Séminaire Mathématique de Béjaïa (LaMOS)
Volume 12, 2013, pp. 25 - 29

4

Nouvelles bornes de stabilité dans les modèles de risque : approche par processus régénératif

S. HOCINE[a], D. AÏSSANI[b] et Z. BENOUARET[c]

Unité de recherche LaMOS (Laboratoires de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes)
Université de Bejaia, Bejaia 06000, Algérie
Tél. (213) 34 21 51 88,
[a] email : hsafia4@gmail.com
[b] email : lamos_bejaia@hotmail.com
[c] email : benouaret_z@yahoo. fr

Résumé In the literature, the risk models recently studied are becoming increasingly complex. Therefore, it is rare to find explicit analytical relations to calculate the ruin probabilities. In this work, we are interested to the strong stability approach of the two dimensional classical risk model with large claims. In the application of the quantitative aspect of the strong stability method in the considered model and in order to deduce a bound stability of the deviation of ruin probabilities, we will use the regenerative processes theory.

Key words : Regenerative Processes, Strong Stability, Risk Models, Ruin Probability.

Résumé Dans la littérature, les modèles de risque récemment étudiés deviennent de plus en plus complexes. Par conséquent, il est rare d'avoir des relations analytiques explicites pour le calcul de la probabilité de ruine. Dans ce travail, nous nous intéressons à l'approche de la stabilité forte dans le modèle de risque classique à deux dimensions avec des réclamations larges. Dans l'application de l'aspect quantitatif de la méthode de la stabilité forte et afin de déduire une borne de stabilité de la déviation de la probabilité de ruine, nous utilisons la théorie des processus régénératifs.

Mots clés : Processus Régénératifs, Stabilité Forte, Modèles de Risque, Probabilité de Ruine.

4.1 Introduction

Dans la théorie de la ruine, le problème de stabilité a été développé par Beirlant and Rachev en 1987 (cf. [10]). Par la suite, l'académicien V. Kalashnikov a réalisé la première application de la méthode de stabilité forte (cf. [7]) aux modèles de risque (cf. [4]) où il a obtenu des bornes de stabilité de la probabilité de ruine avec un calcul explicite des constantes. Par conséquent, plusieurs autres applications de la méthode de la stabilité forte ont été réalisées dans différents modèles de risque (cf. [5, 8, 1]).
Cependant, l'estimation de la probabilité de ruine par la méthode de stabilité forte basée sur l'approche par chaînes de Markov, rencontre des difficultés dans le cas d'un modèle de risque avec des réclamations larges. Pour pallier à cette difficulté, Kalashnikov a proposé

l'utilisation de la théorie des processus régénératifs (cf. [3, 4]).
Dans ce travail, nous appliquons la méthode de stabilité forte et nous utilisons les processus régénératifs dans un modèle de risque spécifique. Il s'agit du modèle classique à deux dimensions avec indépendance des réclamations. Dans cette analyse, le processus inverse $\{V_n\}$ est à la fois de Markov et régénératif, si l'on choisit des instants successifs où V_n prend la valeur 0 comme époque de régénération.

4.2 Processus Régénératifs

Un processus stochastique $X = \{X(t) : t > 0\}$ est appelé processus régénératif s'il existe une variable aléatoire $R_1 > 0$ tel que :

- $\{X(t + R_1) : t > 0\}$ est indépendant de $\{X(t) : t < R_1\}$,
- $\{X(t + R_1) : t > 0\}$ est stochastiquement équivalent à $\{X(t) : t > 0\}$,

où R_1 appelée époque de régénération (ou temps de régénération) et on dit que X se régénère ou se réinitialise à ce point.
Ce type de processus est d'un grand intérêt dans plusieurs modèles stochastiques, comme les systèmes de fils d'attente (cf. [2]). En 2000, Kalashnikov a proposé la théorie des processus régénératifs comme solution pour l'application de la méthode de stabilité dans le modèle de risque avec des réclamations larges.

4.3 Probabilités de ruine d'un modèle de risque classique à deux dimensions

Le modèle de risque classique à deux dimensions est défini comme suit :

$$\begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} t - \sum_{i=1}^{N(t)} \begin{pmatrix} Z_i^1 \\ Z_i^2 \end{pmatrix}, \qquad t \geq 0. \tag{4.1}$$

Ce processus stochastique, défini par la formule (4.1), représente la réserve d'une compagnie d'assurance qui possède deux branches d'activité.
Le nombre de réclamations (ou de sinistres) $N(t)$ survenus jusqu'au temps t ($t \geq 0$) est représenté par un processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
$\{Z_i^1, Z_i^2\}_{i\in\mathbb{N}^*}$ sont deux suites de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées et indépendantes du processus de Poisson $\{N(t),\ t \geq 0\}$, de fonction de répartition (F_1, F_2) et de moyenne (m_1, m_2) respectivement.

