Séminaire Mathématique de Béjaïa (LaMOS)
Volume 10, 2011, pp. 41 - 45

10

Inégalité de stabilité forte dans un modèle de risque classique modifié

Zina BENOUARET et Djamil AÏSSANI

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes (LAMOS)
Université de Béjaïa, Béjaïa 06000, Algérie
Tél. (213) 34 21 51 88 email : *benouaret_z@yahoo.fr*

Résumé Le modèle classique de la théorie de la ruine, basé sur le processus de Poisson et un taux de prime généralement constant, est mathématiquement élégant. Cependant, il présente pour les praticiens quelques défauts majeurs. Pour mieux cerner la réalité, nous avons considéré dans cette étude, un modèle de risque classique modifié où le taux de prime peut prendre deux valeurs différentes selon la réserve de la compagnie d'assurance par rapport à un certain niveau fixé. Par la suite, afin d'élargir le champ d'application de la méthode de stabilité forte dans le domaine d'actuariat, nous avons prouvé la stabilité forte du modèle considéré ce qui signifie qu'une petite perturbation de ses paramètres conduit à une légère déviation de ses caractéristiques. De plus, en utilisant l'aspect quantitatif de l'approche proposée, nous avons obtenu une estimation de la déviation de sa probabilité de ruine.

Mots clés : Modèle de risque, Taux de prime, Probabilité de ruine, Stabilité forte, Inégalité de stabilité.

10.1 Modèle de risque classique modifié

Dans la théorie de la ruine, le problème de stabilité a été développé dans [Beirlant and Rachev (1987)]. En particulier, la méthode de stabilité forte (cf. [Aïssani and Kartashov (1983)], [Kartashov (1996)]) connaît un large champs d'application après le travail de [Kalashnikov (2000)]. Il a présenté de nouvelles bornes de stabilité des probabilités de ruine (cf. [Rusaityte (2001), Enikeeva and al. (2001), Benouaret et Aïssani (2007)]).

Dans ce travail, nous appliquons cette approche de stabilité forte au modèle de risque classique en prenant en compte la modification du taux de prime.

Le modèle de risque classique est défini comme suit :

$$X(t) = u + c\, t - \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i, \qquad t \geq 0, \tag{10.1}$$

où $\{Z_i,\ i \geq 1\}$ est une séquence de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, représentant les montants des réclamations de fonction de distribution F et de moyenne μ, $\{N(t),\ t \geq 0\}$ étant un processus de Poisson de paramètre λ représentant le nombre de réclamations, c le taux de prime constant par unité de temps et u le surplus initial de la compagnie d'assurance.

Dans [**?**], un modèle de risque de type (10.1) a été proposé avec

$$c = c(X(t)) = \begin{cases} c_1, & si \;\; X(t) \leq V \\ c_2(< c_1), & si \;\; X(t) > V \end{cases}$$

En fonction du temps de la ruine T tel que $T = \inf\{t \geq 0,\ X(t) < 0\}$, on a la probabilité de ruine qui est définie comme suit :

$$\Psi(u) = \mathbb{P}(T < \infty / X(0) = u) \tag{10.2}$$

10.2 Critère de stabilité forte

Nous présentons dans ce paragraphe le critère de stabilité forte que nous allons appliquer au modèle de risque considéré.

Soit $\{V_n\}_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov à valeurs dans E d'opérateur de transition P. On suppose que la chaîne admet une unique mesure invariante π tel que $\pi(E) = 1$ (mesure de probabilité).

Notons par $m\mathcal{E}^+$ l'espace des mesures finies non-négatives sur l'espace probabilisable (E, $\mathcal{E}$) et par $f\mathcal{E}^+$ l'espace des fonctions mesurables bornées non-négatives.

Théorème 3.1 (cf. [Kartashov (1996)]) Pour qu'une chaîne de Markov homogène, d'opérateur de transition P à valeurs dans E soit fortement v-stable, il est suffisant que les conditions suivantes soient vérifiées :

1. $\|P\|_v < \infty$.
2. $\exists \;\; \alpha \in \mathcal{M}^+ \;\; et \;\; \exists\, h \in f\mathcal{E}^+ \;\;\; telles \;\; que \;\; \pi h > 0, \;\; \alpha\mathbf{1} = 1, \;\; \alpha h > 0.$
3. $T = P - h \circ \alpha$, où T est un noyau non négatif, $\alpha \in \mathcal{M}^+ \;\; et \;\; h \in f\mathcal{E}^+$.
4. $\exists \;\; 0 < \rho < 1$ tel que $Tv(x) \leq \rho \;\; v(x), \forall \;\; x \in E$.

