Séminaire Mathématique de Béjaïa (LaMOS)
Volume 11, 2012, pp. 57 - 59

13

Stabilité des processus QBD (Quasi Birth and Death process)

Yasmina DJABALI, Boualem RABTA, et Djamil AÏSSANI

LAboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes LAMOS
Université de Béjaïa 06000, Algérie.

Résumé L'analyse des systèmes d'attente avec une distribution générale est très compliquée et ce genre de systèmes ne peuvent être résolus que d'une manière approximative. En particulier, il est souvent désiré d'approximer une distribution générale par une distribution de type phase. Nous obtenons ainsi des modèles de files d'attente de type phase qui peuvent être résolus d'une manière exacte en utilisant la méthode de la matrice géométrique après représentation par des processus de quasi naissance et mort (QBD). Ce travail utilise la méthode des moments pour approximer une distribution générale G par une distribution de type phase PH. Pour cela nous avons estimer l'erreur due à l'approximation ainsi que la norme par rapport à laquelle l'erreur est établie.

Mots clefs : Processus QBD, Système de files d'attente de type phase (PH), Stabilité forte, Inégalité de stabilité.

13.1 Introduction

La méthode des moments peut être utilisée pour l'approximation d'une distribution générale G par une distribution de type phase PH. Elle a été employée dans plusieurs travaux [**?**, **?**, **?**]. L'idée derrière cette approche est simple : la distribution de type phase PH doit être choisie assez proche de G dans le sens où les (premiers) moments des deux distributions G et PH coïncident. Les auteurs utilisent souvent les deux ou trois premiers moments : la moyenne, la variance, et le moment d'ordre trois. En général, il faut passer à des moments d'ordre supérieurs pour obtenir une très bonne approximation.

13.2 Approximation par la loi hypoexponentielle

Dans cette section, nous utilisons la méthode des moments (égaler les deux premiers moments) pour approximer une distribution positive avec un coefficient de variabilité inférieur à 1 par une loi hypoexponentielle à deux phases.
Les premiers moments de la distribution hypoexponentielle sont donnés comme suit :

- Le moment d'ordre 1 (la moyenne) : $\mu_1 = \sum_i (\frac{1}{\lambda_i})$.
- Le moment d'ordre 2 (la variance) : $\mu_2 = \sum_i (\frac{1}{\lambda_i^2})$.

Supposons que la distribution générale à approximer possède une moyenne μ et une variance σ^2 finie, on cherchera alors une distribution hypoexponentielle possédant les mêmes moments. On écrit alors :

$$\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} = \mu, \tag{13.1}$$

$$\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} = \sigma^2. \tag{13.2}$$

En résolvant le système ci-dessus, et en prenant en considération que $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, on obtient :

$$\lambda_1 = \frac{2}{\mu - \sqrt{2\sigma^2 - \mu^2}}, \tag{13.3}$$

$$\lambda_2 = \frac{2}{\mu + \sqrt{2\sigma^2 - \mu^2}}, \tag{13.4}$$

à condition que :

$$\frac{1}{2} < \frac{\sigma^2}{\mu^2} < 1.$$

13.3 Approximation par la loi hyperexponentielle

Dans cette section, nous utilisons la méthode des moments pour approximer une distribution positive avec un coefficient de variabilité supérieur à 1 par une loi hyperexponentielle à deux phases.
Supposons que la distribution générale possède une moyenne μ et un coefficient de variabilité c_X^2, on va les faire égaler avec les deux premiers moments de la distribution hyperexponentielle :

$$\frac{\tau_1}{\lambda_1} + \frac{\tau_2}{\lambda_2} = \mu,$$
$$\frac{2\tau_1/\lambda_1^2 + 2\tau_2/\lambda_2^2}{(\tau_1/\lambda_1 + \tau_2/\lambda_2)^2} - 1 = c_X^2.$$

En résolvant le système ci-dessus, on obtient :

$$\lambda_1 = \frac{1}{\mu}\left[1 - \sqrt{\frac{\tau_2}{\tau_1}\frac{c_X^2 - 1}{2}}\right]^{-1}, \tag{13.5}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{\mu}\left[1 + \sqrt{\frac{\tau_1}{\tau_2}\frac{c_X^2 - 1}{2}}\right]^{-1}, \tag{13.6}$$

où $\tau_1, \tau_2 \geq 0$, $\tau_1 + \tau_2 = 1$ et $\lambda_1, \lambda_2 > 0$.