Dans ce modèle, le temps de ruine peut être défini de plusieurs façons. Dans ce travail, nous nous intéressons à la définition suivante :

$$T_{som} = \inf\{t/ \quad X_1(t) + X_2(t) < 0\}. \tag{4.2}$$

La probabilité de ruine en fonction du temps de ruine défini précédemment est

$$\Psi_{som}(u_1, u_2) = \mathbb{P}\left(T_{som} < \infty/(X_1(0), X_2(0)) = (u_1, u_2)\right). \tag{4.3}$$

4.4 Processus régénératifs dans le modèle de risque classique à deux dimensions

On considère le modèle de risque classique à deux dimensions défini précédemment par la formule (4.1).
Le processus inverse associé à ce modèle est construit d'une manière à ce que sa distribution stationnaire corresponde exactement à la probabilité de ruine étudiée (cf. [4, 5]).

4.4.1 Processus inverse

Puisque la ruine peut seulement apparaître aux instants d'arrivée des réclamations, on peut réécrire $\Psi_{som}(u_1, u_2)$, définie par la relation (4.3), de la manière suivante :

$$\Psi_{som}(u) = \mathbb{P}\left(\inf_{n\geq 1}(X^1_{T_n} + X^2_{T_n}) < 0/ \quad X^1_0 + X^2_0 = u\right), \tag{4.4}$$

où $u = u_1 + u_2$ et $\{T_n,\ n \geq 1\}$ est une séquence de variables aléatoires indépendantes qui représentent les instants d'arrivées des réclamations, avec $T_n = \theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n$ et θ_n est une variable aléatoire qui représente la durée de temps entre la $(n-1)^{\text{ème}}$ et la $n^{\text{ème}}$ réclamation.
Le processus inverse associé au modèle considéré est de la forme suivante :

$$\begin{cases} V_0 = 0, \\ V_{n+1} = \left(V_n - (c_1 + c_2)\ \theta_{n+1} + Z^1_{n+1} + Z^2_{n+1}\right)_+, \qquad \forall\ n > 0. \end{cases}$$

En fonction de la chaîne de Markov $\{V_n\}_{n\geq 0}$, $\Psi_{som}(u)$ s'écrit comme suit :

$$\Psi_{som}(u) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(V_n > u) = 1 - \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(V_n \leq u) = 1 - G(u), \tag{4.5}$$

où $G(u) = \lim\limits_{n\to\infty} G_n(u) = \lim\limits_{n\to\infty} P(V_n \leq u)$.
Remarque :
Signalons que la construction de processus inverse est purement algébrique et elle n'utilise

pas la structure probabiliste de $\{X_{T_n}\}$ (cf. Asmussen et Sigman [9] et Enikeeva et al. [5]). Suivant la forme recursive de la chaîne $\{V_n\}_{n\geq 0}$ donnée par l'équation (4.4.1), V_{n+1} ne dépend que de V_n, θ_{n+1}, Z^1_{n+1} et Z^2_{n+1}, où les variables aléatoires θ_{n+1}, Z^1_{n+1} et Z^2_{n+1} sont indépendantes de n et de l'état du système avant T_n. D'où, $\{V_n\}_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov homogène à espace d'état continu $E = \mathbb{R}^+$.
De plus, si on pose $\sigma_0 = 0$, $\sigma_{k+1} = \min\{n > \sigma_k,\ V_n = 0\}$, $k \geq 0$, alors,
$\forall\ k \geq 0$, la chaîne $\{V_{\sigma_k+n}\}_{n\geq 0}$ est de même distribution que la chaîne initiale $\{V_n\}_{n\geq 0}$ et indépendante de $\{V_j\}_{j\leq\sigma_k}$. A partir de cette propriété, on déduit que $\{V_n\}_{n\geq 0}$ est un processus régénératif où $\{\sigma_k\}$ sont ses temps (époques) de régénération.

