

T-set و مسائل ناقصية ذات أسس متغيرة بمعطى قياس T-set and elliptic problems with variable exponents and measure data

مختاري فارس

قسم الرياضيات و الاعلام الالي - جامعة الجزائر، الجزائر
fares_maths@yahoo.fr, f.mokhtari@univ-alger.dz

تمت ترجمة المقال من الإنجليزية إلى العربية من طرف
ناصر مختار
المدرسة العليا للاساتذة بالقبّة الجزائر - مخبر EDPNL-HM،
المدرسة العليا للاساتذة بالاغواط ، الجزائر
nasrimokhtar@gmail.com

15 ديسمبر 2020

ملخص (Abstract): في هذا الورق نثبت وجود حلول ضعيفة لنوع من المسائل الناقصية غير الخطية من الصنف $-\operatorname{div}(\hat{a}(x, u, Du)) = \mu$ حيث μ هو قياس رادون (Radon) المحدود. فضاء الحلول يتطلب ادخال مفهوم T-set (مفهوم T-set تم تقديمه في [8]) و فضاء لوبيغ-سوبولاف (Lebesgue-Sobolev) ذو اسس متغيرة.

كلمات مفتاحية (Keywords): T-set اسس متغيرة، معادلة ناقصية، معطى قياس.
MSC: 2000 35B38 ، 35J60

1 المدخل (Introduction):

هذا العمل مكرس لدراسة المسائل الناقصية

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\hat{a}(x, u, Du)) = \mu, & \text{في } \mathcal{D}'(\Omega) \\ u = 0, & \text{على } \partial\Omega \end{cases} \quad (P)$$

حيث Ω هو جزء مفتوح و محدود من \mathbb{R}^N ($N \geq 2$) ذو حافة لبشيتزية (Lipschitzienne) $\partial\Omega$ ، μ هو القياس المحدود لرادون على Ω ، و $a : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ هو تابع لكارتيدوري (Carathéodory) يحقق، حيثما كان تقريبا $x \in \Omega$ و $\forall u \in \mathbb{R}$ و $\forall \xi, \xi' \in \mathbb{R}^N$ ، ما يلي:

$$\widehat{a}(x, u, \xi) \xi \geq \alpha |\xi|^{p(\cdot)}, \quad \widehat{a}(x, u, \xi) = (a_1, \dots, a_N) \quad (1)$$

$$|\widehat{a}(x, u, \xi)| \leq \beta (h + |u|^{p(\cdot)-1} + |\xi|^{p(\cdot)-1}), \quad h \in L^{p'(\cdot)}(\Omega) \quad (2)$$

$$(\widehat{a}(x, u, \xi) - \widehat{a}(x, u, \xi'))(\xi - \xi') > 0, \quad \xi \neq \xi', \quad (3)$$

حيث الاس المتغير $p(\cdot) : \overline{\Omega} \rightarrow (1, +\infty)$ هو تابع مستمر بحيث:

$$\forall x \in \overline{\Omega}: \quad 1 < p(x) < N, \quad p'(x) = \frac{p(x)}{p(x) - 1}. \quad (4)$$

نعرف العدد

$$p_0 = \frac{(1 - \frac{1}{p^+})N + N}{1 - \frac{1}{p^+} + N}. \quad (5)$$

تستخدم الأسس المتغيرة اليوم في فروع مختلفة من العلوم التطبيقية. في بعض الحالات تقدم نماذج واقعية لدراسة الظواهر الطبيعية في السوائل الكهروإيولوجية (Electrorheological) ([12]، [11])، وتطبيقات مهمة تتعلق بمعالجة الصور [3]. في الحالة $\widehat{a}(x, u, \xi) = \widehat{a}(\xi)$ حيث $\widehat{a}(\xi)$ الشعاع الذي مركبته هي $|\xi|^{p(\cdot)-2}\xi$ و $p(\cdot)$ تابع مستمر على $\overline{\Omega}$ بحيث $p(\cdot) > 2 - \frac{1}{N}$ نجد أن وجود حل ضعيف u في فضاء سوبولاف المعتاد $W_0^{1,q(\cdot)}(\Omega)$ لمسألة ناقصية بمعطى L^1 على Ω حيث $q(\cdot)$ تابع مستمر يحقق $1 \leq q(x) < \frac{N(p(x)-1)}{N-1}$ لكل $x \in \overline{\Omega}$ تم اثباته في [1].

من أجل $1 < p(\cdot) \leq 2 - \frac{1}{N}$ نجد هذا الاطار ضيق جدا لاحتواء الحلول. في الحالة الثابتة $p(\cdot) = p > 2 - \frac{1}{N}$ يوجد حل ضعيف u للمسألة (P) في الفضاء $W_0^{1,q}(\Omega)$ من أجل كل $q \in [1, \frac{N(p-1)}{N-1})$ وهذا تم اثباته في [2].

راكوتوزن (Rakotoson) [8, 9] أثبت وجود حلول في مجموعة أكثر عمومية يرمز لها $L_0^{1,p}(\Omega)$ حيث $1 < p \leq N$. الغرض من هذا الورق هو الضبط و المعالجة الكاملة للمسألة (P) في مجموعة جديدة $L_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ (انظر القسم 3) حيث μ قياس رادون المحدود على Ω و $p(\cdot)$ تابع مستمر حيث $1 < p(x) < N$ من أجل كل $x \in \overline{\Omega}$ كمثال نموذجي نعتبر الاشكالية النموذجية

$$\begin{cases} -\operatorname{div} (|Du|^{p(x)-2} Du) = \delta, & B \text{ في} \\ u = 0, & \text{على } \partial B \end{cases}$$

حيث δ هو قياس رادون عند الاصل و $B = \{x \in \mathbb{R}^N \mid |x| < 1\}$. تمثل الخطوات الرئيسية للإثبات في الحصول على تقديرات قبيلة لمتتالية المسائل التقريبية المناسبة ثم بعدها المرور إلى النهاية. هناك نوعان من الصعوبات التي تظهر في معالجة المؤثرات الناقصية غير الخطية $(\widehat{a}(x, u, Du))$ $Au = -\operatorname{div}(\widehat{a}(x, u, Du))$ بدلا من مؤثر لابلاس مع أسس متغيرة، الأولى هي الحصول على تقديرات قبيلة للحل u و التدرج Du ، و الصعوبة الثانية هي المرور إلى النهاية عندما لاخطية A مرتبطة بـ u و Du . في هذه المرحلة الخاصة (27) مطلوبة.