13.4 Application numérique

13.4.1 Cas d'approximation par le système $HOE_2/M/1$

La loi des arrivées du système réel par la loi de Weibull de paramètres (a, b), où $b = 1.3$. L'implémentation de l'algorithme et du simulateur dans ce cas a permis d'obtenir les résultats représentés dans le graphe suivant :

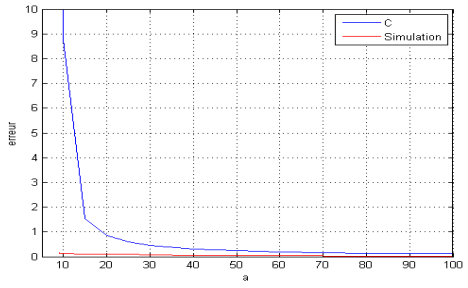

FIGURE 13.1. Courbes comparatives des erreurs

13.4.2 Cas d'approximation par le système $H_2/M/1$

En fixant la loi des arrivées du système réel par la loi de Weibull de paramètres (a, b), où $b = 0.9$. On a obtenu les résultats suivants :

13.4.3 Cas d'approximation par le système $M/HOE_2/1$

Le flot des arrivées des clients est poissonnien de paramètre $\lambda = 0.5$ Les résultat sont représentés par le graphe suivant :

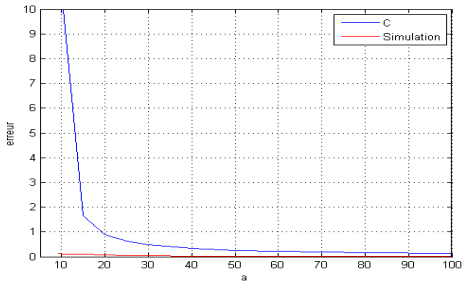

FIGURE 13.2. Courbes comparatives des erreurs

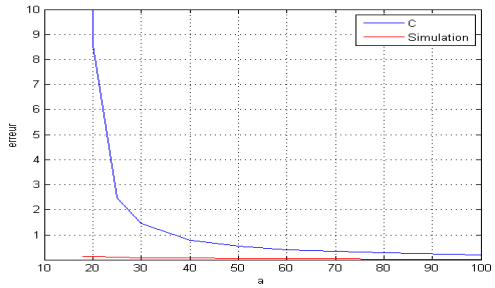

FIGURE 13.3. Courbes comparatives des erreurs

13.4.4 Cas d'approximation par le système M/H_2/1

Le flot des arrivées des clients est poissonnien de paramètre $\lambda = 0.2$. Ces résultats sont représentés par le graphe suivant :

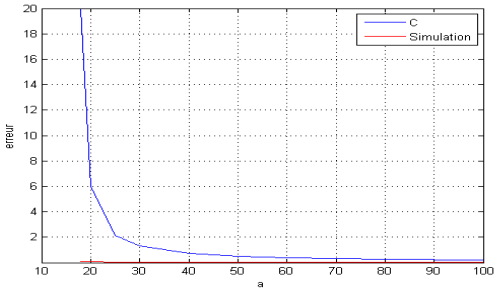

FIGURE 13.4. Courbes comparatives des erreurs

Références

1. W-R. HEINZELMAN, A. CHANDRAKASAN, and H. BALAKRISHNAN. Energy-efficient communication protocol for wireless sensor networks. In *Proceedings of the IEEE Hawaii International Conference on System Sciences*, pages 3005–3014, Janvier 2000.
2. S. LEE and H.SIN. An energie-efficient distributed unequal clustering protocol for wirless sensor networks. *Proccedings of word Academy of Science Engineering and Technology*, 36, Decembre 2008.
3. N.KHOULALENE. *Regroupement avec Equilibrage de charge dans les Réseaux de Capteurs sans Fil*. Mémoire de magistère en informatique, Université de Béjaia, Algérie, Juin 2007.
4. M. QIN and R. ZIMMERMANN. Vca : An energy-efficient voting-based clustering algorithm for sensor networks. *Journal of Universal Computer Science*, 13(1) :87–109, Janvier 2007.