

Approximation de la distribution du temps de service par une distribution de type phase

Y. DJABALI^a, B. RABTA^b et D. AÏSSANI^c

Unité de recherche LaMOS (Laboratoires de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes)
Université de Bejaia, Bejaia 06000, Algérie

Tél. (213) 34 21 51 88,

^a email : dj.mina06@yahoo.fr

^b email : brabta@yahoo.fr

^c email : lamos bejaia@hotmail.com

Résumé L'analyse des systèmes d'attente avec une distribution générale, par exemple le système $G/G/1$, est très compliquée et ce genre de systèmes ne peuvent être résolus que d'une manière approximative. En particulier, souvent on essaye d'approximer une distribution générale par une distribution de type phase. Dans ce travail nous considérons pour le cas du système de files d'attente de type $GI/M/1$ (resp. $M/G/1$) la possibilité de l'approximer par un modèle $PH/M/1$ (resp. $M/PH/1$) où PH désigne une distribution hyperexponentielle $H2$ ou hypoexponentielle $HOE2$ suivant la valeur du coefficient de variabilité de la distribution d'origine. Nous utilisons la méthode de stabilité forte pour justifier cette approximation et estimer l'erreur qui en résulte.

Mots clés : Systèmes de files d'attente, distribution de type phase, méthode de stabilité forte, système $M/G/1$, système $M/PH/1$.

7.1 Introduction

Les lois de type phase sont la généralisation des distributions exponentielles. Ce sont des distributions de probabilités que l'on obtient par des combinaisons des distributions exponentielles, Comme cas particulier nous citons la distribution d'Erlang, hyper-exponentielle, hypo-exponentielle, Cox...

Souvent on approxime une distribution générale par une distribution de type phase. Cette approximation est toujours possible car l'ensemble des distributions de type phase est dense dans l'ensemble des distributions positives [2]. Plusieurs approches ont été développées dans la littérature pour trouver une distribution PH qui approxime convenablement une distribution générale G. Nous citons la méthode des moments qui consiste en la recherche d'une distribution PH possédant les mêmes premiers moments que la distribution d'origine [5, 12].

La méthode des moments utilisée à cette fin génère des erreurs comme toute autre méthode d'approximation. Ajoutons à cela les perturbations dues à la détermination imprécise des paramètres car ils sont estimés par des méthodes statistiques à partir de

données empiriques. Le modèle est alors sujet à des perturbations qui pourront naturellement induire une déviation dans ses caractéristiques par rapport à celles d'origine. D'où l'apparition du problème de stabilité.

La méthode de stabilité forte, est applicable à tous les modèles stochastiques de la recherche opérationnelle pouvant être régis par une chaîne de Markov [2]. L'application de cette méthode aux systèmes de files d'attente a fait l'objet d'un cycle complet de recherche.

Dans ce travail nous utilisons la méthode de stabilité forte pour justifier l'approximation d'une distribution positive quelconque par une distribution de type phase. Nous considérons pour le cas du système de files d'attente de type $GI/M/1$ (resp. $M/G/1$) la possibilité de l'approximer par un modèle $PH/M/1$ (resp. $M/PH/1$) où PH désigne une distribution hyperexponentielle H_2 ou hypoexponentielle HOE_2 suivant la valeur du coefficient de variabilité de la distribution d'origine. En effet, une distribution hyperexponentielle possède un coefficient de variabilité $cv > 1$ et ne peut donc approximer que les distributions positives avec un coefficient de variabilité dans le même intervalle. Par contre, si le coefficient de variabilité de la distribution à approximer est inférieur à 1, une loi hyperexponentielle ne peut pas être utilisée. Mais nous avons le choix entre plusieurs classes de distributions PH possédant un coefficient de variabilité $cv < 1$, comme l'hypoexponentielle, l'Erlang,...

7.1.1 Approximation par la loi hypoexponentielle

Dans cette section, nous utilisons la méthode des moments (égaler les deux premiers moments) pour approximer une distribution positive avec un coefficient de variabilité inférieur à 1 par une loi hypoexponentielle à deux phases.

