Analyse de la file d'attente M/M/1 avec problème de stock

Massinissa SOUFIT, Karim Abbas

Doctoriales de Recherche Opérationnelle, le 12 et 13 Décembre 2018

Introduction

L'étude des modèles qui intègre la gestion des stocks dans les files d'attente a fait l'objet d'une attention considérable au cours des deux dernières décennies. . Les modèles de file d'attente avec problème de gestion des stocks sont utiles pour les systèmes du monde réel dans lesquels l'article demandé n'est pas immédiatement livré aux clients. De telles situations se produisent lorsque les articles dans le stock peuvent nécessiter un certain temps pour la préparation et dans ce cas, le délai de livraison est positif et généralement aléatoire, car cela provoque la formation de la ligne d'attente des clients. Par conséquent, pour évaluer la performance de tel système, les gestionnaires doivent combiner les mesures de performance classiques du système de files d'attente avec ceux de la gestion des stocks en même temps. Ces modèles hybrides découlent d'une combinaison de deux modèles (files d'attente et gestion des stocks) ont de nombreuses applications dans de nombreux domaines, tels que les systèmes de fabrication, les réseaux de files d'attente et les secteurs économiques tels que les pharmacies et l'industrie

Méthodologie

Dans cette section, nous présentons une nouvelle méthodologie, basée sur l'utilisation d'une extension du développement en séries de Taylor multidimensionnel, pour propager l'incertitude épistémique infligée aux paramètres dans les mesures de performance d'une chaîne de Markov à temps discret.

Théorème [Soufit et al. 2018]:
Supposons que toutes les composantes de la matrice de probabilités de transition P sont de classe C^k par rapport à chaque paramètre θ, pour $i = 1, \dots, n_\theta$, où θ est point intérieur d'un certain intervalle Θ. Alors, les dérivées successives de la distribution stationnaire π_θ, d'une chaîne de Markov ergodique à temps discret et à espace d'états fini, par rapport aux paramètres θ_i est donnée par :

$$D^h\pi_\theta = \sum_{|i|\leq n} C_h^i \left(\frac{d^{i_1+i_2+\cdots+i_{n_\theta}}\pi_\theta}{d\theta^{(i_1+i_2+\cdots+i_{n_\theta})}}\right)\left(\frac{d^{h_1-i_1+h_2-i_2+\cdots+h_{n_\theta}-i_{n_\theta}}}{d\,\theta^{(h_1-i_1+h_2-i_2+\cdots+h_{n_\theta}-i_{n_\theta})}}\right)D_\theta$$

Où $|h| = n$ et $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{n_\theta})$.
Et $\left(\frac{d^{i_1+i_2+\cdots+i_{n_\theta}}\pi_\theta}{d\theta^{(i_1+i_2+\cdots+i_{n_\theta})}}\right)\left(resp.\left(\frac{d^{h_1-i_1+h_2-i_2+\cdots+h_{n_\theta}-i_{n_\theta}}}{d\,\theta^{(h_1-i_1+h_2-i_2+\cdots+h_{n_\theta}-i_{n_\theta})}}\right)\right)$
et le vecteur (resp. la matrice) dont ces composantes sont les dérivées $n^{ième}$ de $\pi_\theta(resp. P_\theta)$ par rapport à θ.

Pour prendre en compte le facteur d'incertitude épistémique dans l'estimation du multi-paramètre $\theta(\omega)$, on associe pour chaque d'entrée $\theta_i(\omega), i = 1, \dots, n_\theta$, un modèle de la forme :

$$\theta_i(\omega) = \bar{\theta}_i + \sigma_i\varepsilon_i(\omega),$$

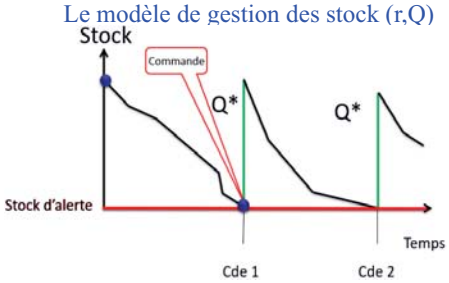
En utilisant les dérivées successives de la distribution stationnaire π_θ par rapport au multi-paramètre θ, introduites Précédemment, on peut écrire la distribution stationnaire π_θ comme un polynôme en fonction des paramètres θ_i , $i = 1, \dots, n_\theta$, suivant le développement en séries Taylor multidimensionnel suivant :

$$\pi_\theta(\omega) = \sum_{|h|\geq 0} \frac{(\theta(\omega) - \bar{\theta})^h}{h!} D^h\pi_\theta$$

