

ETUDE NUMERIQUE DE LA CONVECTION NATURELLE DE RAYLEIGH BENARD PAR LA METHODE DE BOLTZMANN SUR RESEAU

Houat Samir, Nawal Saïdi*

Laboratoire LMNEPM

Université d'Abdelhamid IbnBadiss

Mostaganem

Résumé:

Récemment, la méthode de Boltzmann sur réseau (LBM) a connu un progrès remarquable en la présentant comme une alternative prometteuse aux méthodes de discrétisation classiques pour simuler des phénomènes complexes dans divers champs d'application. Dans ce travail, nous avons utilisé cette méthode pour une étude numérique de la convection naturelle de Rayleigh Bénard, en écoulement laminaire bidimensionnel dans un canal horizontal chauffé par le bas. Le modèle utilisé est celui de BGK avec double populations. Les isothermes et les lignes de courant sont tracées. Le nombre de Nusselt est calculé et analysé pour un nombre de Rayleigh variant entre $2 \cdot 10^3$ et $5 \cdot 10^5$ pour un Prandtl égal à 0,71.

MOTS-CLÉS : Méthode de Boltzmann sur réseau, la convection de Rayleigh Bénard, Canal horizontal.

Abstract

Recently, the lattice Boltzmann method (LBM) has undergone remarkable progress in presenting it as a promising alternative to conventional discretization methods to simulate complex phenomena in various fields application. In this work, we used this method to a numerical study of Rayleigh Bénard convection in two-dimensional laminar flow in a horizontal channel heated from below.. The model

used and the BGK double populations. The isotherms and streamlines are plotted. The Nusselt number is calculated and analyzed for Rayleigh number ranging between $2 \cdot 10^3$ and $5 \cdot 10^5$ for a Prandtl equal to 0.71.

KEYWORDS: *Lattice Boltzmann method, Rayleigh Bénard convection, horizontal channel.*

1. INTRODUCTION :

La convection naturelle de Rayleigh-Bénard [1] est une instabilité hydrodynamique d'origine thermique, se manifeste lorsqu'un fluide dans une cellule est refroidi par le haut et chauffé par le bas. Le fluide chauffé voit sa densité diminuer, et il est donc soumis à la poussée d'Archimède qui tend à le faire monter. De même en haut le fluide froid tend à descendre. Cette instabilité est cependant freinée par deux phénomènes : l'évacuation de la chaleur par conduction (qui réduit l'efficacité du transport par convection) et la viscosité du fluide (qui s'oppose à son mouvement). Les importances relatives des trois mécanismes sont prises en compte par le nombre de Rayleigh $Ra = \frac{g \beta T \Delta T h^3}{\nu \kappa}$ [2]. Où g est l'accélération due à la pesanteur, β le coefficient de dilatation thermique, ΔT la différence de température entre les plaques, h la hauteur de la cellule, ν la viscosité cinématique et κ la diffusivité thermique.

Dans ce travail, nous proposons une contribution à l'étude de la convection naturelle de Rayleigh-Bénard par la méthode de Boltzmann sur réseau.

Au cours de ces dernières années, La méthode de Boltzmann sur réseau LBM [3-5], est en compétition avec les autres méthodes conventionnelles classiques de la CFD, où les méthodes numériques des différences finies, des volumes finis et des éléments finis sont utilisées. Le LBM est une méthode qui provient de la théorie des

automates cellulaires pour les fluides, appelée aussi gaz sur réseau LGA [5]. Sa force réside dans sa facilité de mise en œuvre informatique, sa capacité de reproduire la dynamique des écoulements complexes ainsi que la faculté de surmonter certaines insuffisances des méthodes classiques (discrétisation, condition de stabilité CFL, ...). Le principe de la méthode LBM, se base sur l'approche microscopique des systèmes de fluides, où le fluide est représenté par des particules se déplaçant sur un réseau régulier.

A partir de l'équation cinétique mésoscopique et l'utilisation de la physique statistique (l'équation de Boltzmann) [3], on détermine les quantités physiques macroscopiques notamment la densité, la vitesse, la pression, etc.

Dans ce travail, nous proposons une contribution à l'étude d'un écoulement laminaire en convection naturelle bidimensionnel dans un canal horizontal chauffé par le bas. Nous utilisons le Modèle TLBM à double fonction de distribution indépendante [6] avec l'approximation de Bhatnagar-Gross-Krook (BGK) [8], puis les combiner en un modèle couplé. Les réseaux D2Q9 pour le champ de vitesse et D2Q5 [9] pour le champ de température sont utilisés. Les résultats numériques sont comparés avec des données analytiques et numériques.

