Séminaire Mathématique de Béjaïa (LaMOS)
Volume 13, 2014, pp. 87 - 91

14

Stabilité forte des Réseaux de Petri.

O. LEKADIR[a] et D. AÏSSANI[b]

Unité de recherche LaMOS (Laboratoires de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes)
Université de Bejaia, Bejaia 06000, Algérie
Tél. (213) 34 21 51 88,
[a] email : ouizalekadir@gmail.com
[b] email : lamos_bejaia@hotmail.com

Résumé Comme première tentative d'application de la méthode de stabilité forte aux modèles stochastiques RdP **"Réseaux de Petri"** nous avons établie la stabilité forte du $M/M/1-GSPN$ (generalized stochastic Petri net associé au système d'attente $M/M/1$) après perturbation de la durée de service du système $M/G/1-MRSPN$ (Markovian Regeneratif Stochastic Petri Nets associé au système $M/G/1$). En effet, en premier lieu, nous avons définie de façon formelle les processus stochastiques associés aux réseaux de Petri stochastiques modélisant les deux systèmes : le système original, non markovien "$M/G/1$" et le système idéal, markovien "$M/M/1$". Par la suite, nous avons obtenu les conditions nécessaires de stabilité forte de ces systèmes et finalement nous avons obtenu les bornes de perturbations induites.

Mots clefs : Réseaux de Petri, GSPN, MRSPN, Stabilité forte, La file $M/M/1$, La file $M/G/1$, Perturbation.

14.1 Introduction

La théorie de la stabilité de Lyaponuv a fournie les outils nécessaires pour aborder le problème de stabilité pour les systèmes à événements discrets modélisés par les RdP temporisés dont le modèle mathématique est donné en termes d'équations différentielles. La méthode de stabilité forte a fait l'objet d'un cycle complet de recherche dans le domaine des files d'attente (F.A.) en considérant la perturbation de différents paramètres [9]. Nos premiers travaux de recherche, sont orientés vers l'élargissement du champs d'applicabilité de cette méthode aux réseaux de files d'attente (R.F.A.) [6,7,8]. Cependant cet élargissement n'a pas été évident et ceci est dû principalement aux flots inter-stations qui ne sont pas souvent markoviens d'où la difficulté d'obtention de la chaîne de Markov (CM) qui gère ces réseaux. Face à cette difficulté, on a envisager l'obtention des chaînes de Markov via les formalismes des RdP surtout que ces derniers ont été utilisés dans la littérature pour modéliser les systèmes de files d'attente (SFA) [2]. Ainsi, on a commencer par la modélisation de quelques SFA par le formalisme GSPN [3, 4, 5]. Pour appliquer la stabilité forte à des modèles de RdP on a opté pour l'étude de la stabilité du modèle le plus simple des SFA à savoir $M/M/1$ et ce après perturbation de la distribution de service de $M/G/1$. Le but serait alors de pouvoir approximer les caractéristiques de ces deux systèmes. Cependant le processus stochastique associé au $M/G/1 - GSPN$ n'est pas markovien, il a été nécessaire de faire appel aux processus semi régénératifs induits de ce système pour obtenir la CM induite qui lui est associée afin de pouvoir appliquer la méthode de stabilité forte.

14.2 Les modèles de RdP associés à $M/M/1$ et à $M/G/1$

Un réseau de Petri stochastique peut être interprété comme une représentation graphique d'un processus stochastique et pourra être étudié par une approche probabiliste. Cette approche a comme ambition une définition mathématique du processus stochastique sous-jacent au réseau de Petri. Cette formalisation permettra d'obtenir des résultats analytiques sur les réseaux de Petri dont les processus sont markoviens ou semi-régénératifs. La modélisation du système $M/M/1$ illustrée dans la Fig.14.1, est obtenue grâce au formalisme GSPN, cependant celle du système $M/G/1$, illustrée dans la Fig.14.2, on a dû l'obtenir par le formalisme MRSPN puisque ce système est non markovien et le recours aux processus semi régénératifs pour l'obtention de la CM induite était nécessaire. Les instants de régénérations considérés sont donnés en face des figures illustratives du $M/M/1 - GSPN$ et du $M/G/1 - MRSPN$.

