'adopter une règle de comportement en Berge plutôt qu'en Nash, on peut penser à l'efficacité au sens de Pareto.
Sachant qu'un équilibre de Berge ne conduit pas toujours à un optimum de Pareto, mais une fois cette condition vérifiée, on saura qu'il n'y a pas un meilleur choix que l'équilibre de Berge.

Dans cette section, nous prendrons soin d'énoncer quelques exemples de situations où l'équilibre de Berge est bien Pareto-optimal.

Exemple 3.3 ***Dilemme du prisonnier :***
Dans cet exemple, on reprend le dilemme du prisonnier, où on considère les gains comme étant des variables : R, S, T, P ; avec $T > R > P > S$.

		P_2	
		C	D
P_1	C	R, R	S, T
	D	T, S	P, P

La stratégie D est la stratégie dominante, et le résultat (D, D) est l'équilibre de Nash en stratégies pures. Tandis que le résultat (C, C) est l'équilibre de Berge en stratégies pures de ce jeu. En effet, d'après la définition 1.2 :
$f_1(C, C) > f_1(C, D)$, et
$f_2(C, C) > f_2(D, C)$.
Ce qui n'est pas vérifié pour le profil de stratégies (D, D), car :
$f_1(D, D) < f_1(D, C)$, et
$f_2(D, D) < f_2(C, D)$.

Si on défini α_i comme étant le niveau maximum de sécurité du joueur i, avec :

$$\alpha_i = \sup_{x_i \in X_i} \inf_{x_{-i} \in X_{-i}} f_i(x_i, x_{-i}) \leq f_i(\bar{x}), \qquad i \in I, \quad x_{-i} \in X_{-i}. \tag{10}$$

Si l'inégalité (10) est vraie pour chaque joueur $i \in I$, alors l'équilibre de Berge fournit un gain qui ne doit pas être inférieur au *maxmin*.

En considérant le dilemme du prisonnier, on trouve :
$\alpha_1 = \max\{\min_{x_2} f_1(C, x_2), \min_{x_2} f_1(D, x_2)\} = \max\{S, P\} = P < R$, et
$\alpha_2 = \max\{\min_{x_1} f_2(x_1, C), \min_{x_1} f_2(x_1, D)\} = \max\{S, P\} = P < R$.

On conclut donc que le profil de stratégies (C, C) est individuellement rationnel.

Nous avons également que l'équilibre de Berge, dans cette situation, est Pareto-optimal. Ce qui inciterait les joueurs à choisir de jouer suivant la règle de comportement en Berge plutôt qu'en Nash.

Exemple 3.4 ***Jeu de la poule mouillée :***
Nous reprendrons le même tableau précédent, sauf que dans ce cas on considère que $T > R > S > P$.

Ce jeu admet deux équilibres de Nash, en stratégies pures, qui sont (C, D) et (D, C). L'unique équilibre de Berge pour ce jeu est (C, C). En effet :

$f_1(C,C) > f_1(C,D)$, et
$f_2(C,C) > f_2(D,C)$.
Ce qui n'est pas vérifié pour les deux profils de stratégies (C,D) et (D,C), puisque :
$f_1(C,D) < f_1(C,C)$, et
$f_2(C,D) > f_2(D,D)$.
Et encore :
$f_1(D,C) > f_1(D,D)$, et
$f_2(D,C) < f_2(C,C)$.

En calculant le *maxmin* de chaque joueur, on trouve :
$\alpha_1 = \max\{\min_{x_2} f_1(C,x_2), \min_{x_2} f_1(D,x_2)\} = \max\{S,P\} = S < R$, et
$\alpha_2 = \max\{\min_{x_1} f_2(x_1,C), \min_{x_1} f_2(x_1,D)\} = \max\{S,P\} = S < R$.

Ce qui nous permet de déduire que l'équilibre (C,C) est individuellement rationnel.

L'équilibre de Berge, dans cette situation, est également optimal de Pareto. Ceci pourrait bien encourager les individus à adopter une règle de comportement en Berge plutôt qu'une autre.

Exemple 3.5 ***Jeu de la confiance :***
En reprenant le tableau suivant, où $Y < 0 < X < Z$. :

		P_2	
		Honorer	*Exploiter*
P_1	*Confiance*	*X, X*	*Y, Z*
	Méfiance	*0, 0*	*0, 0*

Sachant que l'équilibre de Nash est unique $(\text{Méfiance}, Exploiter)$ et l'équilibre de Berge est aussi unique $(Confiance, Honorer)$, car :
$f_1(Confiance, Honorer) > f_1(Confiance, Exploiter)$, et
$f_2(Confiance, Honorer) > f_2(\text{Méfiance}, Honorer)$.
Ce qui n'est pas vrai pour le profil de stratégies $(\text{Méfiance}, Exploiter)$, puisque :
$f_1(\text{Méfiance}, Exploiter) \geq f_1(\text{Méfiance}, Honorer)$, et
$f_2(\text{Méfiance}, Exploiter) < f_2(Confiance, Exploiter)$.