2. METHODE DE BOLTZMANN SUR RESEAU:

L'approche utilisée dans ce travail est celle de la méthode de Boltzmann sur réseau thermique (TLBM) à double populations. Elle consiste à exprimer les champs de vitesse et de température par deux équations de distributions de l'équation Boltzmann. C.-à-d., une équation pour la dynamique de l'écoulement (1) et l'autre pour l'équation de l'énergie (2) [6,8], en utilisant deux réseaux différents (figure.1)

$$f_{\alpha}(x_i + c_{\alpha}\Delta t, t + \Delta t) = f_{\alpha}(x_i, t) - \frac{f_{\alpha}(x_i, t) - f_{\alpha}^{eq}(x_i, t)}{\tau_v} + \Delta t F_{\alpha} \quad (1)$$

$$g_{\alpha}(x_i + e_{\alpha}\Delta t, t + \Delta t) = g_{\alpha}(x_i, t) - \frac{g_{\alpha}(x_i, t) - g_{\alpha}^{eq}(x_i, t)}{\tau_T} \quad (2)$$

Car l'espace physique de la LBM est discrétisé en réseau uniforme. Chaque nœud du réseau est connecté avec ses voisins par un certain nombre de vitesses de réseau qui doivent être déterminés par le modèle choisi. Où, Δt est le pas de temps. f_{α} et g_{α} sont les fonctions de distribution de vitesse pour une seule particule dans la direction α . f_{α}^{eq} et g_{α}^{eq} sont les fonctions de distribution à l'équilibre. τ_v et τ_T sont les temps de relaxation simple et F_{α} exprime la force extérieure.

Nous considérons pour le champ des vitesses du fluide, le réseau à deux dimensions carrés avec neuf vitesses, le modèle D2Q9 [10] (figure.1) avec :

$$c_i = \begin{cases} 0 & (i=0) \\ \left[\cos\left(\frac{(i-1)\pi}{2}\right), \sin\left(\frac{(i-1)\pi}{2}\right) \right] \cdot c & (i=1,2,3,4) \\ \left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{(i-5)\pi}{2}\right), \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{(i-5)\pi}{2}\right) \right] \cdot \sqrt{2} \cdot c & (i=5,6,7,8) \end{cases} \quad (3)$$

Où, $c = \Delta x / \Delta t$, Δx et Δt le paramètre de pas du réseau et le pas du temps, respectivement. La vitesse du son dans ce modèle est : $c_s = c / \sqrt{3}$ [3] et l'équation d'état est celui d'un gaz idéal avec :

$$f_{\alpha}^{eq} = \rho w_{\alpha} \left[1 + \frac{3}{c^2} \bar{c}_{\alpha} \cdot \bar{u} + \frac{9}{2c^4} (\bar{c}_{\alpha} \cdot \bar{u})^2 - \frac{3}{2c^2} \bar{u} \cdot \bar{u} \right] \quad (4)$$

Et les facteurs de poids w_α sont : $w_0=4/9$, $w_1= w_2= w_3= w_4=1/9$,
 $w_5= w_6= w_7= w_8=1/36$.

Quand au champ de température, le réseau simplifié à cinq vitesses D2Q5 (figure 1) est utilisé avec : $e_0=(0,0)$ et

$$e_\alpha = c[\cos(\frac{\alpha-1}{2}\pi), \sin(\frac{\alpha-1}{2}\pi)] \quad \text{pour } \alpha = 1,2,3,4$$

(5)

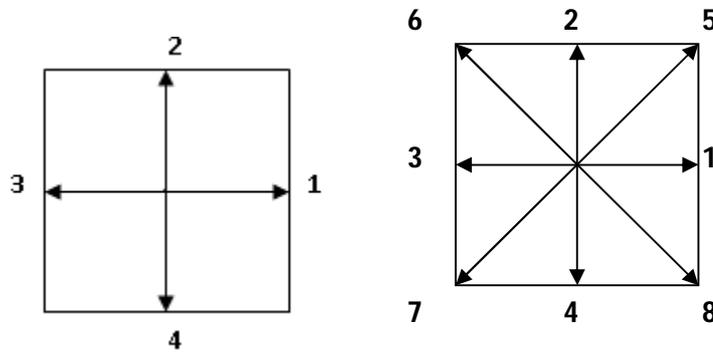


Figure 1 – Modèle a deux dimensions :

Neuf vitesses (d2q9)(a gauche) et à cinq vitesses (d2q5 (à droite).