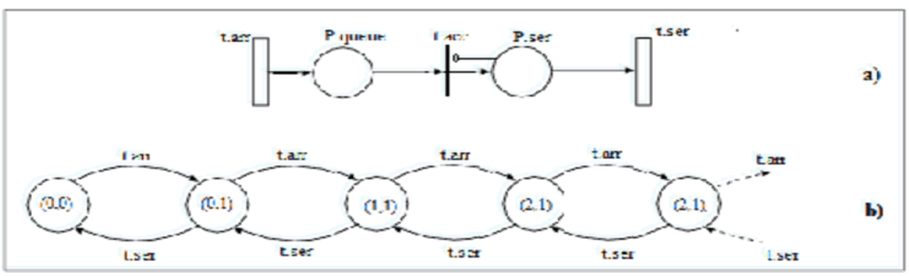

Figure 14.1. Le $M/M/1 - GSPN$ et son graphe d'accessibilité

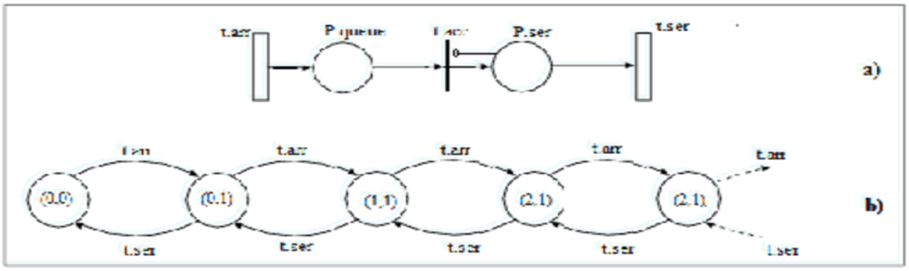

Figure 14.2. Le $M/G/1 - MRSPN$ et son graphe d'accessibilité

14.2.1 La matrice de transition de la chaîne de Markov induite du $M/M/1 - GSPN$

$$\overline{\mathbf{P}} = (p_i j) = \begin{cases} 1, i = 0, j = 1; \\ a_j = \frac{\mu}{1+\mu}\left(\frac{\lambda}{1+\mu}\right)^j, i > 0, j \geq i - 1; \\ 0;\ \text{otherwise.} \end{cases}$$

14.2.2 La matrice de transition de la chaîne de Markov induite du $M/M/1 - GSPN$

$$P = \begin{cases} 1,\ \text{if } i = 0, j = 1; \\ \int_0^\infty \frac{(\lambda x)^{j-i+1}}{(j-i+1)!} e^{-\lambda x} dE(x),\ \text{if, } i \geq 1, j \geq i - 1; \\ 0,\ \text{otherwise.} \end{cases} \tag{14.1}$$

14.3 Stabilité forte du $M/M/1 - GSPN$

Pour la mesure α, la fonction mesurable h et la fonction test v suivantes :

$$\begin{aligned} v &: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*, \\ &\quad l \longmapsto v(l) = \beta^l;\ \text{with} \quad \beta > 1, \\ h &: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}, \\ &\quad k \longmapsto h(k) = \begin{cases} 1 - a_1 = 1 - \frac{\mu}{1+\mu}\left(\frac{\lambda}{1+\mu}\right),\ \text{if } i = 0; \\ a_1 = \frac{\mu}{1+\mu}\left(\frac{\lambda}{1+\mu}\right),\ \text{if } i = 1; \\ 0, otherwise. \end{cases} \\ \alpha &: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ &\quad j \longmapsto \alpha(j) = \begin{cases} 1,\ \text{if } j = 1; \\ 0, \text{otherwise.} \end{cases} \end{aligned}$$

Le critère de stabilité [1] est vérifié sous les conditions du théorème suivant :

Théorème 14.1 *On suppose que $\frac{\lambda}{\mu} < 1$, alors pour tout β tel que $1 < \beta < \frac{\lambda}{\mu}$, la chaîne de Markov induite du $M/M/1-GSPN$ est fortement v-stable pour la fonction test $v(l) = \text{ß}^l$.*