Le modèle d'attente M/M/1 avec de stock

Considérons la file d'attente M/M/1/N avec gestion des stocks sous contrôle continu et retour du client, où les clients arrivent à une station qui est constituée d'un seul serveur, suivant un flux de Poisson avec le taux . La distribution du temps de service est exponentiellement distribuée avec le paramètre et chaque client servi a besoin exactement d'un article du stock. Le délai de réapprovisionnement est exponentiellement réparti avec le paramètre . Il peut y avoir au maximum N clients présents dans la file d'attente.

Le modèle de gestion des stock (r,Q)



Soit $Z = \{(X(t), Y(t)), : t \geq 0\}$ l'état du système à l'instant $t \geq 0$, où $X(t)$ indique le nombre de clients présents dans le système à l'instant $t \geq 0$, et $Y(t)$ représente l'état du stock à l'instant $t \geq 0$. Le processus Z constitue un processus de Markov à temps continu qui est irréductible sur l'espace d'états finis.

La matrice génératrice Q du processus Z est donnée par :

$$Q = \begin{pmatrix} A_1^{(0)} & A_0 & & & \\ A_2 & A_1 & A_0 & & \\ & A_2 & A_1 & A_0 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & A_2 & A_1 & A_0 \\ & & & A_2 & A_1 + A_0 \end{pmatrix}$$

où $A_0,\ A_1,\ A_2 \in \mathbb{R}^{(Q+1)(Q+1)}$ avec $A_1^{(0)} = A_0$

$$A_0 = \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} -\nu - \lambda & & \nu \\ & \ddots & \\ & & -\mu - \lambda \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ \mu & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \mu & 0 \end{pmatrix}$$

Analyse robuste du modèle

Dans cette section, nous considérons le calcul des mesures de performances du modèle de file d'attente M/M/1/N avec gestion des stocks, en propageant l'incertitude épistémique des paramètres à travers les développements en séries de Taylor. Par conséquent, nous étudions l'évaluation numérique de la distribution stationnaire du modèle, où nous supposons que les paramètres du modèle ne sont pas parfaitement connus. Une incertitude épistémique entache leurs vraies valeurs. Pour cela, nous introduisons les modèles suivants pour ces paramètres incertains :

$$\lambda(\omega) = \bar{\lambda} + \sigma_\lambda\varepsilon_\lambda(\omega),\ \varepsilon_\lambda(\omega) \sim \mathcal{N}(0,1),$$
$$\nu(\omega) = \bar{\nu} + \sigma_\nu\varepsilon_\nu(\omega),\ \varepsilon_\nu(\omega) \sim \mathcal{N}(0,1),$$

Paramètres indépendants

Si nous supposons que les paramètres et sont des variables aléatoires indépendantes, alors nous avons :

$$\mathbb{E}(\varepsilon_\lambda^i\varepsilon_\nu^j) = \mathbb{E}(\varepsilon_\lambda^i)\,\mathbb{E}(\varepsilon_\nu^j).$$

Dans ce cas, la valeur du reste est estimée : $R_3 = 4{,}3836 \times 10^{-4}$ et le degré de polynôme de Taylor multidimensionnel est $|\kappa| = 3$. Ainsi, les résultats numériques obtenus, en utilisant le polynôme de Taylor (TSE) et la simulation de Monte Carlo (MCS) sont résumées dans les tableaux suivants :

	$\pi_{1,1}$	$\pi_{1,2}$	$\pi_{1,3}$	$\pi_{2,1}$	$\pi_{2,2}$	$\pi_{2,3}$	$\pi_{3,1}$	$\pi_{3,2}$	$\pi_{3,3}$	$\pi_{4,1}$	$\pi_{4,2}$	$\pi_{4,3}$
TSE	0.0565	0.0389	0	0.1120	0.0452	0.0311	0.1308	0.1005	0.0502	0.2097	0.0804	0.1448
$MC1$	0.0491	0.0335	0	0.1083	0.0405	0.0276	0.1325	0.0989	0.0462	0.2349	0.0815	0.1471
$MC2$	0.0546	0.0374	0	0.1121	0.0434	0.0297	0.1322	0.0992	0.0482	0.2208	0.0789	0.1435

TABLE 1 – Moyenne de la distribution stationnaire du modèle M/M/1/4 avec gestion des stocks.