Supposons que la distribution générale à approximer possède une moyenne μ et une variance σ^2 finie, on cherchera alors une distribution hypoexponentielle possédant les mêmes moments. On écrit alors :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} &= \mu, \\ \frac{1}{\mu_1^2} + \frac{1}{\mu_2^2} &= \sigma^2.\end{aligned}$$

En résolvant le système ci-dessus, et en prenant en considération que $\mu_1, \mu_2 > 0$, on obtient :

$$\mu_1 = \frac{2}{\mu - \sqrt{2\sigma^2 - \mu^2}}, \quad (7.1)$$

$$\mu_2 = \frac{2}{\mu + \sqrt{2\sigma^2 - \mu^2}}, \quad (7.2)$$

à condition que :

$$\frac{1}{2} < \frac{\sigma^2}{\mu^2} < 1.$$

Exemple 7.1. Considérons une variable aléatoire suivant une loi de Weibull de paramètres (a, b) . Notons par μ sa moyenne et par σ^2 sa variance. On a alors

$$\begin{aligned} \mu &= a\Gamma\left(1 + \frac{1}{b}\right), \\ \sigma^2 &= a^2\Gamma\left(1 + \frac{2}{b}\right) - \mu^2. \end{aligned}$$

Dans ce cas, l'approximation par une loi hypoexponentielle se fait à condition que :

$$0.75 < \frac{b\Gamma(2/b)}{(\Gamma(1/b))^2} < 1.$$

Autrement dit, le paramètre de forme b doit être défini dans l'intervalle $[1, 1.4355]$ pour pouvoir utiliser cette approximation.

7.1.2 Approximation par la loi hyperexponentielle

Considérons le cas d'approximation d'une distribution positive avec un coefficient de variabilité supérieur à 1 par une loi hyperexponentielle à deux phases.

Supposons que la distribution générale possède une moyenne μ et un coefficient de variabilité c_X^2 , on va les faire égaux avec les deux premiers moments de la distribution hyperexponentielle :

$$\begin{aligned} \frac{\tau_1}{\mu_1} + \frac{\tau_2}{\mu_2} &= \mu, \\ \frac{2\tau_1/\mu_1^2 + 2\tau_2/\mu_2^2}{(\tau_1/\mu_1 + \tau_2/\mu_2)^2} - 1 &= c_X^2. \end{aligned}$$

En résolvant le système ci-dessus, on obtient :

$$\mu_1 = \frac{1}{\mu} \left[1 - \sqrt{\frac{\tau_2 c_X^2 - 1}{\tau_1}} \right]^{-1}, \tag{7.3}$$

$$\mu_2 = \frac{1}{\mu} \left[1 + \sqrt{\frac{\tau_1 c_X^2 - 1}{\tau_2}} \right]^{-1}, \tag{7.4}$$

où $\tau_1, \tau_2 \geq 0$, $\tau_1 + \tau_2 = 1$ et $\mu_1, \mu_2 > 0$.

Exemple 7.2. Considérons une variable aléatoire suivant une loi de Weibull de paramètres (a, b) . Notons par μ sa moyenne et par c_X^2 son coefficient de variabilité. On a alors,

$$\begin{aligned}\mu &= a\Gamma\left(1 + \frac{1}{b}\right), \\ c_X^2 &= \frac{\Gamma(1 + 2/b)}{(\Gamma(1 + 1/b))^2} - 1.\end{aligned}$$

Dans ce cas, l'approximation par une loi hyperexponentielle se fait à condition que :

$$1 < c_X^2 < \frac{2\tau_1}{\tau_2} + 1.$$

Autrement dit, le paramètre de forme b doit être défini dans l'intervalle $[0.7, 1]$ pour pouvoir utiliser cette approximation.

7.1.3 Stabilité des systèmes de type phase

Dans cette section, nous nous intéressons à l'étude de la stabilité forte de la chaîne de Markov induite des systèmes $HOE_2/M/1$ et $H_2/M/1$ (resp. $M/HOE_2/1$ et $M/H_2/1$), après perturbation de la loi des arrivées (resp. des durées de service). En plus de l'affirmation qualitative, nous obtenons dans chaque cas une estimation de l'erreur d'approximation donnée par une borne supérieure de la norme de la déviation de la distribution stationnaire de la chaîne de Markov induite.