10.3 Stabilité forte dans un modèle de risque classique modifié

Construisons d'abord le processus inverse d'une manière à ce que sa distribution stationnaire corresponde exactement à la probabilité de ruine étudiée.

10.3.1 Processus inverse associé au modèle de risque considéré

Commençons par la construction du processus inverse associé à la probabilité de ruine $\Psi(u)$ donnée par la relation (10.2). Pour cela, nous allons suivre les mêmes procédures développées dans l'article de [Kalashnikov (2000)].

Puisque la ruine peut seulement apparaître aux instants d'arrivée des réclamations, on peut réécrire $\Psi(u)$ comme suit :

$$\Psi(u) = \mathbb{P}\left(\inf_{n\geq 1}(X_{T_n}) < 0/ \quad X_0 = u\right) \tag{10.3}$$

où T_n est l'instant d'arrivée de la $n^{\text{ème}}$ réclamation.

Le processus inverse associé au modèle de risque classique à deux dimensions est de la forme suivante : $\forall\ n \geq 0$,

$$V_{n+1} = \left(V_n - [c_1 I_{\{V_n \geq u-V\}} + c_2 I_{\{V_n < u-V\}}]\ \theta_{n+1} + Z_{n+1}\right)_+, \qquad V_0 = 0 \tag{10.4}$$

avec $T_n = \theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n$ et θ_n est une variable aléatoire qui représente la durée de temps entre la $(n-1)^{\text{ème}}$ et la $n^{\text{ème}}$ réclamation. I est la fonction indicatrice.

Suivant la forme recursive de la chaîne $\{V_n\}_{n\geq 0}$ donnée par l'équation (10.7), on a V_{n+1} qui ne dépend que de V_n, θ_{n+1} et Z_{n+1} où les variables aléatoires θ_{n+1} et Z_{n+1} sont indépendantes de n et de l'état du système avant T_n.

D'où, $\{V_n\}_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov homogène à espace d'état continu $E = \mathbb{R}^+$. En fonction de la chaîne $\{V_n\}_{n\geq 0}$, $\Psi(u)$ s'écrit comme suit :

$$\Psi(u) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(V_n > u),, \tag{10.5}$$

10.3.2 Décomposition du noyau de transition

Le noyau de transition associé à la chaîne $\{V_n\}_{n\geq 0}$, à espace d'états continu, $E = \mathbb{R}^+$, se décompose comme suit : $\forall\ \ x\ \in \mathbb{R}^+$ et $\forall\ \ A\ \in \mathcal{E}$ une σ-algèbre sur E, on a

$$\begin{aligned}
P(x,A) &= \mathbb{P}(V_1 \in A/V_0 = x)\\
&= \mathbb{P}\left((V_0 - [c_1 I_{\{V_0 \geq u-V\}} + c_2 I_{\{V_0 < u-V\}}]\theta_1 + Z_1)_+ \in A/V_0 = x\right)\\
&= \mathbb{P}\left(0 < (x - [c_1 I_{\{V_0 \geq u-V\}} + c_2 I_{\{V_0 < u-V\}}]\theta_1 + Z_1) \in A\right)\\
&+ \mathbb{P}\left(0 \in A\right)\ \ \mathbb{P}\left(x - [c_1 I_{\{V_0 \geq u-V\}} + c_2 I_{\{V_0 < u-V\}}]\theta_1 + Z_1 \leq 0\right)\\
&= T(x,A) + \alpha(A).h(x)
\end{aligned} \tag{10.6}$$

avec $\quad T(x,A) = \mathbb{P}\left(0 < (x - [c_1 I_{\{V_0 \geq u-V\}} + c_2 I_{\{V_0 < u-V\}}]\theta_1 + Z_1) \in A\right),$

$$\alpha(A) = \delta_0(A),\ \text{où } \delta_0 \text{ est la mesure de Dirac}$$

$$\text{et} \quad h(x) = \mathbb{P}\left([c_1 I_{\{V_0 \geq u-V\}} + c_2 I_{\{V_0 < u-V\}}]\theta_1 - Z_1 \leq x\right), \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Puisque $c_2 < c_1$ et en prenant $v(x) = e^{\epsilon x}$, $\ x \in \mathbb{R}^+$, il existe un $\epsilon > 0$ pour lequel toutes les conditions du critère de stabilité forte sont satisfaites pour T, α et h obtenus par la décomposition précédente du noyau de transition P avec

$$\rho = \mathbb{E}\left(\exp\{\epsilon(Z_1 - c_2\theta_1)\}\right).$$

Finalement, la chaîne de Markov $\{V_n\}_{n\geq 0}$ est fortement stable par rapport à la fonction poids $v(x) = e^{\epsilon x}$, $\ x \in \mathbb{R}^+$.

