Séminaire Mathématique de Béjaïa (LaMOS)
Volume 1, 2003, pp. 29 - 34

8

Stabilité forte dans un système de files d'attente $M/G/1//N$ à vacances multiples du serveur et service exhaustif

F. RAHMOUNE

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes (LAMOS)
Université de Béjaïa, Béjaïa 06000, Algérie
Tél. (213) 34 21 51 88,
email : foufourah@yahoo.fr

Résumé Dans ce travail, nous avons prouvé pour la première fois l'applicabilité de la méthode de stabilité forte aux systèmes de files d'attente avec vacances. Le système $M/G/1//N$ avec vacances multiples du serveur et service exhaustif nous a servi d'illustration. Nous avons obtenu les conditions pour lesquelles la chaîne de Markov induite associée à ce modèle est fortement v-stable. Ceci nous permet de constater la possibilié d'approximer les caractéristiques stationnaires et non stationnaires du système $M/G/1//N$ avec vacances multiples du serveur et service exhaustif par celles du système $M/G/1//N$. Ces résultats laissent envisager des perspectives de recherche, à savoir l'obtention des inégalités de stabilité pour le système étudié et la mesure performances de la méthode utilisée dans ce cas.

Mots-Clés : Sytème avaec vacances du serveur, Chaîne de Markov induite, Stabilité, Approximation.

Introduction

La sûreté de fonctionnement des diverses réalisations industrielles est devenue un enjeu important à la fois sur le plan économique, écologique et humain [3].

Ceci a engendré un développement rapide de la recherche, tant sur le plan théorique que pratique. Afin d'élever la fiabilité des systèmes complexes, il existe des méthodes adéquates, telles que la redondance, et la maintenance préventive [3]. Ces périodes de maintenance préventives sont simulées par des périodes de vacances. Ceci nous a mené à la modélisation par les systèmes de files d'attente à source finie et vacances du serveur. Cependant, la complexité de ces systèmes fait qu'on ait eu recours aux méthodes d'approximation. Vu que la méthode de stabilité forte permet d'obtenir des estimations quantitatives en plus de l'analyse qualitative, on se propose d'appliquer cette méthode aux systèmes précédents [1, 4].

8.1 Systèmes de files d'attente avec vacances du serveur

La plupart des travaux sur les modèles classiques traitent des systèmes dans lesquels le serveur reste oisif quand la file d'attente est vide. Cependant, le temps d'oisiveté du serveur pourrait être utilisé pour un travail secondaire dans le but d'améliorer la performance du système. Ces situations d'attente peuvent être étudiées par les **"modèles avec vacances"**. Dans un tel modèle, le serveur prend occasionnellement une vacance d'une durée aléatoire, pour accomplir une ou plusieurs taches secondaires, comme elle peut modéliser une période d'oisiveté du serveur. Ce modèle a été largement étudié et appliqué à divers problèmes dans l'analyse des systèmes informatiques, des systèmes de communication, systèmes industriels, de production...etc. Pendant plusieurs décennies, plusieurs chercheurs se sont penchés sur les modèles de ce type, les techniques et les résultats obtenus ont été fructueusement utilisés dans une variété d'applications. Une synthèse des systèmes d'attente avec vacances est dans H.Takagi [7, 6] et T.B. Doshi [2]

8.2 Classification des différents modèles d'attente avec vacances

Les files d'attente avec vacances peuvent être classifiées de différentes façons. Les disciplines de service les plus connues sont : la discipline de service exhaustif (complet), la discipline de service avec barrière, la discipline de service limité, système à service limité, la discipline de service non exhaustif ou "politique de décision séquentielle de Bernoulli". Une comparaison des différentes politiques de service est donnée dans T.B. Doshi. Si le serveur retourne d'une vacance et trouve la file d'attente vide, il exécute l'une des deux actions suivantes :

- Sous le schéma de **"vacances multiples"**, le serveur commencera immédiatement une autre vacance et continue à prendre des vacances successives, jusqu'à ce qu'il trouve au moins un client en attente dans la file. Dans ce cas, toute vacance est indépendante de la précédente, mais identiquement distribuée.
- Sous le schéma de **"vacance unique"**, le serveur attendra jusqu'à la fin de la prochaine période d'activité pendant la quelle un client au moins sera servi, avant de commencer une autre vacance. Autrement dit, il y a exactement une seule vacance à la fin de chaque période d'activité.