Stabilité forte dans le système $HOE_2/M/1$

Théorème 7.1 *Soit le système de files d'attente de type $HOE_2/M/1$. La chaîne de Markov induite $X = \{X_n, n = 0, 1, \dots\}$, où X_n représente le nombre de clients dans le système à l'arrivée du $n^{\text{ième}}$ client, est fortement v -stable pour une fonction $v(k) = \beta^k$ pour tout β tel que $1 < \beta < \beta_0$.*

où :

$$\beta_0 = \frac{(r_1 + r_2 + 1) + \sqrt{\Delta_0}}{2r_1r_2}, \quad (7.5)$$

avec :

$$r_1 = \lambda_1/\mu, \quad r_2 = \lambda_2/\mu, \quad \Delta_0 = (r_1 - r_2)^2 + 2(r_1 + r_2) + 1.$$

Théorème 7.2 *Soient π et $\tilde{\pi}$, les distributions stationnaires des chaînes de Markov induites respectivement des systèmes (Σ) et $(\tilde{\Sigma})$. Alors, pour tout $1 < \beta < \beta_0$, et sous la condition :*

$$\|\Delta\|_v < \frac{1 - \rho}{C}, \quad (7.6)$$

on a :

$$\|\pi_j - \tilde{\pi}_j\|_v \leq \|\Delta\|_v C \|\pi\|_v (1 - \rho - C \|\Delta\|_v)^{-1}, \quad (7.7)$$

où :

- $\rho = \frac{r_1 r_2 \beta}{(r_2 + 1 - \frac{1}{\beta})(r_1 + 1 - \frac{1}{\beta})}$,
- $\|\pi\|_v = \frac{1 - \sigma}{1 - \beta \sigma}$,
- $C = 1 + \|\mathbf{1}\|_v \|\pi\|_v = \frac{2 - \sigma(1 + \beta)}{1 - \beta \sigma}$,
- $\|\Delta\|_v \leq (1 + \beta) \mathcal{W}(G, H)$, avec $\mathcal{W}(G, H) = \int_0^\infty |G - H|(dt)$.

Stabilité forte dans le système $H_2/M/1$

Théorème 7.3 Soit le système de files d'attente $H_2/M/1$. La chaîne de Markov induite $X^* = \{X_n^*, n = 0, 1, \dots\}$, où X_n^* représente le nombre de clients dans le système à l'arrivée du $n^{\text{ième}}$ client, est fortement v -stable pour une fonction $v(k) = \beta^k$ pour tout β tel que $1 < \beta < \beta_0$, où :

$$\beta_0 = \frac{(r_1 + r_2 + 1) + \sqrt{\Delta_0}}{2(\tau_1 r_1 + \tau_2 r_2 + r_1 r_2)}, \quad (7.8)$$

avec :

$$r_i = \lambda_i / \mu, \quad \Delta_0 = (r_1 + r_2 + 1)^2 - 4(\tau_1 r_1 + \tau_2 r_2 + r_1 r_2).$$

Théorème 7.4 Soient π^* et $\tilde{\pi}$, les distributions stationnaires des chaînes de Markov induites respectivement des systèmes (Σ^*) et $(\tilde{\Sigma})$. Alors, pour tout $1 < \beta < \beta_0$, et sous la condition :

$$\|\Delta\|_v < \frac{1 - \rho}{C}, \quad (7.9)$$

on a :

$$\|\pi_j^* - \tilde{\pi}_j\|_v \leq \|\Delta\|_v C \|\pi^*\|_v (1 - \rho - C \|\Delta\|_v)^{-1}, \quad (7.10)$$

où :

- $\rho = \frac{\tau_1 r_1 \beta}{r_1 + 1 - \frac{1}{\beta}} + \frac{\tau_2 r_2 \beta}{r_2 + 1 - \frac{1}{\beta}}$,
- $\|\pi^*\|_v = \frac{1 - \alpha}{1 - \beta \alpha}$,
- $C = 1 + \|\mathbf{1}\|_v \|\pi^*\|_v = \frac{2 - \alpha(1 + \beta)}{1 - \beta \alpha}$,
- $\|\Delta\|_v \leq (1 + \beta) \mathcal{W}_1(G, L)$, avec $\mathcal{W}_1(G, L) = \int_0^\infty |G - L|(dt)$.