Précisons enfin qu'il est possible de montrer que ce modèle fortement stable peut être une bonne approximation d'un autre modèle de risque perturbé de même structure, en utilisant l'aspect quantitatif de la méthode de stabilité forte.

10.4 Inégalité de stabilité

Objectif de cette partie est d'obtenir des estimations quantitatives qui servent à délimiter le domaine où le modèle de risque classique modifié (fortement stable) peut être une bonne approximation d'un autre modèle de risque perturbé et à en estimer l'erreur d'approximation.
Notons par $a' = (c'_1, c'_2, \lambda', F')$ le paramètre gouvernant du modèle de risque perturbé et par $\Psi_{a'}$ sa probabilité de ruine.

10.4.1 Déviation de l'opérateur de transition

Nous avons $\forall\ n \geq 0$,

$$V_{n+1} = \big(V_n - [c_1 I_{\{V_n \geq u-V\}} + c_2 I_{\{V_n < u-V\}}]\ \theta_{n+1} + Z_{n+1}\big)_+ ,$$

$V_0 = 0$
Par définition,

$$\begin{aligned}
\|P - P'\|_v &= \sup_{x\geq 0} e^{-\epsilon x} \int_0^\infty e^{\epsilon y} |P(x,dy) - P'(x,dy)| \\
&= \sup_{x\geq 0} e^{-\epsilon x} \int_0^\infty e^{\epsilon y} |\mathbf{P}(V_{n+1} \in dy / V_n = x) - \mathbf{P}(V'_{n+1} \in dy / V'_n = x)| \\
&\leq 2 \int_0^\infty e^{\epsilon z} |b(z) - b'(z)| dz \\
&+ E e^{\epsilon Z}.[\int_0^\infty (|a_1(t) - a'_1(t)| + |a_2(t) - a'_2(t)|) dt].
\end{aligned}$$

où
a_1, a_2, b, a'_1, a'_2, b' sont les densités de $c_1\theta_n$, $c_2\theta_n$, Z_n, $c'_1\theta'_n$, $c'_2\theta'_n$ et Z'_n respectivement.

10.4.2 Inégalités de stabilité

On pose

$$\begin{aligned}
\mu(a,a') = 2 \int_0^\infty & e^{\epsilon z} |b(z) - b'(z)| dz \\
& + E e^{\epsilon Z}.[\int_0^\infty (|a_1(t) - a'_1(t)| + |a_2(t) - a'_2(t)|) dt].
\end{aligned}$$

Si $\mu(a,a') < (1-\rho)^2$ (cf. V. Kalashnikov (2000), Enikeeva et al. (2001)), on a

$$\|\Psi_a - \Psi_{a'}\|_v \leq \frac{\mu(a,a')}{(1-\rho)\ \big((1-\rho)^2 - \mu(a,a')\big)} \tag{10.7}$$

est une borne supérieure de stabilité.

Références

[Aïssani and Kartashov (1983)] D. Aïssani and N. V. Kartashov (1983). Ergodicity and stability of Markov chains with respect to operator topology in the space of transition kernels. *Compte Rendu Academy of Sciences U. S. S. R, ser. A*, 11, 3-5.

[Beirlant and Rachev (1987)] J. Beirlant and S. T. Rachev (1987). The problems of stability in insurance mathematics. *Insurance : Mathematics and Economics*, 6, 179-188.

[Benouaret et Aïssani (2007)] Z. Benouaret et D. Aïssani (2007). Stabilité forte dans le modèle de risque classique à deux dimensions avec indépendance des deux types de réclamations. *Proceedings of the International Confirence MOAD'2007, Béjaia*,675-680. ISBN :978-9947-0-1985-0.

[Enikeeva and al. (2001)] F. Enikeeva and V. Kalashnikov and D. Rusaityte (2001). Continuity estimates for ruin probabilities. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1, 18-39.

[Kartashov (1996)] N. V. Kartashov (1996). *Strong Stable Markov Chains*. VSP, Utrecht.

[Kalashnikov (2000)] V. Kalashnikov (2000). The Stability Concept for stochastic risk models. *Working Paper Nr 166. Lab. of Actuarial Mathematics. University of Copenhagen.*

[Rusaityte (2001)] D. Rusaityte (2001). Stability bounds for ruin probabilities in a Markov modulated risk model with investments. *Laboratory of Actuarial Mathematics, University of Copenhagen. Working Paper Nr. 178.*