Et La fonction de distribution d'équilibre, quand à elle est définie pour le réseau D2Q5 [10] :

$$g_\alpha^{eq} = g_\alpha^{eq}(\vec{x}, t) = w_\alpha^T \rho \left[1 + 3 \frac{(\vec{e}_\alpha \cdot \vec{u})}{c^2} \right]$$

(6)

Où, les coefficients de poids w_a^T : $w_0^T = 1/3$, $w_1^T = w_2^T = w_3^T = w_4^T = 1/6$.

Les propriétés de l'écoulement macroscopique (densité, vitesse, température) sont obtenues à chaque nœud, en tant que site par:

$$\rho = \sum_{\alpha=0}^8 f_{\alpha} \quad (7)$$

$$\rho \cdot \vec{u} = \sum_{\alpha=0}^8 \vec{c}_{\alpha} f_{\alpha} \quad (8)$$

$$T = \sum_{\alpha=0}^4 g_{\alpha} \quad (9)$$

Par ailleurs, la viscosité et la diffusivité du fluide sont exprimées en fonction des temps de relaxation des deux fonctions de distribution τ_v et τ_T respectivement comme suit :

$$\nu = \frac{(\tau_v - 0.5)c^2 \Delta t}{3} \quad (10)$$

$$\kappa = \frac{(\tau_T - 0.5)c^2 \Delta t}{3} \quad (11)$$

3. RESULTATS ET DISCUSSIONS:

L'étude proposée dans ce travail, est une contribution à l'étude de la convection naturelle de Rayleigh-Bénard dans un domaine bidimensionnel pour un fluide placé entre deux parois parallèles d'une conduite horizontales (figure 2). La paroi supérieure est froide, et celle du bas est chaude.

La différence de densité qui est causée par la différence de température, crée un mouvement naturelle entre les deux parois en présence de la force de gravitation, exprimée par : $\rho \vec{F} = \rho \beta g_0 (T - T_0) \vec{j}$. Compte tenu de la nature périodique du problème étudié et des conditions aux limites imposées, l'étude numérique est effectués dans un domaine étendu, limité par les lignes fictives P1 et P3 contenant deux blocs, appelé domaine double (**DD**) [11]. Les parois latérales sont supposées périodiques. Le nombre de

Prandtl est fixé à $Pr=0,71$ et le nombre de Rayleigh a été varié entre $Ra=2.10^3$ et 5.10^4 .

Sur les parois supérieure et inférieure, les conditions de non glissement sont appliquées qui sont exprimées dans la méthode de Boltzmann sur réseau par le rebond des particules des fluides sur les parois.

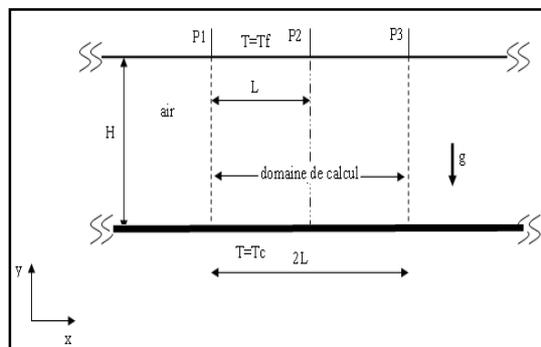


Figure 2 : La configuration géométrique du domaine d'étude

La figure 3, montre les résultats de simulation obtenus pour les isothermes et dans la figure 4, les lignes de courants pour le nombre de Rayleigh $Ra=5.10^3$ et $Ra = 10^4$. Ces résultats sont présentés pour un maillage de $N_x.N_y=121 \times 61$ nœuds.

L'apparition de deux rouleaux de Bénard contre rotatifs pour le domaine (DD) a été constaté, avec une hauteur et une largeur égale à la distance H entre la paroi inférieure et la paroi supérieure.

Les différentes valeurs de Nusselt calculées, pour le nombre de Rayleigh variant entre 2.10^3 et 5.10^4 sont comparées avec les résultats de la référence [11], et celles du nombre de Nusselt donné par la

relation empirique suivante : $Nu=1.56(Ra/Rac)^{0.296}$, ou Rac est le nombre Rayleigh critique. D'après la référence [11], $Rac=1750$.

Une comparaison graphique est présentée dans la figure 5. Les résultats obtenus sont en bonne accord avec celles de la référence [11], et que l'erreur relative varie entre 1.% et 12% par rapport aux résultats obtenus comparés aux résultats de la formule empirique.