Stabilité forte dans le système $M/HOE_2/1$

Théorème 7.5 Soit le système de files d'attente de type $M/HOE_2/1$. La chaîne de Markov induite $\hat{X} = \{\hat{X}_n, n = 0, 1, \dots\}$, où \hat{X}_n représente le nombre de clients dans le système après le départ du $n^{\text{ième}}$ client, est fortement v -stable pour une fonction $v(k) = \beta^k$ pour tout β tel que $1 < \beta < \beta_0$; où :

$$\beta_0 = \frac{(\lambda^2 + \lambda\mu_1 + \lambda\mu_2) - \sqrt{\Delta}}{2\lambda^2}, \quad (7.11)$$

avec :

$$\Delta = \lambda^2 [\lambda^2 + 2\lambda(\mu_1 + \mu_2) + (\mu_1 - \mu_2)^2].$$

Théorème 7.6 Soient $\hat{\pi}$ et $\bar{\pi}$, les distributions stationnaires des chaînes de Markov décrivant respectivement les états des systèmes $(\hat{\Sigma})$ et $(\bar{\Sigma})$. Alors, pour tout $1 < \beta < \beta_0$, et sous la condition :

$$\|\Delta\|_v < \frac{1 - \rho}{C}; \quad (7.12)$$

on a :

$$\|\bar{\pi}_j - \hat{\pi}_j\|_v \leq \|\Delta\|_v C \|\hat{\pi}\|_v (1 - \rho - C\|\Delta\|_v)^{-1}, \quad (7.13)$$

où :

- $\rho = \frac{\mu_1\mu_2}{\beta(\lambda + \mu_2 - \beta\lambda)(\lambda + \mu_1 - \beta\lambda)}$,
- $\|\hat{\pi}\|_v = \frac{\mu_1\mu_2 - \lambda(\mu_1 + \mu_2)}{\mu_1\mu_2 - \lambda\beta(\mu_1 + \mu_2 + \lambda(1 - \beta))}$,
- $\|\Delta\|_v < \beta W$, avec $W = \int_0^\infty |F - H|(dt)$.

Stabilité forte dans le système $M/H_2/1$

Théorème 7.7 Soit le système de files d'attente $M/H_2/1$. La chaîne de Markov induite $\check{X} = \{\check{X}_n, n = 0, 1, \dots\}$, où \check{X}_n représente le nombre de clients dans le système après le départ du $n^{\text{ième}}$ client, est fortement v -stable pour une fonction $v(k) = \beta^k$ pour tout β tel que $1 < \beta < \beta_0$; où :

$$\beta_0 = \frac{(\lambda^2 + \lambda\mu_1 + \lambda\mu_2) - \sqrt{\Delta_1}}{2\lambda^2}, \quad (7.14)$$

avec :

$$\Delta_1 = \lambda^4 + 2\lambda^3(1 - 2\tau_1)(\mu_1 - \mu_2) + (\lambda\mu_1 - \lambda\mu_2)^2.$$

Théorème 7.8 Soient $\check{\pi}$ et $\bar{\pi}$, les distributions stationnaires des chaînes de Markov décrivant respectivement les états des systèmes $(\check{\Sigma})$ et $(\bar{\Sigma})$. Alors, pour tout $1 < \beta < \beta_0$, et sous la condition :

$$\|\Delta\|_v < \frac{1 - \rho}{C}, \quad (7.15)$$

on a :

$$\|\bar{\pi}_j - \check{\pi}_j\|_v \leq \|\Delta\|_v C \|\check{\pi}\|_v (1 - \rho - C\|\Delta\|_v)^{-1}, \quad (7.16)$$

où :

- $\rho = \frac{\tau_1\mu_1}{\beta(\lambda + \mu_1 - \beta\lambda)} + \frac{\tau_2\mu_2}{\beta(\lambda + \mu_2 - \beta\lambda)}$,
- $\|\Delta\|_v < \beta w$, avec $w = \int_0^\infty |F - L|(dt)$.

7.1.4 Application numérique

Dans cette section, nous présentons certaines applications numériques concernant l'estimation des bornes de perturbation présentées précédemment. Pour cela, nous avons construit à partir des résultats de la méthode de stabilité forte un algorithme permettant d'estimer l'erreur due à l'approximation et un simulateur pour simuler les écarts entre les distributions stationnaires des systèmes $GI/M/1$ et $PH/M/1$ (resp. $M/G/1$ et $M/PH/1$).

Cas d'approximation par le système $HOE_2/M/1$

Considérons le système de files d'attente $HOE_2/M/1$ où la loi des arrivées des clients est hypoexponentielle de paramètres λ_1, λ_2 définies dans (7.1), (7.2).