Le calcul du *maxmin* donne :
$\alpha_1 = \max\{\min_{x_2} f_1(Confiance, x_2), \min_{x_2} f_1(\text{Méfiance}, x_2)\} = \max\{Y, 0\} = Y < X$, et
$\alpha_2 = \max\{\min_{x_1} f_2(x_1, Honorer), \min_{x_1} f_2(x_1, Exploiter)\} = \max\{0,0\} = 0 < X$.

Donc, l'équilibre de Berge est individuellement rationnel. Cet équilibre est également Pareto-optimal, ce qui ramènerait les individus à choisir d'opter pour la règle de comportement de Berge.

Dans ces trois exemples précédents, on a présenté trois situations de jeux où les équilibres de Berge individuellement rationnels sont optimaux de Pareto. Ainsi, quand les individus choisissent d'adopter la règle de comportement en Berge, tout en étant individuellement rationnels, ils seront mieux lotis qu'en choisissant de se comporter en Nash, et vue l'efficacité de Pareto, cela leur permet de savoir qu'il n'y a pas un autre résultat meilleur que celui fourni en optant pour la règle de Berge.

Conclusion

L'objectif assigné à ce travail a été l'étude de l'équilibre de Berge sur un aspect particulier, en parlant du situationnisme et en donnant quelques exemples de situations où cet équilibre est Pareto-optimal.

Nous avons tout d'abord rappelé la définition d'un équilibre de Berge tel que Berge l'a introduit en 1957, puis on a définit l'équilibre simple de Begre ainsi que l'équilibre de Berge individuellement Rationnel.
Par la suite, nous avons présenté une synthèse bibliographique sur les différents travaux qui ont été abordés à propos de ces équilibres.
Nous nous sommes enfin intéressés à l'intérêt pratique de l'équilibre de Berge en parlant du situationnisme. Nous avons décrit la prise de décision dans une vision de situation qui suppose que les règles de comportement des individus varient en fonction des situations rencontrées. Nous avons aussi montré *à la Gauthier* qu'un joueur pourrait être mieux loti en jouant la règle de comportement en Berge dans quelques situations de jeu. Comme on s'est également intéressé à montrer l'intérêt que porte la notion Pareto-optimale dans le choix de la règle de comportement à suivre lors de différentes situations de jeux. Pour cela, on a présenté trois exemples de situations qui illustrent que le choix de se comporter selon Berge, tout en étant individuellement rationnel, fournit un résultat optimal de Pareto.

Ce qui nous laisse penser à généraliser ce concept pour avoir comme perspective de trouver des conditions générales sous lesquelles l'équilibre de Berge, qui est individuellement rationnel, soit Pareto-optimal.
Dans le but de nous permettre d'identifier les classes de jeux où les équilibres de Berge, individuellement rationnels, sont optimaux de Pareto. Car, ceci pourrait bien aider les joueurs dans le processus de prise de décision de la règle de comportement à adopter.

Références

[1] K.Y. Abalo and M.M. Kostreva. *Fixed points, Nash games and their organizations.* Topological Methods in Nonlinear Analysis 8(1996) 205-215.

[2] K.Y. Abalo and M.M. Kostreva. *Equi-well-posed games.* J. Optim. Theory Appl. 89(1996) 89-99.

[3] K.Y. Abalo and M.M. Kostreva. *Some existence theorems of Nash and Berge equilibria.* Applied Mathematics Letters. 17(2004) 569-573.

[4] K.Y. Abalo and M.M. Kostreva. *Berge equilibrium : Some recent results from fixed point theorems.* Appl. Math. Comput. 169(2005) 624-238.

[5] A.M. Colman, T.W. Körner, O. Musy and T. Tazdaït. *Mutual support in games : Some properties of Berge equilibria.* Journal of Mathematical Psychologie (2011), doi :10.1016/j.jmp.2011.02.001.

[6] P. Courtois, R. Nessah and T. Tazdaït. *How to play the games ? Nash versus Berge behavior rules.* Document de recherche, LAMETA, UMR, DR n° 2011-05. 2011.

[7] P. Courtois, M. Larbani, R. Nessah and T. Tazdaït. *Situational gaming : On Berge equilibria.* Document de travail, IESEG School of Management. Lille, 2011.

[8] D.P. Gauthier. *Morals by agreement.* Oxford, Oxford University Press. 1986.

[9] M. Larbani and R. Nessah. *A note on the existence of Berge and Berge–Nash equilibria.* Mathematical Social Sciences 55 (2008) 258-271.

[10] M. Larbani, R. Nessah and T. Tazdaït. *A note on Berge equilibrium.* Appl. Math. Lett. 20(2007) 926-932.

[11] M. Larbani, R. Nessah and T. Tazdaït. *Strong Berge and Pareto equilibrium existence for a noncooperative game.* L'Archive Hal, halshs-00271464, version 1, 09 Apr 2008.

[12] M. Larbani, R. Nessah and T. Tazdaït. *On Berge equilibria.* IESEG Working Paper Series 2010-Eco-16.

[13] M. S. Radjef. *Sur l'existence d'un équilibre de Berge pour un jeu différentiel à N personnes.* Cahier Mathématiques. Université d'Oran, 1988, n°.1, 89-93.

[14] V. I. Zhukovskii. *Some problems of non-antagonistic differential games.* In P. Kenderov (Ed.), Mathematical methods in operations research. Sofia : Bulgarian Academy of Sciences, 1985, 103-195.