8.3 Description et position du problème

Nous considérons deux systèmes de files d'attente $M/G/1//N$ et $M/G/1//N$ avec vacances multiples et service exhaustif, ayant la même distribution des temps de service $B(t)$.

8.3.1 Description du modèle $M/G/1//N$ avec vacances multiples et service exhaustif

Considérons un système $M/G/1//N$ de files d'attente à un petit taux de vacances multiples et service exhaustif. Le flot des arrivées est quasi aléatoire de taux total $(N-k)\lambda$, qui est décrit comme suit :
Nous supposons qu'il y ait au total N clients dans le système. Notre système consiste en

une source et un système d'attente (file + service). Chaque machine est soit en source soit dans le système d'attente à tout instant. Une machine en source arrive au système d'attente avec une probabilité $\lambda\Delta t$ durant un intervalle de temps arbitraire de longueur Δt. Le serveur commence la vacance à chaque moment où la file devient vide (*service exhaustif*). Si le serveur revient de la vacance trouvant la file non vide, alors la période de vacance se termine pour commencer une période d'activité, sinon il commence une autre vacance (*vacances multiples*). La distribution de la durée de service est générale, de fonction de répartition $B(.)$ et de moyenne b. Nous supposons aussi que les durées V des vacances du serveur sont indépendantes et identiquement distribuées, de fonction de distribution générale notée $V(x)$.

8.3.2 Description du modèle $M/G/1//N$

Par ailleurs, soit le système $M/G/1//N$ sans vacances du serveur, ayant les mêmes distributions des arrivées et de la durée de réparation qui n'est autre que le système $M/G/1//N$ classique. Le système $M/G/1$ sans vacances du serveur a été déjà traité en détails dans Sasfa (1976). Le modèle de files d'attente $M/G/1/-/N$ à source finie se réfèrent aux problèmes d'interference des machines, dans le sens que le réparateur attend un nombre fixe de machines qui aléatoirement tombent en panne (plus précisément, avec les durées d'inter-défaillance exponentiellement distribuées de paramètre λ).

8.3.3 Chaînes de Markov induites

Les chaîne de Markov $X_{n,\overline{X}_n}$ induites aux instants de fin de réparation de la $n^{\text{ième}}$ machine associées respectivement au système $M/G/1//N$ avec vacances et le système $M/G/1//N$ classique sont données par :

La chaîne de Markov induite $\overline{X_n}$:

$$X_{n+1} = X_n + A_{n+1} - 1 + k[1 - U(X_n)]$$
$$= \begin{cases} A_{n+1} + k - 1, & \text{si } X_n = 0, \\ X_n + A_{n+1} - 1, & \text{si } X_n \geq 1, \ \forall \ k = 1, \cdots, N. \end{cases} \tag{8.1}$$

où

X_n : est le nombre de machines en pannes juste à la fin de réparation de la $n^{\text{ième}}$ machine,
A_n : est le nombre de machines en panne durant la réparation de la $n^{\text{ième}}$ machine,
k : est le nombre de machines en panne au début d'une période d'activité, $k = \overline{1, N}$.

De même, on peut définir les probabilités suivantes :

$f_k = P[k$ machines en panne à la fin d'une période de vacance$]$, $k = \overline{0, N}$.
$= C_N^k \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda t})^k e^{-(N-k)\lambda t} dV(t), \quad k = \overline{0, N}.$

$\alpha_k = P[k$ machines en panne au début d'une période d'activité$]$, $k = \overline{1, N}$.
$= C_N^k \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda t})^k e^{-(N-k)\lambda t} dV(t), \quad k = \overline{1, N}.$

La chaîne de Markov induite $\overline{X}_n$:

$$\overline{X}_{n+1} = \begin{cases} A_{n+1}, & \text{si } X_n = 0, \\ X_n - 1 + A_{n+1}, & \text{si } X_n \geq 1. \end{cases} \tag{8.2}$$

L'état du système $\overline{X}_{n+1}$ à la fin de la réparation de la $(n+1)^{\text{ième}}$ panne ne dépend que de

$\overline{X}_n$ et A_{n+1} , où A_{n+1} est indépendante de l'état du système avant t_n . La chaîne $\overline{X}_n$ est donc une chaîne de Markov homogène à espace d'état $\mathbb{E} = \{0, 1, \cdots, N-1\}$.

