Séminaire Mathématique de Béjaïa (LaMOS)
Volume 1, 2003, pp. 49 - 53

12

Application des lois non paramétriques dans les systèmes d'attente et la théorie de renouvellement

K. LAGHA

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes (LAMOS)
Université de Béjaïa, Béjaïa 06000, Algérie
Tél. (213) 34 21 51 88,
email : kariam_lagha@yahoo.com

Résumé Dans ce travail, nous considérons l'utilisation des lois non paramétrique pour l'évaluation de performances des systèmes d'attente et de renouvellement.
Il s'agit de proposer des bornes inférieures et/ou supérieures pour le temps moyen d'attente dans le cas des systèmes d'attente et des bornes inférieures et/ou supérieures pour le temps moyen de vie d'un système réparable dans le cas des systèmes de renouvellement. Les lois nonparamétriques utilisées sont IFR, NBU, DFR et NWU.

Mots clés : Lois non paramétriques, Système d'attente, bornes, renouvellement.

Dans ce travail nous proposons d'utiliser les bornes inférieures et supérieures des fonctions de fiabilité, présentées par Sengupta (1994) dans [1], pour l'évaluation de certaines caractéristiques.

12.1 Application au système d'attente $GI/GI/1$

Nous considérons la propriété de l'appartenance des distributions des temps des inter-arrivées, dans un système d'attente de type $GI/GI/1$, à une classe de distribution non paramétrique donnée.
La borne inférieure ou supérieure associée à la fonction fiabilité (voir le tableau TAB.12.1 [1]) est utilisée dans la relation (12.1). Cette relation exprime la propriété de monotonie externe [2] permettant de comparer deux systèmes d'attente, ce qui nous permet d'établir une borne inférieure ou supérieure pour le temps moyen d'attente dans la file du système d'attente $GI/GI/1$. L'expression analytique exacte du temps moyen d'attente dans cette file [2] est donnée par :

$$\mathbb{E}W = \frac{(m_1 - m_B)^2 + \sigma_1^2 + \sigma_B^2}{2(m_1 - m_B)} - \frac{m_L^2 + \sigma_L^2}{2m_L}.$$

Étant donné deux systèmes $A_1/B_1/1$ (dit original) et $A_2/B_2/1$ (dit système d'approximation), où A_i est la distribution des temps des inter-arrivées de moyenne m_i finie, de variance σ_i^2 et de coefficient de variation $C_{ai} = \sigma_i/m_i$ et B_i la distribution de service dans

1. La méthode permettant d'évaluer ces bornes est présentée en détail par *Sengupta* dans [1]

Classe	Borne supérieure	Borne inférieure
IFR	$\overline{F}(x) \leq \begin{cases} 1 \text{ si } x < m_r^{1/r} \\ \delta_x \text{ si } x \geq m_r^{1/r} \end{cases}$ où $\left[\int_0^1 ry^{r-1}\delta_x^y dy = \frac{m_r}{x^r}\right]$	$\overline{F}(x) \geq \begin{cases} \inf_{0 \leq \beta \leq x} e^{-\alpha} \text{ si } x < m_r^{1/r} \\ 0 \text{ si } x \geq m_r^{1/r} \end{cases}$ où $\left[\int_0^\infty (\beta + \frac{x-\beta}{\alpha} z)^r e^{-\alpha} dz = m_r\right]$.
NBU	$\overline{F}(x) \leq \begin{cases} 1 \text{ si } x < m_r^{1/r} \\ \delta_x \text{ si } x \geq m_r^{1/r} \end{cases}$ où $\left[\int_0^1 ry^{r-1}\delta_x^y dy = \frac{m_r}{x^r}\right]$	$\overline{F}(x) \geq \begin{cases} \delta_x \text{ si } x < m_r^{1/r} \\ 0 \text{ si } x \geq m_r^{1/r} \end{cases}$ où $\left[\sum_{j=0}^\infty \delta_x^j[(j+1)^r - j^r] = \frac{m_r}{x^r}\right]$.
DFR	$\overline{F}(x) \leq \begin{cases} e^{-(rx/x_0)} \text{ si } x < x_0 \\ (x_0/x)^r e^{-r} \text{ si } x \geq x_0 \end{cases}$ où $x_0 = r\left[\frac{m_r}{\Gamma(r+1)}\right]^{1/r}$	$\overline{F}(x) \geq 0$
NWU	$\overline{F}(x) \leq \delta_x$ où $\sum_{j=1}^\infty \delta_x^j\,[j^r - (j-1)^r] = \frac{m_r}{x^r}$.	$\overline{F}(x) \geq 0$