2 مفاهيم أولية (Preliminaries):

في هذا القسم نذكر أولاً ببعض خصائص فضاءات لوبيغ ذات الأسس المتغيرة $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.
نعرف المجموعة

$$C_+(\bar{\Omega}) = \{v \in C(\bar{\Omega}) \mid v^- = \inf_{x \in \bar{\Omega}} v(x) > 1\}.$$

ليكن $p \in C_+(\bar{\Omega})$ ، نشير بالرمز $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ الى فضاء التوابع f القابلة للقياس على Ω بحيث

$$\rho_{p(\cdot)}(f) = \int_{\Omega} |f(x)|^{p(x)} dx < +\infty.$$

الفضاء $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ عند تزويده بالنظيم

$$\|f\|_{p(\cdot)} := \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} = \inf \{\lambda > 0 \mid \rho(f/\lambda) \leq 1\}$$

يصبح فضاء بناخيا.

وبالإضافة الى ذلك، إذا كان $p^- > 1$ فإن $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ انعكاسي وثنوي $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ يمكن تعريفه بـ $L^{p'(\cdot)}(\Omega)$ حيث

$$\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} = 1$$

من أجل كل $u \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ ، $v \in L^{p'(\cdot)}(\Omega)$ حيث $p(x) \in (1, \infty)$ لدينا متباينة هولدر (Hölder)

$$\left| \int_{\Omega} uv dx \right| \leq \left(\frac{1}{p_-} + \frac{1}{p'_-} \right) \|u\|_{p(\cdot)} \|v\|_{p'(\cdot)} \leq 2 \|u\|_{p(\cdot)} \|v\|_{p'(\cdot)}.$$

بشكل خاص، لكل ثابت $q \in (1, p^-)$

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|u\|_{p(\cdot)}.$$

الفضاء البناخي $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ مع $p \in C_+(\bar{\Omega})$ يعرف بـ

$$W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) = \{u \in L^{p(\cdot)}(\Omega) \mid |Du| \in L^{p(\cdot)}(\Omega), \partial\Omega \text{ على } u = 0\}$$

مزود بالنظيم $\|\cdot\|_{W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)} : u \mapsto \|Du\|_{p(\cdot)}$

الفضاء $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ قابل للفصل و انعكاسي بشرط $p^- > 1$.

بما أن $p \in C_+(\bar{\Omega})$ ، متباينة بوانكاريه (Poincaré) محققة (انظر [4]):

$$\|u\|_{p(\cdot)} \leq C \|Du\|_{p(\cdot)}. \quad (6)$$

التوابع الملساء عموماً ليست كثيفة في $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ ، ولكن إذا كان الاس المتغير $p(\cdot)$ هولدر لوغاريتمي مستمر (log-Hölder) بمعنى

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{M}{\ln|x-y|} \quad \forall x, y \in \Omega \text{ بحيث } |x-y| \leq 1/2,$$

فان التوابع الملساء كثيفة في $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$.

التوطئة التالية تستخدم لاحقاً

توطئة 2.1 ([6]). إذا كان $u \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ ، (u_n) ، فان العلاقات التالية محققة

$$\begin{aligned} & \cdot \|u\|_{p(\cdot)} < 1 (> 1; = 1) \Leftrightarrow \rho(u) < 1 (> 1; = 1) \\ & \cdot \min\left(\rho(u)^{\frac{1}{p^+}}; \rho(u)^{\frac{1}{p^-}}\right) < \|u\|_{p(\cdot)} < \max\left(\rho(u)^{\frac{1}{p^+}}; \rho(u)^{\frac{1}{p^-}}\right) \\ & \cdot \|u_n - u\|_{p(\cdot)} \rightarrow 0 \Leftrightarrow \rho(u_n - u) \rightarrow 0 \\ & \cdot p^+ = \sup_{x \in \Omega} p(x) < \infty \text{ لأن} \end{aligned}$$

نشير الى أن المتباينة التالية

$$\int_{\Omega} |u|^{p(x)} dx \leq C \int_{\Omega} |Du|^{p(x)} dx,$$

ليست محققة عموما (انظر [5] او [4]). لكن، بواسطة التوطئة 2.1 و (6)، يمكن أن نكتب

$$\int_{\Omega} |u|^{p(x)} dx \leq C \max\left\{\|Du\|_{p(\cdot)}^{p^+}; \|Du\|_{p(\cdot)}^{p^-}\right\}. \quad (7)$$

حيث C ثابت يتعلق بـ Ω .

نعرف أيضا المجموعة $L^{s(\cdot)}(\Omega)$ حيث $s: \bar{\Omega} \rightarrow (0, \infty)$ تابع مستمر بـ

$$L^{s(\cdot)}(\Omega) = \left\{ \int_{\Omega} |u|^{s(x)} dx < \infty \text{ مع } u: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ قابل للقياس} \right\}.$$

المراجع المحتملة لنظرية فضاءات لوبيغ - سوبولاف ذات الاس المتغير [4]، [5]، [6].