8.3.4 Noyaux de transition

Les probabilités de transitions en une étape des chaînes de Markov induites X_n et $\overline{X_n}$ nous permettent d'écrire l'expression générale des noyaux de transition $\mathbf{P}$ et $\overline{\mathbf{P}}$ résumées ci-dessous respectivement :

$$P_{ij} = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{j+1} P_{j-k+1}\alpha_k, & \text{si } \ i = 0, j = \overline{0, N-1}, \ k = \overline{1, N}, \\ P_{j-i+1} & \text{si } \ 1 \ \leq i \leq j+1 \ \leq \ N-1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{8.3}$$

$$\overline{P}_{ij} = \begin{cases} \overline{P}_j = \int_0^\infty C_{N-1}^{j} e^{-\lambda t(N-1-j)}(1-e^{-\lambda t})^j dB(t), & \text{si } \ i = 0, j = \overline{0, N-1}, \\ \overline{P}_{j-i+1} = \int_0^\infty C_{N-i}^{j-i+1} e^{-\lambda t(N-1-j)}(1-e^{-\lambda t})^{j-i+1} dB(t) & \text{si } \ 0 \leq i \leq j+1 \leq N-1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{8.4}$$

Clairement, la chaîne de Markov $\{\overline{X}_n, n = 1, 2, \cdots\}$ est irréductible, apériodique à espace d'états fini $\mathbb{E} = \{0, 1, \cdots, N-1\}$.

8.4 Critère de stabilité et v-stabilité forte

8.4.1 Notations

Soit $\mathcal{M} = \{\mu_j\}$ l'espace des mesures finies sur $\mathbb{E}$ (la σ-algèbre sur $\mathbb{E}$ est engendrée par les singletons de $\mathbb{E}$) et $\eta = \{f(i)\}$ l'espace des fonctions mesurables bornées sur $\mathbb{E}$.
L'opérateur P_{ij} donne une application linéaire :

$$\begin{aligned} P_{ij} : & \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M} \\ & \mu \longmapsto (\mu P)_k(j) = \sum_{i \in \mathbb{E}} \mu_i P_{ik}(j) \end{aligned} \tag{8.5}$$

Le symbole Pf , pour $f \in \eta$ désignera la fonction

$$Pf(k) = \sum_{i \in \mathbb{E}} f(i) P_k i \tag{8.6}$$

et l'action de la mesure μ sur la fonction f sera notée par μf.
On introduit sur $\mathcal{M}$ une classe spéciale de norme :

$$\|\mu\|_v = \sum_{j \in \mathbb{E}} v(j) |\mu_j| \tag{8.7}$$

où v est une fonction mesurable, bornée inférieurement par une constante strictement positive (pas nécessairement finie). Cette norme induit dans l'espace η la norme

$$\|f\|_v = \sup_{k \in \mathbb{E}} \frac{|f(k)|}{v(k)}. \tag{8.8}$$

Considérons enfin l'espace $\mathcal{B}$ des opérateurs linéaires bornés, de norme

$$\|P\|_v = \sup_{k \in \mathbb{E}} \frac{1}{v(k)} \sum_{j \in \mathbb{E}} v(j) |P_{kj}|. \tag{8.9}$$

Théorème 8.1 *Pour que la chaîne de Markov récurrente au sens de Harris X soit $v-$fortement stable, il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées,*
a)- Il existe une mesure $\alpha \in \mathcal{M}^+$ et une fonction mesurable $h \in f\varepsilon^+$ telles que, $\pi h > 0, \alpha \mathbf{1} = 1, \alpha h > 0$.
b)- Le noyau $T = \mathbf{P} - h \circ \alpha$ est non négatif.
c)- $\exists \rho < 1$ tel que, $Tv(x) \leq \rho v(x), \forall x \in \mathbb{E}$.

8.4.2 v-Stabilité forte de la chaîne de Markov $\overline{X_n}$

L'adaptation du théorème précédent à la chaîne $\overline{X}_n$ associée au système $M/G/1//N$ sans vacances (classique), après perturbation du taux des vacances, nous a permis de délimiter le domaine où l'approximation des caractéristiques des deux systèmes "$M/G/1//N$ à vacances multiples et service exhaustif" et $M/G/1//N$ classique est possible. Le théorème suivant caractérise ce domaine.

