Séminaire Mathématique de Béjaïa (LaMOS)
Volume 1, 2003, pp. 21 - 24

6

Estimation de l'ergodicité uniforme et de la stabilité forte du processus d'attente "Waiting Process"

Z. MOUHOUBI[1]

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes (LAMOS)
Université de Béjaïa, Béjaïa 06000, Algérie
Tél. (213) 34 21 51 88,
email : z_mouhoubi@yahoo.fr

Résumé Sachant l'intérêt suscité pour les processus de marche aléatoire afin d'étudier le mouvement Brownien ainsi que la modélisation de certains systèmes par un processus de ce type, alors nous nous sommes intéressés à un exemple de ce genre. Les résultats obtenus sur les inégalités d'ergodicité et de stabilité, pour les chaînes apériodiques, ont été appliqués. Ce processus, de type marche aléatoire, a été déjà considéré par N.V. Kartashov dans [3] et D. Aïssani. Dans cet article, nous développons un exemple qui illustre concrètement l'applicabilité de la méthode de stabilité forte des chaînes de Markov (qui décrivent l'évolution de certains systèmes.

Mots clés : Chaînes de Markov, marches aléatoires, ergodicité uniforme, stabilité forte, waiting process.

6.1 Introduction

Sachant l'intérêt suscité pour les processus de marche aléatoire afin d'étudier le mouvement Brownien ainsi que la modélisation de certains systèmes par un processus de ce type, alors nous nous sommes intéressés à un exemple de ce genre. Les résultats obtenus sur les inégalités d'ergodicité et de stabilité, pour les chaînes apériodiques, ont été appliqués. Ce processus, de type marche aléatoire, a été déjà considéré par N.V. Kartashov dans [3] et D. Aïssani dans [2]. Cet exemple illustre concrètement l'applicabilité de la méthode de stabilité forte des chaînes de Markov (qui décrivent l'évolution de certains systèmes [1]).

Soit $(\xi_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées. Considérons la chaîne de Markov $X_{n+1} = (X_n + \xi_{n+1})^+$, $n \geq 0$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Posons pour $x \in \mathbb{R}^+$, $h(x) = P(\xi_1 + x \leq 0)$ et $\alpha(dy) = \delta_0(dy)$, où δ_0 est la distribution de Dirac concentrée en l'origine.

Pour $X_0 = 0$, on a $X_{n+1} = \max\left(0, \xi_{n+1}, \xi_{n+1} + \xi_n, \ldots, \xi_{n+1} + \xi_n + \ldots + \xi_1\right)$. On considère la distribution $P(x, A) = ((x + \xi_1)^+ \in A) = P(X_1 \in A/X_0 = x)$. On constate alors que

$$P(x, A) = P(0 < x + \xi_1 \in A) + h(x).\alpha(A) \tag{6.1}$$

Introduisons l'opérateur $T(x, A) = P(0 < x + \xi_1 \in A)$. On a alors l'identité $P = T + h \circ \alpha$. Nous considérons la classe de fonction v_γ définie par

$$v_\gamma = \exp(\gamma x), x \in \mathbb{R}^+,\ \gamma \in \mathbb{R} \tag{6.2}$$

Considérons à présent la distribution $p_n = \alpha T^{n-1} h$, $n \geq 1$.

Lemme 6.1. Soit $\tau = \inf(n : \xi_1 + \ldots + \xi_n \leq 0)$, alors $P(\tau = n) = p_n$.

La classe de norme dans l'espace de mesures finies $m\mathcal{E}$ est donnée, en fonction de v_γ, par la relation

$$\|\mu\|_\gamma = \|\mu\|_v = \int_0^{+\infty} \exp(\gamma x)|\mu|(dx)$$

Dans l'espace $\mathcal{J}$ des fonctions bornées et finies sur E, on a

$$\|f\|_\gamma = \sup_{x\geq 0} \exp(-\gamma x)|f(x)|$$

Dans l'espace des opérateurs bornés $\mathcal{B}$, on a

$$\|Q\|_\gamma = \sup_{x\geq 0} \exp(-\gamma x) \int_0^{+\infty} |Q|(x, dy) \exp(\gamma y)$$

Le théorème suivant donne des conditions de stabilité forte de la chaîne.

Théorème 6.1 *Soit* $\mathbb{E}\xi_1 < 0$ *et* $\forall\, \delta \geq 0$, $\mathbb{E}[\exp(\delta\xi_1)] < \infty$, *alors pour tout* γ *tel que* $\rho(\gamma) = \mathbb{E}[\exp(\gamma\xi_1)] < 1$, *la chaîne de Markov* X *est fortement v-stable, où* v_γ *étant définie en (6.2).*

Les résultats qui suivent sont obtenus en appliquant ceux obtenus dans [4].