3 نوع جديد من المجموعات (New type of Sets):

ليكن $L_0(\Omega)$ الذي يرمز الى مجموعة التوابع القابلة للقياس على Ω . من أجل كل تابع $p \in C_+(\Omega)$ نضع

$$\text{Lip}_{p(\cdot)}(\mathbb{R}) = \left\{ T \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}) \mid T(0) = 0 \text{ و } T' \in L^{p^-}(\mathbb{R}) \right\}.$$

من أجل $k > 0$ إذا وضعنا $T_k(t) = \frac{1}{2}\{|t+k| - |t-k|\}$ حيث $t \in \mathbb{R}$ فاننا نلاحظ أن التوابع T_k ($k > 0$) و قوس الظل \arctan تنتمي الى $\text{Lip}_{p(\cdot)}(\mathbb{R})$.
نعرف

$$L_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) = \left\{ u \in L_0(\Omega) \mid \forall T \in \text{Lip}_{p(\cdot)}(\mathbb{R}), T(u) \in W_0^{1,p^-}(\Omega), \text{ مع} \right. \\ \left. \sup_{k>0} \int_{\Omega} \frac{|DT_k(u)|^{p(x)}}{(1+|T_k(u)|)^{1+\delta}} dx < \infty, \forall \delta > 0 \right\}.$$

نشير الى انه إذا كان $p(x) = p$ من أجل كل $x \in \Omega$ فان $L_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ يسمى T-set وهذا في ([8]).

من السهل إثبات أن $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) \subset L_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ من أجل كل $p \in C_+(\bar{\Omega})$.

فرضية 3.1. إذا كان $v \in L_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ فان $Dv(x)$ موجود حيثما كان تقريبا على Ω ، وبالإضافة الى ذلك إذا كان φ تابع من صنف C^1 من \mathbb{R} نحو \mathbb{R} ، لدينا

$$D(\varphi \circ v)(x) = (\varphi' \circ v)Dv(x) \quad \text{حيثما كان تقريبا على } \Omega \quad (8)$$

من أجل كل $k > 0$ التابع $v^k = T_k(v)$ يحقق

$$Dv^k(x) = \begin{cases} Dv(x), & |v(x)| < k \\ 0, & \text{غير ذلك} \end{cases} \quad \text{حيثما كان تقريبا على } \Omega.$$

الاثبات: انظر [8]

نرمز بـ C_i او C الى ثوابت مختلفة تتعلق فقط ببنية \hat{a} ، μ ، N ، و Ω .

فرضية 3.2. نفرض أن p_0 المعرف في (5)، و $s(\cdot)$ و $p(\cdot)$ توابع مستمرة على $\bar{\Omega}$ بحيث

$$\begin{cases} 0 < s(x) < \frac{N(p(x)-1)}{N-p(x)}, \\ 1 < p(x) < N, \end{cases} \quad \forall x \in \bar{\Omega}. \quad (9)$$

إذا كان

$$s^+ < \frac{N(p^- - 1)}{N - p^-} \quad \text{او} \quad p^- > p_0 \quad (10)$$

فانه لدينا

$$L_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) \subset L^{s(\cdot)}(\Omega). \quad (11)$$

الاثبات: نبدأ بالحالة

$$0 < s^+ < \frac{N(p^- - 1)}{N - p^-}. \quad (12)$$

ليكن $v \in L_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ و s^+ المعرف في (12)، و ليكن $\alpha = 1 - \frac{s^+}{p^*}$ مع $p^* = \frac{Np^-}{N-p^-}$ اذن نجد $1 < \alpha < \frac{1}{p^-}$.
من أجل $k > 0$ نجد أن $v^k = T_k(v) \in W_0^{1,p^-}(\Omega)$ بما أن

$$\psi_\alpha(t) = \int_0^t \frac{d\sigma}{(1+|\sigma|)^\alpha}$$

تابع من صنف C^1 و $0 < \psi'_\alpha < 1$ اذن بواسطة (8) نستنتج أن $\psi_\alpha(v^k) \in W_0^{1,p^-}(\Omega)$.
بالإضافة الى ذلك باستعمال متباينة بوانكاريه نحصل على

$$\|\psi_\alpha(v^k)\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C_1 \|D\psi_\alpha(v^k)\|_{L^{p^-}(\Omega)}$$

ومنه

$$\int_\Omega |\psi_\alpha(v^k)|^{p^*} dx \leq C_2 \left(\int_\Omega \frac{|Dv^k|^{p^-}}{(1+|v^k|)^{\alpha p^-}} dx \right)^{\frac{p^*}{p^-}}. \quad (13)$$

بملاحظة أن

$$\alpha p^* - 1 = \left(1 - \frac{s^+}{p^*}\right) p^* - 1 = \frac{N-p}{N} \left(\frac{N(p^- - 1)}{N - p^-} - s^+\right) > 0,$$

و أن $v \in L_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ نجد أن

$$\sup_{k>0} \int_\Omega \frac{|Dv^k|^{p^-}}{(1+|v^k|)^{\alpha p^-}} < \infty \quad (14)$$

والتالي من خلال (13) نحصل على

$$\int_{\Omega} |\psi_{\alpha}(v^k)|^{p^*-} dx \leq C_3, \quad \forall k > 0. \quad (15)$$

الآن ليكن $t \in \mathbb{R}$ اذن

$$\begin{aligned} |t|^{1-\alpha} &\leq (1+|t|)^{1-\alpha} \\ &= (1-\alpha)|\psi_{\alpha}(t)| + 1. \end{aligned} \quad (16)$$

من خلال (16)، نستنتج أن

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |v^k|^{s^+} &= \int_{\Omega} |v^k|^{p^*-}(1-\alpha) \\ &\leq 2^{p^*-} - 1 (1-\alpha)^{p^*-} \int_{\Omega} |\psi_{\alpha}(v^k)|^{p^*-} + 2^{p^*-} - 1 |\Omega| \end{aligned} \quad (17)$$

بواسطة (15) و (17) نحصل على

$$\int_{\Omega} |v^k|^{s^+} \leq C_4. \quad (18)$$

حيث C_4 ثابت موجب مستقل عن k .
بجعل $k \rightarrow \infty$ في (18) و من خلال توطئة فاتو (Fatou) يمكننا استنتاج أن

$$\int_{\Omega} |v|^{s^+} dx \leq C_4.$$

والتالي نحصل على $v \in L^{s(\cdot)}(\Omega)$.