Théorème 8.2 *Soit le système $M/G/1//N$ de files d'attente avec un taux nul de vacance, qui n'est autre que le système le système réparable à N machines montées en parallèle de taux de défaillance λ constant, et un taux nul de maintenance préventive. La chaîne de Markov induite représentant le nombre de machines en panne à la fin de réparation de la $n^{ième}$ machine, est fortement v-stable pour une fonction $v(k) = e^{-k(\beta-1)}\beta^k$, pour tout $\beta > 1$.*

*Démonstration (**Preuve**).* Pour prouver la v-stabilité de la chaîne de Markov incluse $\overline{X_n}$ pour une fonction $v(k) = e^{-k(\beta-1)}\beta^k$ pour $\beta > 1$, il est suffisant de trouver une mesure α , et une fonction h mesurable sur $\mathbb{N}$ telles qu'on ait :
$\overline{\pi} h_i > 0$, $\alpha_i \mathbf{1} = 1$, $\alpha_i h_i > 0$. En effet, prenons $v(k) = e^{-k(\beta-1)}\beta^k$ pour $\beta > 1$, $h_i = \mathbf{1}_{i=0}$, et $\alpha_j = \overline{P}_{0j} = C_{N-1}^j \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda t})^j e^{-(N-1-j)\lambda t} dB(t)$, tel qu'on ait :

- $\overline{\pi} h = \overline{\pi} h_i = \overline{\pi}_0 > 0.$
- $\alpha \mathbf{1} = \sum\limits_{k=0}^{N-1} \overline{P}_{0k} = 1.$
- $\alpha h = \sum\limits_{i=0}^{N-1} \alpha_i h_i = \alpha_0 h_0 = \overline{P}_{00} = \int_0^\infty e^{-(N-1)\lambda t} dB(t) > 0.$

Ainsi on vérifie aisément les conditions :

a)- Le noyau $T = \overline{P} - h \circ \alpha$ est positif.

b)- $\exists \rho = \int_0^\infty [(1 - e^{-\lambda t}) e^{-(\beta-1)} \beta + e^{-\lambda t}] dB(t)] < 1,\ \forall \beta > 1$, tel que $Tv(k) \leq \rho v(k)$, pour tout $k \in \{0, 1, \cdots, N-1\}$.

c)- $\|\overline{P}\|_v = \sup\limits_{k \in \{0, \cdots, N-1\}} \frac{1}{v(k)} \sum\limits_{j=0}^{N-1} |\overline{P}_{kj}| v(j) = \rho < \infty.$

Conclusion

Dans ce travail, nous avons prouvé pour la première fois l'applicabilité de la méthode de stabilité forte aux systèmes de files d'attente avec vacances. Le système $M/G/1//N$ à vacances multiples du serveur et service exhaustif nous a servi d'illustration. Nous avons obtenu les conditions pour lesquelles la chaîne de Markov induite associée à ce modèle est fortement v-stable. Ceci nous permet de constater la possibilité d'approximer les caractéristiques stationnaires et non stationnaires du système $M/G/1//N$ à vacances multiples du serveur et service exhaustif par celles du système $M/G/1//N$.

Ces résultats laissent envisager des perspectives de recherche, à savoir l'obtention des inégalités de stabilité pour le système étudié et la mesure performances de la méthode dans ce cas.

Références

1. D. Aissani and N. V. Kartashov. Strong Stability of Imbedded Markov Chains in an M/G/1 System. *Theory of Probab. and Math . Stat, Mathematical Society*, 29 :1–5, 1984.
2. B.T. Doshi. Queueing Systems with Vacations-A Survey. *Queueuing Syst, Vol. 1*, pages 129–166, 1986.
3. Ilya Gertsbakh. *Reliability Theory with Applications to Preventive Maintenance.* Springer-Verlag Edition, 2000.
4. N. V. Kartashov. Strong Stable Markov Chains. *VSP, Utrecht ; Tbimc Scientific Publishers*, 138 pages, 1996.
5. Janos Sztrik. Finite Source Queueing Systems and Their Applications. Technical report, University of Debrecen, Institute of Mathematics and Inforamatics, Deparatement of Information Technology, August 2001.
6. H. Takagi. M/G/1/-/N Queues with Vacations. *Oper. Res*, 42 :926–939, 1994.
7. H. Takagi. $M/G/1//N$ Queues with Server Vacations and Exhaustive Service. *Operations Research*, Vol. 42, N^{o}5 :926–939, Octobre 1994.