14.4 Déviation de la distribution stationaire :

Cette déviation est donnée sous les conditions du théorème suivant :

Théorème 14.2 *Soit π (resp. $\overline{\pi}$) la distribution stationnaire de la chaîne de Markov induite du modèle $M/M/1-GSPN$ (resp : $M/G/1-MRSPN$). On supposant que les conditions du théorème précédent sont satisfaites, alors pour tout $1 < \beta < \frac{\lambda}{\mu}$ et sous la condition $w < \frac{(1-\rho)(\mu-\lambda\beta)}{2\mu-\lambda(1+\beta)}$ on a l'estimation suivante :*

$$\|\pi - \overline{\pi}\| \leq \frac{w\left(\frac{\mu-\lambda}{\mu-\lambda\beta}\right)\left(\frac{2\mu-\lambda(1+\beta)}{\mu-\lambda\beta}\right)}{1-\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)\left(\frac{1}{\beta(1-\frac{\beta\lambda}{\lambda+\mu})}\right)-w\left(\frac{2\mu-\lambda(1+\beta)}{\mu-\lambda\beta}\right)}. \tag{14.2}$$

14.5 Conclusion

Dans ce travail nous avons donner une idée générale sur nos travaux de recherche. Un intérêt particulier est porté sur l'application de la stabilité forte aux modèles des RdP vu que c'est la première tentative d'application de cette méthode sur ces modèles stochastiques. En effet, nous avons établie la stabilité forte du $GSPN - M/M/1$ puisque notre objectif était d'approximer les caractéristiques du $M/G/1 - MRSPN$ par celles du $M/M/1 - GSPN$ qui sont faciles à obtenir. Le modèle $M/M/1 - GSPN$ est plus simple et plus exploitable. Notre approche de stabilité, nous a permis d'obtenir des bornes supérieures explicites pour l'erreur de cette approximation. Pour cela, nous avons construit le RPSG associé à la file $M/M/1$ et le RPSMG associé à $G/M/1$ et nous avons analysé la stabilité de $M/M/1$ après perturbation de la distribution de la durée de service. En outre, nous avons obtenu les inégalités de stabilité. La principale contribution de ce papier consiste à combiner la théorie de la stabilité forte avec les modèles des RdP pour donner une solution Complète et précise de la stabilité.

Références

1. D. Aïssani and N. V. Kartashov. Ergodicity and stability of Markov chains with respect to operator topology in the space of transition kernels. Dokl. Akad. Nauk Ukr. SSR(ser. A), 11 :3–5, 1983.
2. N. Gharbi and M. Ioualalen, Numerical investigation of finite-source multiserver systems with different vacation policies. Journal of Computational and Applied Mathematics, 234(3) (2010) 625-635.

3. S. Hakmi, O. Lekadir and D. Aïssani, Performance analysis of priority queueing systems using generalized stochastic Petri nets. Article under review in the Applied mathematics and computation journal.
4. S. Hakmi, O. Lekadir and D. Aïssani, GSPN analysis of a multiple finite sources, non-preemptive priority queueing systems. Article under review in the Applied mathematical modelling journal.
5. L Ikhlef, O. Lekadir and D. Aïssani, MRSPN analysis of Semi-Markovian Finite Source Retrial Queues . Article under review in the Annals of Operations Research. Journal.
6. O. Lekadir, D. Aïssani, Strong stability in a Jackson queueing network, Theory of Probability and Mathematical Statistics 77 (2008) 86–98.
7. O. Lekadir, D. Aïssani, Stability of two-stage queues with blocking, in : H.A. Le Thi, P. Bouvry, T. Pham Dinh (Eds.), Modelling, Computation and Optimization in Information Systems and Management Sciences, in : Communications in Computer and Information Sciences (Series CCIS 14), Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2008, pp. 526–535.
8. O. Lekadir, D. Aïssani, Error bounds on practical approximation for two tandem queue with blocking and non-preemptive priority. Computers and Mathematics with Applications 61 (2011) 1810–1822.
9. O. Lekadir. Stabilité forte dans les réseaux de files d'attente. Thèse de Doctorat, Université A/Mira de Béjaia, 2011.