Ainsi, en fixant la loi des arrivées du système réel $GI/M/1$ par la loi de Weibull de paramètres (a, b) , où $b = 1.3$. L'implémentation de l'algorithme et du simulateur dans ce cas a permis d'obtenir les résultats représentés dans le tableau et le graphe suivants :

a	β_{min}	β_{max}	β	Simulation	Algorithme(C)
10	1.0086	1.5597	1.0600	0.6072	4.5570
15	1.0044	2.8378	1.0767	0.4878	1.2467
20	1.0036	4.1091	1.0912	0.4278	0.7294
25	1.0032	5.3701	1.1041	0.2962	0.5187
30	1.0030	6.6157	1.1158	0.2569	0.4043
40	1.0028	9.0373	1.1368	0.1370	0.2830
50	1.0027	11.3224	1.1553	0.1047	0.2194
60	1.0027	13.4188	1.1720	0.0902	0.1803
80	1.0026	16.8730	1.2010	0.0722	0.1346
100	1.0026	19.1955	1.2257	0.0440	0.1087

Table 7.1. Tableau comparatif des erreurs.

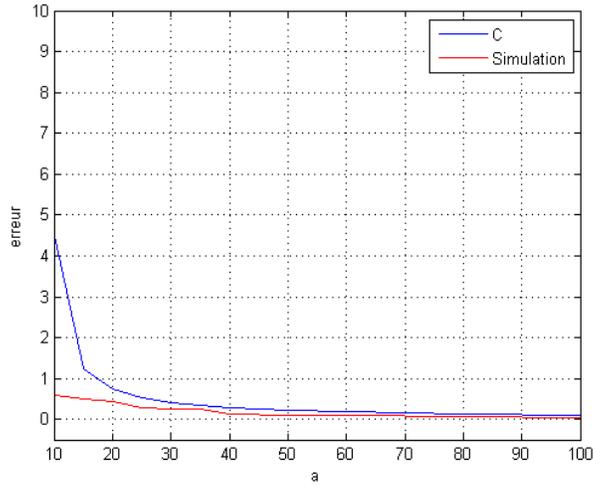


Figure 7.1. Courbes comparatives des erreurs.

Cas d'approximation par le système $H_2/M/1$

En fixant la loi des arrivées du système réel par la loi de Weibull de paramètres (a, b) , où $b = 0.9$. On a obtenu les résultats suivants :

a	β_{min}	β_{max}	$\beta_{idéal}$	Simulation	Algorithme(C)
10	1.0142	1.4066	1.0762	0.4776	7.9462
15	1.0053	2.5836	1.0928	0.4150	1.5252
20	1.0041	3.7022	1.1066	0.2925	0.8547
25	1.0036	4.75	1.1185	0.2919	0.5985
30	1.0033	5.7340	1.1291	0.2585	0.4631
40	1.0030	7.4414	1.1475	0.1715	0.3222
50	1.0029	8.8051	1.1631	0.1483	0.2495
60	1.0028	9.8426	1.1768	0.1075	0.2051
80	1.0027	11.1045	1.1997	0.0818	0.1534
100	1.0026	11.5923	1.2184	0.0331	0.1243

Table 7.2. Tableau comparatif des erreurs.

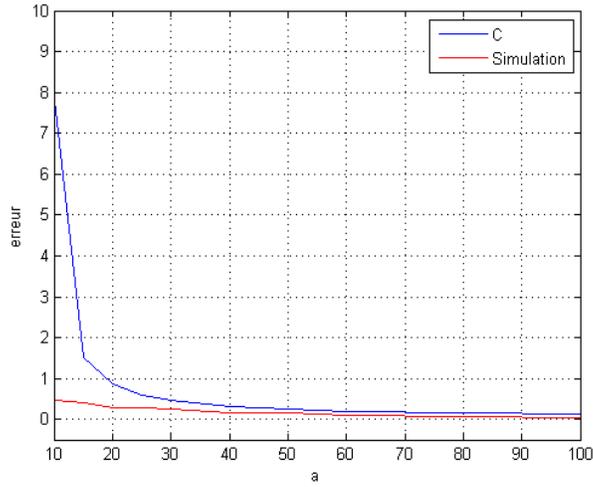


Figure 7.2. Courbes comparatives des erreurs.