الآن نفرض أن $s^+ \geq \frac{N(p^- - 1)}{N - p^-}$.

من خلال (9) واستمرارية $s(\cdot)$ و $p(\cdot)$ على $\bar{\Omega}$ يوجد ثابت $\delta > 0$ بحيث

$$\max_{y \in B(x, \delta) \cap \Omega} s(y) < \min_{y \in B(x, \delta) \cap \Omega} \frac{N(p(y) - 1)}{N - p(y)}, \quad \forall x \in \Omega. \quad (19)$$

بملاحظة أن $\bar{\Omega}$ متراص فإنه بإمكاننا تغطيتها بعدد من الكرات $(B_i)_{i=1}^k$.
علاوة على ذلك، يوجد ثابت $\tau > 0$ بحيث

$$|\Omega_i| > \tau, \quad \forall i = 1, \dots, N \quad \text{حيث} \quad \Omega_i := B_i \cap \Omega. \quad (20)$$

نعرف

$$s_i^+ = \max_{y \in \Omega_i} \{s(y)\}, \quad p_i^- = \min_{y \in \Omega_i} \{p(y)\}.$$

ليكن $v \in L_0^{1, p(\cdot)}(\Omega)$ ولنفرض أن $s_i^+ < \frac{N(p_i^- - 1)}{N - p_i^-}$.

إذا وضعنا $\alpha_i = 1 - \frac{s_i^+}{p_i^-}$ فإن $\frac{1}{p_i^-} < \alpha_i < 1$ ، من خلال الافتراضات على p^- نجد

$$1 - \alpha_i < 1 - \frac{1}{p_i^-} \leq 1 - \frac{1}{p^+} < \frac{N(p^- - 1)}{N - p^-}.$$

هذا مع (18)، يعطينا

$$\int_{\Omega_i} |v^k|^{1-\alpha_i} dx \leq |\Omega| + \int_{\Omega} |v^k|^{1-\frac{1}{p^+}} dx \leq C_5. \quad (21)$$

باستخدام متباينة بوانكاريه-ويرتينغر (Poincaré-Wirtinger)، نحصل على

$$\|\psi_{\alpha_i}(v^k) - \bar{\psi}_{\alpha_i}(v^k)\|_{L^{p_i^-}(\Omega_i)} \leq C_6 \|D\psi_{\alpha_i}(v^k)\|_{L^{p_i^-}(\Omega_i)},$$

حيث

$$\bar{\psi}_{\alpha_i}(v^k) = \frac{1}{|\Omega_i|} \int_{\Omega_i} \psi_{\alpha_i}(v^k).$$

المتباينات (16)، (21) و (20) تضمن لنا أن

$$|\bar{\psi}_{\alpha_i}(v^k)| \leq C_7.$$

وبالتالي، من خلال أن $p_i^- \leq p(x)$ على Ω_i و $\alpha_i p_i^- > 1$ نحصل على

$$\|\psi_{\alpha_i}(v^k)\|_{L^{p_i^-}(\Omega_i)} \leq C_8 + C_6 \|D\psi_{\alpha_i}(v^k)\|_{L^{p_i^-}(\Omega_i)} \leq C_9.$$

الآن، باستخدام نفس الحجج كما كان من قبل محليا، بدلاً من التقدير (17)، نتحصل على أنه من أجل كل $i = 1, \dots, k$

$$\int_{\Omega_i} |v^k|^{s_i^+} \leq C_{10} + C_{10} \int_{\Omega_i} |\psi_{\alpha_i}(v^k)|^{p_i^-} dx \leq C_{11}.$$

باستخدام توطئة فاتو نجد ان

$$\int_{\Omega_i} |v|^{s_i^+} \leq C_{11}, \quad \forall i = 1, \dots, k.$$

اخيراً، بما أن $s(x) \leq s_i^+$ على Ω_i نتحصل على النتيجة المطلوبة.

ملاحظة 3.3. لدينا $p_0 < 2 - \frac{1}{N}$ من أجل كل تابع $p(\cdot) > 1$.

فرضية 3.4. ليكن $p(\cdot) : \bar{\Omega} \rightarrow (1, N)$ و $q(\cdot) : \bar{\Omega} \rightarrow (0, N/(N-1))$ متتابع مستمر. نفرض أن

$$\max_{x \in \bar{\Omega}} \{q(x)(p(x) - 1)\} < \frac{N(p^- - 1)}{N - 1} \quad \text{أو} \quad p^- > p_0.$$

اذن نجد

$$\int_{\Omega} |Dv|^{q(x)(p(x)-1)} dx < \infty, \quad \forall v \in L_0^{1,p(\cdot)}(\Omega).$$

الاثبات: ليكن $v \in L^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ و $q(x) \in (0, N/(N-1))$ من أجل كل $x \in \bar{\Omega}$ ، وليكن $s(x) = q(x)(p(x)-1)$ في خطوة اولى ليكن s^+ ثابت يحقق

$$0 < s^+ < \frac{N(p^- - 1)}{N - 1}. \quad (22)$$

نشير الى أن (22)، مع (4)، يستلزم أن $s(x) < p^-$ الان، من أجل كل $k > 0$ ، نكتب

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |Dv^k|^{s(x)} dx &= \int_{\Omega} \frac{|Dv^k|^{s(x)}}{(1 + |v^k|)^{(1+\delta)s(x)/p^-}} (1 + |v^k|)^{(1+\delta)s(x)/p^-} \\ &\leq 2 \left\| \frac{|Dv^k|^{s(x)}}{(1 + |v^k|)^{(1+\delta)s(x)/p^-}} \right\|_{\frac{p^-}{s^+}} \left\| (1 + |v^k|)^{(1+\delta)s(x)/p^-} \right\|_{\frac{p^-}{p^- - s^+}}. \end{aligned}$$