Remarque 6.1 *On a* $\|P\|_\gamma = \|T + h\circ\alpha\|_\gamma \leq \|T\|_\gamma + \|h\|_\gamma\|\alpha\|_\gamma < \rho(\gamma) + 1 < 2 < \infty$. *D'où,*

(l'ergodicité uniforme de la chaîne) $\Longleftrightarrow$ *(la stabilité forte)*

En énonçant le théorème fondamental suivant, on introduit la suite de nombres $\lambda(n)$ vérifiant l'équation de renouvellement (6.3) ci-dessous. Pour celà, posons

$$d = PGCD\{n \geq 0 : p_n > 0\} \geq 1$$

Théorème 6.2 *On considère la suite* $(\lambda_n)_n$ *vérifiant l'équation de renouvellement suivante*

$$\begin{cases} \lambda(n) = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda(k)p_{n-k} + \delta_{0,n-1} & si\ n \geq 2, \\ \lambda(n) = 0 & si\ n \leq 0 \end{cases} \tag{6.3}$$

Alors,

1) $p_n = \alpha T^{n-1}h, n \geq 1$ *est une mesure de probabilité.*

2) $P^n = T^n + \sum_{i\geq 0}\sum_{j\geq 0} \lambda_{ij}^n T^i h \circ \alpha T^j$, *où* $\lambda_{ij}^n = \lambda(n-i-j)$ *avec* $\lambda(n)$ *est la suite vérifiant l'équation (6.3).*

3) De plus,

$$\begin{cases} \exists \ \ \beta \in [0, 1[, \exists\, \kappa > 0 : |\lambda(kd+1) - d\lambda| \leq \kappa\beta^{kd} \ si\ n \equiv 1[d] \\ \lambda(n) = 0 \ si\ \ n \not\equiv 1[d] \ \ ou\ n < 0. \end{cases}$$

avec

$$\lim_{k\to+\infty} \lambda(kd+1) = \lambda = \frac{1}{\sum_{n=1}^{+\infty} np_n}$$

On supposera le long de cet exposé que $d = 1$. En fait, une condition suffisante pour que $d = 1$ est $\mathbb{E}\xi_1 < 0$. On peut alors estimer, à titre d'exemple, $\|P^t - \Pi\|$.

Théorème 6.3 *Supposons vérifiées les conditions du théorème (6.1), alors pour tout γ tel que $\rho = \rho(\gamma) = E(\gamma\xi_1) < 1$ et pour tout $\Upsilon > 1$ tel que $\rho\Upsilon < 1$ et $\rho\Upsilon < 1$. Alors, on a*

$$\|P^t - \Pi\| \leq \rho^t + \frac{\Upsilon^{-t}}{(1-\rho\Upsilon)^2} \max\{\pi(\{0\}), \Lambda(\Upsilon)\}$$

où π est la distribution stationnaire de la chaîne X.
De plus, $\Lambda(\Upsilon) = \sup_{t\geq 0} |\lambda(t) - \pi(\{0\})| \Upsilon^t$, et Π est défini par,

$$\Pi = \pi(\{0\}) \sum_{i\geq 0} \sum_{j\geq 0} T^i h \circ \alpha T^j;$$

$\lambda(t)$ est solution de l'équation de renouvellement (6.3) et $\lim_{t\to+\infty} \lambda(t) = \pi(\{0\})$.

On obtient une évaluation du potentiel de la chaîne.

Théorème 6.4 *Supposons vérifiées les conditions du théorème (6.1). Alors, on a*

$$\sum_{t\geq 0} \|P^t - \Pi\| \leq \frac{1}{1-\rho} + \frac{\Lambda_0}{(1-\rho)^2} + \frac{\rho(1+\rho)}{(1-\rho)^3} \tag{6.4}$$

où $\Lambda_0 = \sum_{t\geq 0} |\lambda(t) - \lambda| < \infty$.

L'une des inégalités de stabilité forte obtenue est donnée par le théorème suivant.

Théorème 6.5 *Sous les mêmes conditions du théorème (6.1), on considère la chaîne Y de noyau de transition Q. De plus, pour tout γ tel que $\rho = \rho(\gamma) < 1$, et pour tout $\Upsilon > 1$ tel que $\rho\Upsilon < 1$, on a*

$$\sup_{t\geq 0} \|Q^t - P^t\|_\gamma \leq \hbar \, \|Q - P\|_\gamma.$$

Où

$$\hbar = \frac{1}{(1-\rho-\epsilon)^2} \left(\frac{1}{1-\rho} + \frac{\Lambda(\Upsilon)}{(\Upsilon - 1)(1-\rho)^2} + 2\frac{\pi(\{0\})}{(1-\rho)^3} \right);$$

où $\Lambda(\Upsilon) = \sup_{t\geq 0} |\lambda(t) - \lambda| \Upsilon^t$.

D'autres résultats ont été obtenus et une généralisation pour $d \geq 1$ a été effectuée (mais non exposée). De plus, une étude comparative, avec les résultats obtenus dans [3] et [2], est en cours.

Références

1. D. Aïssani. Réflexion sur la théorie mathématique de stabilité. *Laboratoire de Recherche Opérationnelle, N°06-86, D.R.S-M.D.N. Bordj-el-Bahri*, pages 1–5, 1986.
2. D. Aïssani. Perturbation des opérateurs de transition pour l'étude de la stabilité des chaînes de markov. *Cahiers Mathématiques, fasicule N°1*, (04) :07–12, Avril 1988.

3. N.V. Kartashov. Asymptotic expansions and Inequalities in Stability Theorems for Markov Chains with relatively bounded perturbations. *Plenum Publishing Corporation*, pages 509–518, 1988.

4. Z. Mouhoubi and D. Aïssani. On the Quantitatives Estimates of the Uniform Ergodicity for Markov chains. *Proceeding of the 8-th International Vilnius Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics. Vilinius, Lithuania*, pages 7–8, 2002.