Cas d'approximation par le système $M/HOE_2/1$

Le flot des arrivées des clients est poissonnien de paramètre $\lambda = 0.5$. La loi de la durée de service des clients est hypoexponentielle de paramètres μ_1, μ_2 donnés par (7.1), (7.2). La loi de la durée de service du système réel est donnée par la loi de Weibull de paramètres (a, b) , où $b = 1.3$. L'implémentation de l'algorithme et du simulateur dans ce cas a permis d'obtenir les résultats représentés dans le tableau suivant :

a	β_{min}	β_{max}	$\beta_{idéal}$	Simulation	Algorithme(C)
5	-	-	-	-	-
10	-	-	-	-	-
18	1.8700	2.0882	1.9729	0.1329	318.2881
20	1.4986	2.8989	1.9712	0.1458	8.5822
25	1.2959	4.2001	1.9706	0.1161	2.4889
30	1.2163	5.3785	1.9720	0.0912	1.4522
40	1.1425	7.6501	1.9757	0.0703	0.7908
50	1.1067	9.8838	1.9790	0.0536	0.5429
60	1.0854	12.1031	1.9816	0.0479	0.4132
70	1.0712	14.3153	1.9837	0.0403	0.3334
80	1.0611	16.5235	1.9853	0.0350	0.2795
100	1.0476	20.9332	1.9879	0.0322	0.2111

Table 7.3. Tableau comparatif des erreurs.

Ces résultats sont représentés par le graphe suivant :

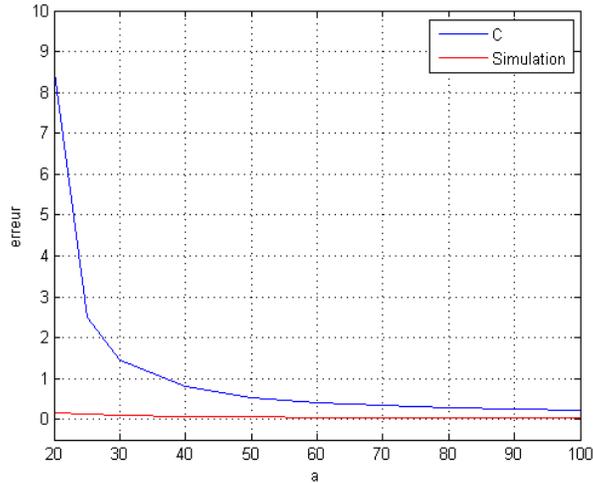


Figure 7.3. Courbes comparatives des erreurs.

Cas d'approximation par le système $M/H_2/1$

Le flot des arrivées des clients est poissonnien de paramètre $\lambda = 0.2$.

La loi de la durée de service des clients est hyperexponentielle de paramètres μ_1, μ_2 donnés par (7.3), (7.4), $\tau_1 = \frac{1}{2}$, $\tau_2 = \frac{1}{2}$.

La loi de la durée de service du système réel est donnée par la loi de Weibull de paramètres (a, b) , où $b = 0.9$.

Les résultats obtenus sont représentés dans le tableau suivant :

a	β_{min}	β_{max}	$\beta_{idéal}$	Simulation	Algorithme(C)
5	-	-	-	-	-
10	-	-	-	-	-
18	1.6346	2.5357	1.9860	0.1101	20.1264
20	1.4454	3.1881	1.9862	0.0971	5.9768
25	1.2774	4.5141	1.9864	0.0385	2.1635
30	1.2055	5.7441	1.9869	0.0424	1.3196
40	1.1368	8.1289	1.9888	0.0328	0.7407
50	1.1029	10.4790	1.9903	0.0151	0.5147
60	1.0825	12.8156	1.9915	0.0132	0.3943
70	1.0690	15.1454	1.9924	0.0114	0.3195
80	1.0592	17.4714	1.9932	0.0081	0.2686
100	1.0462	22.1170	1.9945	0.0074	0.2036

Table 7.4. Tableau comparatif des erreurs.