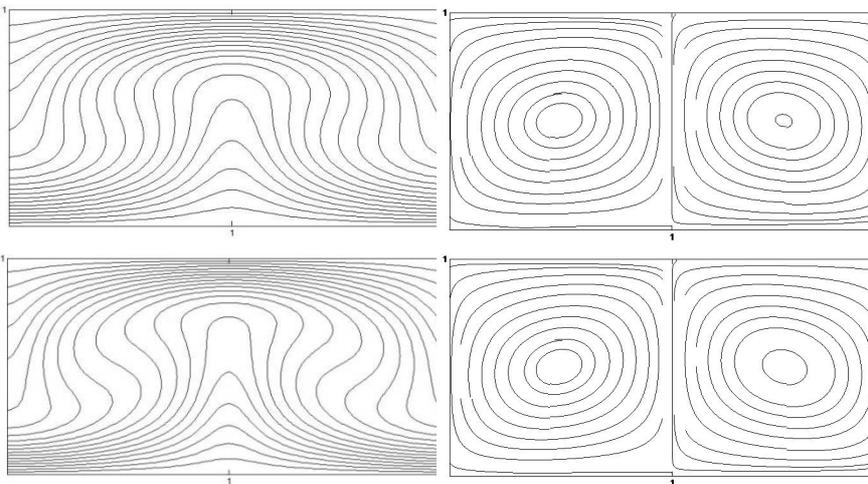


Figure 3 : Les lignes isothermes pour $Ra= 5 \cdot 10^3$ (en haut) et $Ra=10^4$ (en bas) *Figure 4 : Les lignes de courant pour $Ra=5 \cdot 10^3$ (en haut) et $Ra=10^4$ (en bas)*

4. CONCLUSION :

Nous avons présenté un modèle de Boltzmann sur réseau thermique pour étudier le transfert de chaleur par convection de Rayleigh-Bénard dans un canal horizontal infini, et dont la paroi inférieure est totalement chauffée. Dans ce modèle utilisé, nous avons appliqué deux équations de distribution de Boltzmann : une pour le

champ dynamique et l'autre pour le champ thermique. Les résultats numériques présentés pour la validation du problème de la convection de Rayleigh-Bénard, ont démontré l'exactitude et la fiabilité de la méthode de LBM utilisé, avec une bonne concordance entre les résultats obtenus et les résultats de la littérature. Le modèle actuel a tous les avantages, y compris une bonne stabilité numérique et la capacité à gérer en général les problèmes de transfert de chaleur par convection.

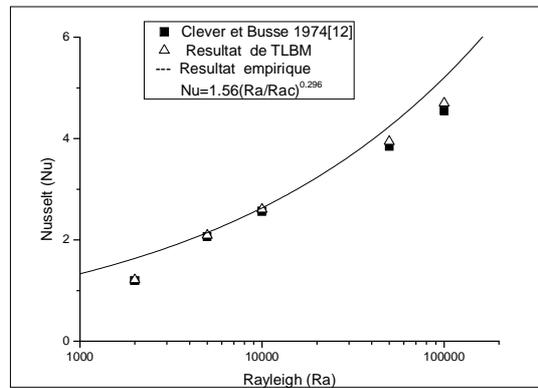


Figure 5: les résultats de comparaison du nombre de Nusselt.

Carrée: résultats du modèle LB; Triangles: résultats de la référence [9];

Ligne: formule empirique $Nu = 1.56(Ra/Rac)^{0.296}$ [9]

REFERENCES:

- [1] H. Bénard J. Phys. Theor. Appl. 9, 1 (1900) 513.
- [2] L. Rayleigh, Philosophical Magazine, **32** (1916) 529.
- [3] Sauro Succi ; The lattice Boltzmann Equation for fluid dynamics and beyond, (2001) Oxford university press.
- [3] S. Chen and G. D. Doolen, Annual Review of Fluid Mechanics, 30, 1 (1998) 329.
- [4] D.A Wolf-Gladrow.; Lattice-Gas Cellular Automata and Lattice Boltzmann Models – An Introduction (2005) Springer, New York.
- [5] G. McNamara, and B. Alder, *Physica A*, 194, 1-4 (1993) 218.
- [6] Y. Peng, C. Shu and Y. T. Chew, Physical Review. E68, 2 (2003). 020671/1.
- [7] C. S. Nor Azwadi and T. Tanahashi, International Journal of Modern Physics, B20, 17 (2006) 2437.
- [8] P. L. Bhatnagar, E. P. Gross and M. Krook, Physical Review, 94, 3 (1954) 511.
- [9] C. Huber, A. Parmigiani, B. Chopard, M. Manga, O. Bachmann, Int J of Heat and Fluid Flow, **29** (2008) 1469.
- [10] A. Bejan; Convection heat transfer (2003) 3ème édition, John Wiley et son inc.
- [11] R. M. Clever and Busse, J F. H.. Fluid Mech. 65 (1974) 625.