4.4.2 Inégalité de stabilité

Considérons le modèle de risque classique à deux dimensions où le processus inverse associé à Ψ_{som} est donné par (4.4.1). Pour $\epsilon > 0$, soit $\mathbb{A}_d \subset \mathbb{A}$ le sous ensemble des valeurs admissibles perturbées du vecteur des paramètres a gouvernant le modèle de risque considéré :

$$\mathbb{A}_d = \left\{ \begin{array}{l} a: \quad \mathbb{E}\left(\exp\{\epsilon(Z^1_1 + Z^2_1 - (c_1+c_2)\theta_1)\}\right) \leq \rho < 1 \\ \qquad \text{et} \\ \qquad\quad \mathbb{E}\ \ exp\ (\epsilon(Z^1_1 + Z^2_1)) \leq \beta(\epsilon) < \infty \\ \qquad\quad \text{sont vérifiées} \\ \end{array} \right\}.$$

Autrement dit, $\mathbb{A}_d$ contient tous les vecteurs paramètres a satisfaisants les relations :

$$\mathbb{E}\left(\exp\{\epsilon(Z^1_1 + Z^2_1 - (c_1+c_2)\theta_1)\}\right) \leq \rho < 1 \tag{4.6}$$

et

$$\mathbb{E}\ \ exp\ (\epsilon(Z^1_1 + Z^2_1)) \leq \beta(\epsilon) < \infty, \tag{4.7}$$

où

$$\rho = \mathbb{E}\exp\{\epsilon(Z^1_1 + Z^2_1 - (c_1+c_2)\theta_1)\}; \tag{4.8}$$

et

$$\beta(\epsilon) = \mathbb{E}\ \ exp\ (\epsilon(Z^1_1 + Z^2_1)). \tag{4.9}$$

Prenons la fonction poids $v(u) = e^{\epsilon u}$, $u \geq 0$. Alors, si $a\ \ et\ \ a'$ appartiennent à $\mathbb{A}_d$, nous obtenons la borne de stabilité suivante :

$$\sup_n |\Psi_n - \Psi'_n|_v = \sup_n |G_n - G'_n|_v \leq \frac{\gamma(\epsilon)\ \ \mu}{1-\rho}; \tag{4.10}$$

avec

$$\gamma(\epsilon) = \sup_n\ \mathbb{E}\ \ e^{\epsilon V_n} < \infty; \tag{4.11}$$

où toutes les constantes sont de formes explicites.

4.5 Conclusion

Dans ce travail, nous avons réalisé, en utilisant les processus régénératifs, l'application de la méthode de stabilité forte dans le modèle de risque classique à deux dimensions avec des réclamations larges.
Nous avons donc clarifié les conditions d'approximation de la probabilité de ruine d'un modèle de risque perturbé par celle du modèle de risque classique à deux dimensions.
En termes de perspective, nous envisageons plusieurs voies de développement :

- Élargir l'application des processus régénératifs dans d'autre modèles de risque classique à deux dimensions (dans le cas non Cramér, avec investissements de la réserve,. . .).
- Illustrer numériquement les résultats de la méthode de la stabilité dans les modèles de risque classique à deux dimensions avec des montants de réclamations de distribution exponentielle et subexponentielle, et de réaliser par la suite une étude comparative entre les deux approches par chaîne de Markov et en utilisantles processus régénératifs).

Références

1. Z. Benouaret and D. Aïssani. Strong stability in a two dimensional classical risk model with independant claims. *Scandinavian Actuarial Journal, vol. 2010*, *N°* 2, 83–92, 2010.
2. V. Kalashnikov and S. G. Foss. Regeneration and renovation in queues. *Queueing Systems Theory Appl, vol. 08*, 211–224, 1991.
3. V. Kalashnikov. *Topics on Regenerative Process.* CRC Press, Boca Raton, 1994.
4. V. Kalashnikov. The Stability concept for stochastic risk models. *Working Paper Nr 166. Lab. of Actuarial Mathematics. University of Copenhagen*, 2000.
5. F. Enikeeva, V. Kalashnikov and D. Rusaityte. Continuity estimates for ruin probabilities. *Scandinavian Actuarial Journal*, *N°* 1, 18–39, 2001.
6. N. V. Kartashov. Strong Stable Markov Chains. *VSP, Utrecht*, 1996.
7. D. Aïssani and N. V. Kartashov. Ergodicity and stability of Markov chains with respect to operator topology in the space of transition kernels. *Compte Rendu Academy of Sciences U. S. S. R, ser. A, 11*, 3–5, 1983.
8. D. Rusaityte. Stability bounds for ruin probabilities. *Phd thesis, Copenhagen University*, 2002.
9. S. Asmussen and K. Sigman. Monotone stochastic recursions and their duals. *Probability in Engineering and Informational Sciences*, 1-20, 1996.
10. J. Beirlant and S. T. Rachev. The problems of stability in insurance mathematics. *Insurance : Mathematics and Economics 6*, 179–188, 1987.