Ces résultats sont représentés par le graphe suivant :

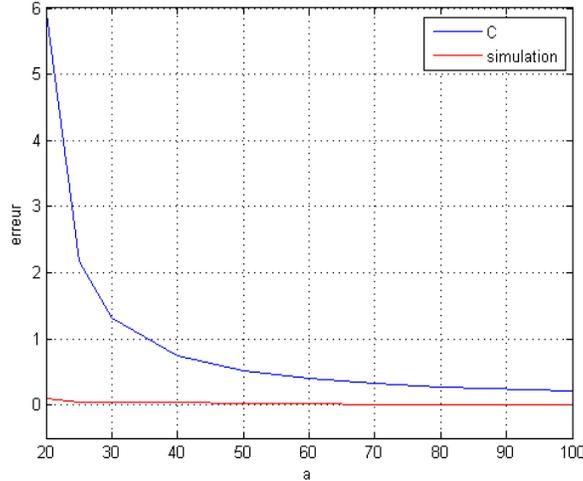


Figure 7.4. Courbes comparatives des erreurs.

Interprétation des résultats

En faisant varier le paramètre de la loi Weibull (a), nous avons calculé l'erreur d'approximation donnée par une borne supérieure de la norme de la déviation de la distribution stationnaire pour différentes valeurs de β . Parallèlement, le programme de simulation nous a fourni une estimation de l'écart réel par rapport à la même norme.

Pour des petites valeurs du paramètre (a), la condition de stabilité associée à la constante n'est pas vérifiée. Cela signifie que la distribution de Weibull avec cet ensemble de paramètres ne peut être approximée par une distribution PH à deux phases. Dans ce cas, il est nécessaire d'envisager des moments plus élevés pour améliorer la précision de l'approximation.

7.2 Conclusion

Dans ce travail nous avons utilisé la méthode de stabilité forte pour donner la justification mathématique de la méthode d'approximation par les distributions de type phase et nous avons proposé aussi des estimations des erreurs commises. Nous avons étudié la stabilité forte des chaînes de Markov induites dans les systèmes de files d'attente $HOE_2/M/1$,

$H_2/M/1$, $M/HOE_2/1$, et $M/H_2/1$. Il nous a été alors possible de clarifier les conditions de stabilité et d'approximation sous différents types de perturbations, i.e., la perturbation de la loi des arrivées du système $GI/M/1$ et la perturbation de la durée de service du système $M/G/1$. De plus, nous avons estimé les bornes d'écart entre les distributions stationnaires des systèmes idéals et celles des systèmes perturbés.

Références

1. D. Aïssani and N. V. Kartashov, *Ergodicity and stability of Markov chains with respect to operator topology in the space of transition kernels*. Dokl. Akad. Nauk Ukr. SSR (ser. A) 11,3–5, 1983.
2. S. Asmussen, *Applied probability and queues*, 2nd ed. Springer, New York, 2003.
3. L. Bouallouche-Medjkoune and D. Aïssani *Measurement and performance of the strong stability method*. Theory of Probability and Mathematical Statistics, 72, 1–9, 2005.
4. L. Bouallouche-Medjkoune and D. Aïssani *Performance analysis approximation in a queueing system of type $M/G/1$* . Mathematical Methods of Operation Research, 63(2), 341–356, 2006.
5. B. Haverkort, *Approximate analysis of networks of PH/PH/1/K queues : Theory and tool support*, 3rd ed. Quantitative Evaluation of Computing and Communication Systems, pages 239–253, 1995.
6. N. V. Kartashov, *Strongly stable Markov chains*. VSP, Utrecht, 1996.
7. G. Latouche and V. Ramaswami, *An Experimental Evaluation of the matrix geometric methods for the GI/PH/1 queue*. Communications in Statistics-Stochastic Models, 5, 629–667, 1989.
8. G. Latouche and V. Ramaswami, *Introduction to Matrix Analytic Methods in Stochastic Modelling*. ASA-SIAM, Philadelphia PA, 1999.
9. M. Neuts, *Probability distributions of phase type*. In L. Amicorum and H. Florin, University of Louvain, pages 173–206, 1975.
10. M. Neuts, *Matrix-Geometric Solutions in Stochastic Models : An Algorithmic Approach*. Johns Hopkins University Press, Baltimore, Md 1981.
11. T. Osogami, *Analysis of Multi-server Systems via Dimensionality Reduction of Markov Chains*. PhD thesis, School of Computer Science Carnegie Mellon University, 2005.
12. B. Sengupta, *Phase-type representations for matrix-geometric solutions*. Stochastic Models, 6, 163–167, 2005.