بما أن

$$\int_{\Omega} \frac{|Dv^k|^{p(x)}}{(1 + |v^k|)^{1+\delta}} dx \leq C, \quad \forall k > 0,$$

اذن من خلال التوطئة 2.1 نحصل على

$$\int_{\Omega} |Dv^k|^{s(x)} dx \leq C_{12} \max \left\{ \left(\int_{\Omega} (1 + |v^k|)^{(1+\delta)\frac{s(x)}{p^- - s^+}} \right)^{\frac{p^- - s^+}{p^-}} ; \left(\int_{\Omega} (1 + |v^k|)^{(1+\delta)\frac{s(x)}{p^- - s(x)}} \right)^{\frac{p^- - s^-}{p^-}} \right\}. \quad (23)$$

بما أن $0 < s^+ < \frac{N(p^- - 1)}{N - 1}$ فان $\frac{s(x)}{p^- - s(x)} \leq \frac{s^+}{p^- - s^+} < \frac{N(p^- - 1)}{N - p^-}$ ، اذن يمكننا اختيار $\delta > 0$ بحيث

$$\max_{x \in \bar{\Omega}} \left\{ (1 + \delta) \frac{s(x)}{p^- - s(x)} \right\} = (1 + \delta) \frac{s^+}{p^- - s^+} < \frac{N(p^- - 1)}{N - p^-}. \quad (24)$$

من خلال الفرضية 3.2، (23) و (24)، نجد أن

$$\int_{\Omega} |Dv^k|^{s(x)} dx \leq C_{13}. \quad (25)$$

من الفرضية 3.1، من أجل اي معطى $v \in L_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ فان $Dv(x)$ موجود حيثما كان تقريبا في Ω . يجعل $k \rightarrow +\infty$ في (25) وباستخدام توطئة فاتو، نحصل على

$$\int_{\Omega} |Dv|^{s(x)} dx \leq C_{13}.$$

الان، نفرض أن $s^+ \geq \frac{N(p^- - 1)}{N - 1}$ بنفس حجة (23) نحصل على $\delta > 0$ يحقق

$$\int_{\Omega} |Dv^k|^{s(x)} dx \leq C_{14} \max \left\{ A_k^{1 - \left(\frac{s(\cdot)}{p(\cdot)}\right)^+} ; A_k^{1 - \left(\frac{s(\cdot)}{p(\cdot)}\right)^-} \right\}$$

مع

$$A_k = \int_{\Omega} (1 + |v^k|)^{(1+\delta)\frac{s(x)}{p(x)-s(x)}} و (1 + \delta)\frac{s(x)}{p(x)-s(x)} < \frac{N(p(x)-1)}{N-p(x)}.$$

باستخدام الفرضية 3.2 و من خلال كون $p^- > p_0$ يمكننا استنتاج أن

$$\int_{\Omega} |Dv^k|^{q(x)(p(x)-1)} dx \leq C_{15}.$$

هذا و باستخدام توطئة فاتو، نتحصل على

$$\int_{\Omega} |Dv|^{s(x)} dx \leq C_{15}.$$

هذا التقدير يثبت المطلوب.

فرضية 3.5. ليكن $\bar{\Omega} \rightarrow (2 - \frac{1}{N}, N)$ تابع مستمر، لدينا

$$L_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) \subset W_0^{1,s(\cdot)}(\Omega)$$

من أجل كل تابع مستمر $s(\cdot) : \bar{\Omega} \rightarrow [1, \infty)$ حيث

$$1 \leq s(x) < \frac{N(p(x)-1)}{N-1}, \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

الاثبات: بما أن $p(x) > 2 - \frac{1}{N}$ لدينا $N(p(x)-1)/(N-1) > 1$ من أجل كل $x \in \bar{\Omega}$.
ليكن $q(x) = s(x)/(p(x)-1)$ و $s(x) \in [1, \frac{N(p(x)-1)}{N-1})$ اذن $q(x) \in (0, \frac{N}{N-1})$ و $p^- > 2 - \frac{1}{N} > p_0$ من الفرضية 3.4، من أجل كل $v \in L_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ نجد أن

$$\int_{\Omega} |Dv|^{s(x)} dx \leq C_{16}. \quad (26)$$

انتهى الاثبات.

ملاحظة 3.6. في الحالة الثابتة $p(x) = p$ ، الفرض $p > p_0$ محقق من أجل كل اس $p > 1$.

4 النتائج الرئيسية (The main Results):

تعريف 4.1. تابع u هو حل ضعيف للمسألة (P) إذا كان $u \in L_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ ، $\hat{a}(x, u, Du) \in L^1(\Omega)^N$ ، و من أجل كل $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ نجد أن

$$\int_{\Omega} \hat{a}(x, u, Du) D\varphi dx = \int_{\Omega} \varphi d\mu.$$

النتيجة الرئيسية هي التالي.

نظرية 4.2. ليكن $\mu \in M(\Omega)$ ، نفرض أن $\bar{\Omega} \rightarrow (1, N)$ تابع مستمر بحيث

$$\frac{p^+ - 1}{p^- - 1} < \frac{N}{N-1} \quad \text{or} \quad p_- > p_0, \quad (27)$$

و \hat{a} يحقق (1)-(3). فإنه، يوجد على الاقل حل ضعيف $u \in L_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ للمسألة الناقصية (P).
الاثبات يحتاج إلى ثلاث خطوات.

الخطوة 1 : تقريب.