Table 12.1. Bornes de $\overline{F}(x)$(basées sur le $r^{ième}$ moment m_r) dans différents cas.

le système $A_i/B_i/1$ d'intensité de trafic $\rho_i,\ i = 1, 2$. Notons m_{Wi}, $i = 1, 2$, le temps moyen d'attente dans la file.
Le théorème (5.2.1) [2] énonce la propriété de monotonie externe. Cette propriété permet sous la condition suffisante suivante :

$$A_2 \leq_{cv} A_1 \quad \text{et} \quad B_1 \leq_c \ B_2, \tag{12.1}$$

de conclure que $m_{W1} \leq m_{W2}$, où $\leq_c$ (*resp.* $\leq_{cv}$) désigne l'ordre convexe (resp. concave).
Si la distribution A_1 possède une propriété qualitative donnée (IFR ou NBU), alors elle est majorée ou minorée par la distribution A_2. Cette dernière est exprimée dans le tableau TAB.12.1. En utilisant cette propriété nous proposons une borne supérieure pour le temps moyen d'attente stationnaire dans la file du système $GI/GI/1(\infty, FIFO)$.

Distribution IFR :

On suppose que la distribution A_1 appartient à la classe IFR. En utilisant la relation (12.1) on établit une borne supérieure pour le temps moyen d'attente dans la file, donnée par :

$$\frac{\sigma_1^2 + \sigma_B^2}{2m_1(1-\rho_1)} - 1/2m_1(\rho_1 + C_{a1}^2) \leq m_{W1} \leq \frac{\mathbb{E}\beta^2}{2m_1[1 - e^{-1} - \rho_1]}. \tag{12.2}$$

Distribution NBU :

En utilisant la borne inférieure de la fonction fiabilité correspondante à la distribution A_1 de loi NBU "New Better than Used" (voir le tableau TAB.12.1) et la relation (12.1), nous établissons une borne supérieure pour le temps moyen d'attente dans la file, donnée par :

$$\frac{\sigma_1^2 + \sigma_B^2}{2m_1(1-\rho_1)} - 1/2m_1(\rho_1 + 1) \leq m_{W1} \leq \frac{\mathbb{E}\beta^2}{m_1[1 - e^{-1} - 2\rho_1]}. \tag{12.3}$$

Résultats :

1. La borne supérieure dans le cas IFR existe sous la condition $\rho_1 < 1 - e^{-1} \simeq 0.6321$ et les valeurs de la borne de $\frac{m_1}{\mathbb{E}\beta^2}.m_{W1}$ sont données dans le tableau TAB.12.2.

2. La borne supérieure proposée dans le cas NBU existe si $\rho_1 < (\frac{1-e^{-1}}{2}) \simeq 0.316$ et les valeurs de la borne de $\frac{m_1}{\mathbb{E}\beta^2}.m_{W1}$ sont données dans le tableau TAB.12.2.

3. La borne supérieure proposée dans chacun des deux cas (IFR et NBU) est une fonction croissante du taux de trafic. Ceci apparaît clairement dans les résultats du tableau TAB.12.2.

Classe $\diagdown \rho_1$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
IFR	0.939	1.157	1.505	2.154	3.784	15.566
NBU	2,3142	4,3081	31,1327	$\times$	$\times$	$\times$

Table 12.2. Borne supérieure de la quantité $\frac{m_1}{\mathbb{E}\beta^2}.m_{W1}$

12.2 Application à la théorie de renouvellement

Considérons un système formé de deux éléments réparables ξ_1 et ξ_2.
Les temps de fonctionnement $X_0, X_1, \ldots$ sont supposés i. i. d. et indépendants des temps de réparations $Y_1, Y_2, \ldots$, qui sont aussi iid, de moyenne d'ordre r notée m_r, $r \geq 1$, de variance σ_R^2 et de coefficient de variation $C_R = \sigma_R/m_1$.
Soit $N = \inf\{n : \;\; X_n < Y_n\}$. Le temps de vie T du système est la v.a. $T = X_0 + X_1 + \ldots + X_N$. On suppose que les X_i sont exponentiellement distribués, de paramètre λ et que les temps de réparation de fonction distribution R appartenant à une classe de distributions non paramétrique donnée.
Le temps moyen de vie du système est exprimé en fonction des temps de réparation par

$$\mathbb{E}T = \lambda^{-1} \left(1 + \left(1 - \int_0^\infty e^{-\lambda t} \, dR(t) \right)^{-1} \right), \tag{12.4}$$