$\times 10^{-4}$	$\pi_{1,1}$	$\pi_{1,2}$	$\pi_{1,3}$	$\pi_{2,1}$	$\pi_{2,2}$	$\pi_{2,3}$	$\pi_{3,1}$	$\pi_{3,2}$	$\pi_{3,3}$	$\pi_{4,1}$	$\pi_{4,2}$	$\pi_{4,3}$
TSE	0.0072	0.0042	0	0.0017	0.0035	0.0021	0.0013	0.0011	0.0031	0.1112	0.0021	0.0026
$MC1$	0.0062	0.0025	0	0.0023	0.0040	0.0015	0.0020	0.0004	0.0029	0.1152	0.0018	0.0033
$MC2$	0.0069	0.0043	0	0.0019	0.0037	0.0020	0.0015	0.0009	0.0031	0.1123	0.0022	0.0027

TABLE 2 – Variance de la distribution stationnaire du modèle M/M/1/4 avec gestion des stocks.

Paramètres dépendants

afin de décrire la dépendance entre les variables aléatoires ε_λ *et* ε_ν qui suivent la loi normale centrée et réduite, nous utilisons la copule gaussienne qui est associée à la famille des copules elliptiques. De ce fait, les moments d'ordre $E(\varepsilon_\lambda^i\varepsilon_\nu^j)$ sont exprimés comme suit :

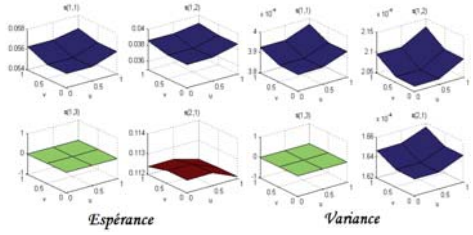
$$\mathbb{E}[\pi(\omega)] = \sum_{|h|\geq 0} \sigma^h \frac{D^h\pi_\theta}{h!}\,\mathbb{E}\left[(\varepsilon(\omega))^h\right],$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}[\pi_l(\omega)] &= \sum_{|\kappa|\geq 0}\sum_{|\lambda|\geq 0} \sigma^{\kappa+\lambda}\left(\frac{D^\kappa\pi_\theta}{\kappa!}e_l^T\right)\left(\frac{D^\lambda\pi_\theta}{\lambda!}e_l^T\right)\left[\mathbb{E}\left[(\varepsilon(\omega))^{\kappa+\lambda}\right]\right. \\ &- \left.\mathbb{E}\left[(\varepsilon(\omega))^\kappa\right]\mathbb{E}\left[(\varepsilon(\omega))^\lambda\right]\right], \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}(\varepsilon_\lambda^i\varepsilon_\nu^j) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \epsilon_1^i\epsilon_2^j f_1(\epsilon_1)\, f_2(\epsilon_1)\, c(F_1(\epsilon_1), F_2(\epsilon_2))\, d\epsilon_1\, d\epsilon_2,$$

où la densité c est donnée par:

$$c(u_1, u_2; \rho) = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(-\frac{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 - 2\rho\epsilon_1\epsilon_2}{2(1-\rho^2)} + \frac{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2}{2}\right),$$



Conclusions

L'objectif fondamental de ce travail est de montrer la manière de propager l'incertitude épistémique de certains paramètres impliqués dans la définition du modèle de M/M/1/N avec problème de gestion des stocks, à savoir le taux d'arrivée et le délai de réapprovisionnement, à l'aide de la méthode analytique basée sur les développements en série de Taylor. Une discussion sur la dépendance entre les paramètres a été également abordée. En outre, une confrontation des résultats a été considérée en comparant ces résultats avec ceux obtenus par la simulation.

Références

1. S. Ouazine et K, Abbas (2016) Development of Computational Algorithm for Multiserver Queue with Renewal Input and Synchronous Vacation. Applied Mathematical Modelling Journal, 1137-1156.

2. B. Heidergott et A. Hordijk (2003) Taylor series expansions for stationary Markov chains. Advances in Applied Probability, 1046-1070.

3. M. Soufit, S. Ouazine et K. Abbas(2018) Taylor Series Expansion Approach for Epistemic Uncertainty Propagation in Queueing-Inventory Models. Mathematical Methods in the Applied Sciences, https://doi.org/10.1002/mma.5120, 2018.