لتكن (μ_n) متتالية من $C_0^\infty(\Omega)$ تتقارب نحو μ في $\mathcal{D}'(\Omega)$ و تحقق التقدير

$$\|\mu_n\|_{L^1(\Omega)} \leq \|\mu\|_{M(\Omega)}, \quad n \geq 1.$$

من أجل $u \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ نضع

$$Au = -\operatorname{div}(\hat{a}(x, u, Du)).$$

المؤثر A ينقل $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ نحو $(W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega))'$ ، وبفضل (2) نجد أن A نصف مستمر (hemicontinuous) بمعنى: من أجل كل $u, v, w \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ ، التطبيق $\mathbb{R} \ni \lambda \mapsto \langle A(u + \lambda v), w \rangle$ مستمر. بواسطة (1) و التوطئة 2.1 يمكننا كتابة

$$\begin{aligned} \frac{\langle Au, u \rangle}{\|u\|_{W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)}} &\geq \alpha \frac{\rho_{p(\cdot)}(Du)}{\|u\|_{W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)}} \\ &\geq \alpha \frac{\min \left\{ \|u\|_{W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)}^{p^+}, \|u\|_{W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)}^{p^-} \right\}}{\|u\|_{W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)}}. \end{aligned}$$

هذا يثبت أن A قهري (Coercif).

المؤثر A محدود. في الواقع، إذا كان $u \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ نجد أن

$$\begin{aligned} \|Au\|_{(W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega))'} &\leq \sup_{\varphi \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega), \|\varphi\| \leq 1} \int_{\Omega} \beta (h + |u|^{p(x)-1} + |Du|^{p(x)-1}) |D\varphi| dx \\ &\leq 2\beta \left\| (h + |u|^{p(\cdot)-1} + |Du|^{p(\cdot)-1}) \right\|_{\frac{p(\cdot)}{p(\cdot)-1}}. \end{aligned}$$

من خلال التوطئة 2.1 و (7) نحصل على النتيجة المطلوبة.

النتيجة المحصل عليها في [7] تؤكد أن A غامر، وبالتالي توجد متتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ تحقق

$$\int_{\Omega} \hat{a}(x, u_n, Du_n) D\varphi = \int_{\Omega} \mu_n \varphi, \quad \forall \varphi \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega). \quad (28)$$

الخطوة 2 : تقديرات قبلية.

توطئة 4.3. من أجل كل $T \in \operatorname{Lip}_{p(\cdot)}(\mathbb{R})$ ، يوجد ثابت $C = C(T)$ ، بحيث

$$\int_{\Omega} |DT(u_n)|^{p^-} dx \leq C, \quad \forall n \geq 1. \quad (29)$$

$$\int_{\Omega} |DT_k(u_n)|^{p(x)} dx \leq k \frac{\|\mu\|_{M(\Omega)}}{\alpha}, \quad \forall k > 0, \quad (30)$$

و من أجل كل $\delta > 0$ ، يوجد ثابت $C = C(\delta)$ يحقق

$$\int_{\Omega} \frac{|Du_n|^{p(x)}}{(1 + |u_n|)^{1+\delta}} dx \leq C, \quad \forall n \geq 1. \quad (31)$$

الاثبات: ليكن $T \in \text{Lip}_{p(\cdot)}(\mathbb{R})$.
 نعتبر التابع الاختباري $\int_0^{u_n} |T'(t)|^{p^-} dt$ في (28).
 باستعمال قهريّة A ، نحصل على

$$\begin{aligned} & \alpha \int_{\Omega} |Du_n|^{p(x)} |T'(u_n)|^{p^-} dx \\ & \leq \|\mu_n\|_{L^1(\Omega)} \int_{-\infty}^{+\infty} |T'(x)|^{p^-} dx \leq C(T). \end{aligned}$$

اذن لدينا (29). إذا اخذنا تابع اختباري في (28)، نحصل على (30).
 من أجل التقدير (31)، نختار $\psi_{\delta}(u_n) = \int_0^{u_n} \frac{d\sigma}{(1+|\sigma|)^{1+\delta}} d\sigma$ تابع اختباري في (28) و باستعمال (1) نجد

$$\int_{\Omega} \frac{|Du_n|^{p(x)}}{(1+|u_n|)^{1+\delta}} dx \leq \frac{\|\mu\|_{M(\Omega)}}{\delta\alpha}.$$

توطئة 4.4. ليكن $p(\cdot)$ و $s(\cdot)$ معرفين في الفرضية (3.2). إذا كان الافتراض (10) محقق فإنه لدينا

$$\int_{\Omega} |u_n|^{s(x)} dx \leq C, \quad \forall n \geq 1. \quad (32)$$

الاثبات: من أجل إثبات (32)، نقوم بتعديل اثبات المبرهنة 3.2. وذلك باستبدال (14) بـ (31). هكذا التوطئة 4.4 تم اثباتها.

توطئة 4.5. ليكن $p(\cdot)$ كما هو مشار اليه في (27) اذن يوجد ثابت $C > 0$ ، بحيث

$$\int_{\Omega} |Du_n|^{q(x)(p(x)-1)} dx \leq C, \quad (33)$$

من أجل بعض التوابع المستمرة $q(\cdot)$ على $\bar{\Omega}$ التي تحقق

$$1 < q(x) < \frac{N}{N-1}, \quad x \in \bar{\Omega} \quad \text{كل من أجل كل}$$

الاثبات: نفرض أن $\frac{p^+-1}{p^-} < \frac{N}{N-1}$ ، اذن يوجد تابع مستمر $q(\cdot)$ على $\bar{\Omega}$ يحقق

$$1 < q(x) < \frac{N}{N-1}, \quad \text{و} \quad q^+(p^+ - 1) < \frac{N(p^- - 1)}{N-1}, \quad (34)$$

بالتالي، يوجد $\delta_1 > 0$ بحيث

$$(1 + \delta_1) \frac{q^+(p^+ - 1)}{p^- - q^+(p^+ - 1)} < \frac{N(p^- - 1)}{N - p^-}. \quad (35)$$

بما أن $1 < p(x) < N/(N-1)$ و $1 < q(x) < N/(N-1)$ ، نجد أن
 $q(x)(p(x) - 1) < \frac{N(p(x)-1)}{N-1}$ و $q(x) < p'(x) = p(x)/(p(x) - 1)$