La proposition (7.2.1) énoncée dans [2] permet la comparaison du temps moyen de vie de deux systèmes identiques à deux éléments réparables ayant pour fonctions de distribution des temps de réparation les fonctions R_1 et R_2 et tels que λ_1 et λ_2 sont les paramètres des temps de fonctionnement. Sous la condition suivante :

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \qquad \text{et} \qquad R_1 <_L R_2, \tag{12.5}$$

les temps moyen de vie des deux systèmes sont tels que $\mathbb{E}T_1 \geq \mathbb{E}T_2$, où $<_L$ désigne l'ordre Laplacien. *Stoyan* [2] propose les deux résultats suivants :$1 + (1 - e^{-\lambda m_1})^{-1} \leq \lambda \mathbb{E}T \leq 1 + (1 + C_R^2)/(1 - \exp(-\lambda m_1(1 + C_R^2)))$, et si R est $NBUE$, alors

$$1 + (1 - e^{-\lambda m_1})^{-1} \leq \lambda \mathbb{E}T \leq 1 + (1 + \lambda m_1)^{-1}. \tag{12.6}$$

Temps de réparation IFR :

On suppose que la distribution R_1 appartient à la classe IFR. En utilisant la relation (12.5), on établit une borne inférieure pour le temps moyen de vie du système exprimé par la relation (12.4) :

$$1 + (1+\beta)^{-1} \geq \lambda \mathbb{E} T_1 \geq \left[1 + \frac{\beta^{-1}+1}{1-e^{-(1+\beta)}}\right], \quad \text{avec} \quad \beta = \lambda m_1.$$

Temps de réparation NBU :

En utilisant la relation (12.5), on établit une borne inférieure pour le temps moyen de vie du système, donnée par :

$$1 + (1+\beta)^{-1} \geq \lambda \mathbb{E} T_1 \geq 1 + \frac{\beta}{\beta + e^{-\beta} - 1}, \quad \beta = \lambda m_1.$$

Temps de réparation DFR :

En utilisant la relation (12.5), on établit une borne supérieure pour le temps moyen de vie du système, donnée par :

$$1 + (1 - e^{-\lambda m_1})^{-1} \leq \lambda \mathbb{E} T_1 \leq \left[1 + \frac{r+\theta}{\theta(1 - e^{-(r+\theta)}) + (r+\theta)e^{-r}\theta^r \int_\theta^\infty x^{-r} e^{-x}\, dx}\right], \quad \theta = \lambda x_0.$$

Temps de réparation NWU

En utilisant la relation (12.5), on établit une borne supérieure, donnée par :

$$1 + (1 - e^{-\lambda m_1})^{-1} \leq \lambda \mathbb{E} T_1 \leq \left[1 + \frac{1}{1 - \theta e^{\theta} \int_\theta^\infty e^{-x} x^{-2}\, dx}\right], \quad \theta = \lambda m_1.$$

Remarque 1. La borne inférieure de la relation (12.6) est une borne proposée par *Stoyan* pour n'importe quelle distribution des temps de réparation. On peut donc l'utiliser dans le cas DFR et NWU.

Remarque 2. Dans le cas des distributions DFR et NWU, les bornes supérieures sont fonction de l'intégrale : $\int_\theta^\infty e^{-y} y^{-r}\, dy$, avec $\theta = \lambda m_r$. Cette intégrale est convergente pour toute valeur de r positive.

Conclusion

Dans ce travail nous avons traité le problème d'évaluation de performances d'un système d'attente de type $GI/GI/1$ et d'un système formé de deux éléments réparables. Nous avons considéré la propriété qualitative de la distribution des temps des inter-arrivées pour le premier système et celle de la distribution des temps de réparation pour le deuxième système.

Les caractéristiques étudiées sont le temps moyen d'attente dans la file du premier système et le temps moyen de vie dans le deuxième système. Les bornes proposées dans cet article peuvent être utilisées pour d'autres classes de distributions : dans le premier système étudié, la borne supérieure proposée pour le temps moyen d'attente dans le cas NBU (relation 12.3) peut être utilisée pour la classe $IFRA$, car $IFRA \Rightarrow\ NBU$.
Dans le deuxième système considéré, on peut utiliser les bornes proposées pour d'autres classes de distributions des temps de réparation.

Références

1. D. Sengupta. Another look at the moment bounds on reliability. *J. Applied. Probability*, 31 :777–787, 1994.
2. D. Stoyan. Comparison methods for queueing models and other stochastic models. John Wiley, 1983.