ليكن $\delta > 0$ ، باستعمال متباينة هولدر نحصل على

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |Du_n|^{q(x)(p(x)-1)} dx &= \int_{\Omega} \frac{|Du_n|^{q(x)(p(x)-1)}}{(1+|u_n|)^{(1+\delta)q(x)/p'(x)}} (1+|u_n|)^{(1+\delta)q(x)/p'(x)} dx \\ &\leq 2 \left\| \frac{|Du_n|^{q(x)(p(x)-1)}}{(1+|u_n|)^{(1+\delta)q(x)/p'(x)}} \right\|_{\frac{p'(\cdot)}{q(\cdot)}} \left\| (1+|u_n|)^{(1+\delta)q(x)/p'(x)} \right\|_{\frac{p'(\cdot)}{p'(\cdot)-q(\cdot)}}. \end{aligned}$$

من خلال التوطئة 2.1 و التقدير (31) نستنتج أن

$$\int_{\Omega} |Du_n|^{q(x)(p(x)-1)} dx \leq C \max \left\{ B_n^{1-\left(\frac{q(\cdot)}{p'(\cdot)}\right)^+}; B_n^{1-\left(\frac{q(\cdot)}{p'(\cdot)}\right)^-} \right\}, \quad (36)$$

بحيث

$$B_n = \int_{\Omega} (1+|u_n|)^{(1+\delta)\frac{q(x)(p(x)-1)}{p(x)-q(x)(p(x)-1)}} dx.$$

من خلال كون $q(\cdot)$ تابع مستمر و $q(x) < N/(N-1)$ ، يمكننا اختيار $\delta_2 > 0$ بحيث

$$\delta_2 < \frac{N(p(x)-q(x)(p(x)-1))}{q(x)(N-p(x))} - 1 = \frac{p(x)(N-1)}{q(x)(N-p(x))} \left(\frac{N}{N-1} - q(x) \right).$$

باخذ $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ نجد أن

$$s(x) = (1+\delta) \frac{q(x)(p(x)-1)}{p(x)-q(x)(p(x)-1)} < \frac{N(p(x)-1)}{N-p(x)}, \quad \forall x \in \bar{\Omega}. \quad (37)$$

من خلال (35)، نستنتج أن

$$\max_{x \in \bar{\Omega}} s(x) \leq (1+\delta) \frac{q^+(p^+-1)}{p^- - q^+(p^+-1)} < \frac{N(p^- - 1)}{N - p^-} = \min_{x \in \bar{\Omega}} \left\{ \frac{N(p(x)-1)}{N-p(x)} \right\}. \quad (38)$$

الآن، من خلال (36)، (37)، (38) و (32) نحصل على (33).

إذا كان $\frac{p^+-1}{p^- - 1} \geq \frac{N}{N-1}$ و $1 < q(x) < \frac{N}{N-1}$ ، يمكننا استعمال الفرض $p > p_0$ ، (36) و (37) للحصول على المطلوب. هكذا تم اثبات التوطئة.

لازمة 4.6 (بخصوص التوطئة 4.4). ليكن $p(\cdot)$ و $q(\cdot)$ المشار اليهما في التوطئة 4.5 و $s(x) = q(x)(p(x)-1)$ بملاحظة أن (34) تستلزم أن

$$s^+ < \frac{N(p^- - 1)}{N-1} < \frac{N(p^- - 1)}{N-p^-},$$

من خلال التوطئة 4.4، نجد أن

$$\int_{\Omega} |u_n|^{q(x)(p(x)-1)} dx \leq C. \quad (39)$$

الخطوة 3 : المرور الى النهاية.

توطئة 4.7. توجد متتالية جزئية (نرمز لها (u_n)) تتقارب حيثما كان تقريبا نحو التابع u ($|u|^{q(\cdot)(p(\cdot)-1)} \in L^1(\Omega)$) ، مع $p(\cdot)$ و $q(\cdot)$ مشار اليهما في التوطئة 4.5.

الاثبات: نضع $T(u_n) = \arctan(u_n)$. بواسطة (29) المتتالية $(T(u_n))$ تبقى في مجموعة محدودة من $W_0^{1,p^-}(\Omega)$ ، بالتالي توجد متتالية جزئية (نرمز لها $(T(u_n))$) بحيث

$$T(u_n) \rightarrow w, \quad \Omega \text{ حيثما كان تقريبا في } \Omega \text{ بقوة في } L^{p^-}(\Omega) \text{ و حيثما كان تقريبا في } \Omega. \quad (40)$$

اذن لدينا

$$u_n \rightarrow T^{-1}(w) := u, \quad \Omega \text{ حيثما كان تقريبا في } \Omega. \quad (41)$$

حسب (39) ، (41) ، و توطئة فاتو نستنتج أن u محدود حيثما كان تقريبا في Ω و $|u|^{q(\cdot)(p(\cdot)-1)} \in L^1(\Omega)$.

توطئة 4.8. لدينا ما يلي

$$Du_n \rightarrow Du, \quad \Omega \text{ حيثما كان تقريبا في } \Omega, \quad (42)$$

الاثبات: بنفس طريقة اثبات الجزء الاول من [10] ، التوطئة 3.8 ، اذن نجد

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega_\eta \cap \{|u| \leq k\}} (\widehat{a}(x, u_n, Du_n) - \widehat{a}(x, u_n, DT_k(u)))(Du_n - DT_k(u)) dx = 0 \quad (43)$$

حيث $\Omega_\eta = \{x \in \Omega \mid |u_n - u| \leq \varepsilon\}$ ، من أجل كل $n \geq n_\varepsilon$ و $|\Omega/\Omega_\eta| \leq \eta$ ، $\varepsilon \in (0, 1)$ ، $\eta > 0$ ، باستدلال كما في [10] ، نستنتج انه توجد متتالية جزئية $(Du_{n'})$ تتقارب نحو Du حيثما كان تقريبا في $\Omega_\eta \cap \{|u| \leq k\}$. نضع

$$I_{n,\eta} = \int_{\Omega_\eta \cap \{|u| \leq k\}} |Du_n - Du|^{p^- - 1} dx.$$

حسب (30) ونظرية فيتالي (Vitali) ، المتتالية الجزئية $I_{n',\eta}$ تتقارب نحو صفر. بالاضافة الى ذلك ، بحجة التناقض نجد أن كل المتتالية تتقارب نحو الصفر. من أجل كل $n, m \geq 1$ نكتب

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |Du_n - Du_m|^{p^- - 1} dx &= \int_{\Omega_\eta \cap \{|u| \leq k\}} |Du_n - Du_m|^{p^- - 1} dx + \\ &\int_{\Omega/\Omega_\eta} |Du_n - Du_m|^{p^- - 1} dx + \int_{\Omega_\eta \cap \{|u| > k\}} |Du_n - Du_m|^{p^- - 1} dx \\ &\leq C(I_{n,\eta} + I_{m,\eta}) + \int_{\Omega/\Omega_\eta} |Du_n - Du_m|^{p^- - 1} dx + \int_{\Omega_\eta \cap \{|u| > k\}} |Du_n - Du_m|^{p^- - 1} dx \\ &\leq C(I_{n,\eta} + I_{m,\eta}) + \\ &\left(|\{|u| > k\}|^{1-\frac{1}{q^-}} + |\Omega/\Omega_\eta|^{1-\frac{1}{q^-}} \right) \left(\int_{\Omega} |Du_n - Du_m|^{q^-(p^- - 1)} \right)^{\frac{1}{q^-}}. \end{aligned} \quad (44)$$

نستعمل التوطئة 4.7، نحصل على

$$|\{|u| > k\}| \leq \frac{C}{k^{q^-(p^- - 1)}}.$$

حسب (44) و (33)، يعني أن

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} |Du_n - Du_m|^{p^- - 1} dx \\ & \leq C \left(I_{n,\eta} + I_{m,\eta} + k^{-(q^- - 1)(p^- - 1)} + \eta^{1 - \frac{1}{q^-}} \right). \end{aligned}$$

ناخذ $k \rightarrow +\infty$ و $\eta \rightarrow 0$ ، نستنتج أن

$$\lim_{n,m} \int_{\Omega} |Du_n - Du_m|^{p^- - 1} dx = 0.$$

من خلال هذا نستنتج أن (Du_n) هي متتالية لكوشي بالقياس في Ω ، اذن توجد متتالية جزئية نرمز لها (Du_n) و تابع قابل للقياس w بحيث

$$Du_n \rightarrow w, \quad \Omega \text{ حيشما كان تقريبا في } \Omega. \quad (45)$$

حسب (30) و التوطئة 4.7 نحصل على $Du = w$. الاثبات انتهى.

اثبات النظرية 4.2.

بفضل (31) يمكننا كتابة

$$\int_{\Omega} \frac{|DT_k(u_n)|^{p(x)}}{(1 + |T_k(u_n)|)^{1+\delta}} dx \leq C$$

ناخذ $n \rightarrow +\infty$ في هذا التقدير، حسب التوطئة 4.7 و (42) نجد أن

$$\sup_{k>0} \int_{\Omega} \frac{|DT_k(u)|^{p(x)}}{(1 + |T_k(u)|)^{1+\delta}} dx \leq C \quad (46)$$

ناخذ $n \rightarrow +\infty$ في (29)، نحصل على $T(u) \in W_0^{1,p^-}(\Omega)$. هكذا $u \in L_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$. هذا يثبت
نستخدم (2)، (33)، (39)، التوطئة 4.7، (42) و نظرية فيتالي، يمكننا بسهولة المرور الى النهاية في (28). هذا يثبت
النظرية 4.2.

المراجع

- [1] M. Bendahmane and P. Wittbold. (2009), Renormalized solutions for nonlinear elliptic equations with variable exponents and L^1 - data. Nonlinear Analysis TMA 70 (2), 567-583.

- [2] L. Boccardo, T. Gallouët. (1992), Nonlinear elliptic equations with right hand side measures, Comm. Partial Differential Equations 17, 641-655.
- [3] Y. Chen, S. Levine, and M. Rao. (2006), Variable exponent, linear growth functionals in image restoration, SIAM J. Appl. Math, 66, 1383-1406.
- [4] L. Diening, P. Hästö, T. Harjulehto and M. Ružička. (2011), Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin.
- [5] X.L. Fan and D. Zhao. (2001), On the spaces $L^{p(\cdot)}(U)$ and $W^{m,p(\cdot)}(U)$, J. Math. Anal. Appl, 263, 424-446.
- [6] O. Kováčik, J. Rákosník. (1991), On spaces $L^{p(\cdot)}$ and $W^{1,p(\cdot)}$, Czechoslovak Math. J. 41, 592-618.
- [7] J.L. Lions. (1969), Quelques méthodes de résolution des problèmes aux Limites non linéaires. Dunod, Paris.
- [8] J. M. Rakotoson. (1993), Generalized solution in a new type of sets for problems with measures as data, Differential Integral Equations 6 (1), 27-36.
- [9] J.M. Rakotoson. (1991), Quasilinear elliptic problems with measures as data, Diff. Int. Equ. 4, 449-457
- [10] J. M. Rakotoson. (1994), T -Sets and Relaxed Solutions for Parabolic Equations, Journal of Differential Equations, 458-471.
- [11] Mihailescu, M. and Radulescu, V., A multiplicity. (2006), result for a nonlinear degenerate problem arising in the theory of electrorheological fluids, Proc. R. Soc. A, 462 2625-2641.
- [12] M. Ruzicka. (2000), Electrorheological fluids: modeling and mathematical theory, Springer, Berlin. Lecture Notes in Mathematics, 1748.

