

LES TRANSFORMEES DE FOURIER ET DE HARTLEY APPLIQUEES A LA SEPARATION DU CHAMP D'ONDE DE PROFIL SISMIQUE VERTICAL.

Abderrahman BOUGUERN* et Hayder Aziz BAKER**

RÉSUMÉ

Le présent travail traite de l'étude comparative entre les transformations de Hartley et celle de Fourier l'exploitation du domaine fréquentiel est fréquemment utilisé dans le traitement des données sismiques. Cette opération demande un espace mémoire très grand et un temps machine énorme.

Dans le but de palier à toutes ces contraintes, les géophysiciens ont trouvé un moyen pour minimiser ces difficultés, qui est de travailler avec les nombres réels, au lieu des nombres complexes par le biais de la transformation de Hartley. L'introduction de la Transformée de Hartley dans le traitement des données sismiques est récente; elle a commencé à prendre de l'ampleur et à être de plus en plus utilisée dans le traitement du signal sismique. Elle est similaire à la transformation de Fourier tout en étant plus rapide. On peut effectuer toutes les opérations mathématiques, réalisées par la transformation de Fourier (corrélation, convolution, spectre de puissance, d'amplitude, de phase.....). La Transformée de Hartley a les mêmes propriétés que la Transformée de Fourier, la différence se situe uniquement au niveau de la dérivée, la convolution et le produit. Elle travaille avec les réels, donc nécessite un espace mémoire réduit par rapport à la transformée de Fourier et moins d'opérations. L'application des deux transformations à la séparation du champ d'ondes d'un profil sismique vertical a été réalisée sur deux modèles, l'un synthétique et l'autre réel. Les différentes étapes de traitement effectuées sont mises en évidence par des figures, et les résultats obtenus par les deux transformations sont interprétés et commentés. Les programmes informatiques de séparation du champ d'ondes sont élaborés en *fortran-90*, et testés sur les deux modèles choisis. Ces programmes s'avèrent fiables, et les résultats obtenus par les deux transformations sont identiques.

Mots clés - PSV - Transformée de Fourier - Transformée de Hartley.

THE FOURIER AND HARTLEY TRANSFORMS APPLIED TO A WAVE FIELD SEPARATION OF A SEISMIC VERTICAL PROFILE.

ABSTRACT

The present work deals with a comparative study between the Hartley and Fourier Transforms. The exploitation of frequency fields is frequently used in the seismic data processing. This operation requests a very big memory space and a huge cpu. time. In order to palliate all these constraints the geophysicists have found a means to minimize this difficulties, this means that deals with real numbers instead of complex compound numbers via

* Département Géophysique, Laboratoire Physique de la Terre, Université de Boumerdes.

** Département Géophysique, Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumédiène.

- Manuscrit déposé le 01 Juin 2002, accepté après révision le 22 Décembre 2003.

the Hartley transform. The introduction of the Hartley transform in the seismic data processing is recent, it begun to present a great interest and it has been used more and more in the signal processing and seismic. It's similar to the Fourier transform while being faster. One can do all mathematical operations, carried out by the Fourier transform (crosscorrelation, convolution, amplitude spectrum, energy and phase ...). The Hartley transform, has the same properties as the Fourier transform, the difference between them occurs in the derivative, the convolution and the product. As it works with the real numbers, it requires a reduced memory space than the Fourier transform and less operations. The two transforms for the separation of the vertical seismic profile wave field was carried out on two models, the first one being synthetic and the second one real. The different stages of the processing are outlined on the different figures and the results obtained are interpreted and discussed.

Key Words - VSP - Fourier transform - Hartley transform.

INTRODUCTION

Le pouvoir de détection ou la résolution verticale est la possibilité de séparer des réflexions sur des couches géologiques de faibles épaisseurs. Cette résolution dépend de la longueur d'onde du signal utile

Rayleigh (in Sheriff et Geldart, 1981) définit la limite de détection comme le quart de la longueur d'onde dominante $\lambda/4$, (λ : longueur d'onde).

En présence de bruit elle est de $\lambda/2$.

Dans le but d'améliorer la résolution verticale et latérale, les géophysiciens utilisent des techniques nouvelles de puits tels que : le profil sismique vertical (PSV) et le profil vertical oblique (PSO).

L'information utile est contenue logiquement dans le champ montant, l'identification de ce champ nécessite sa séparation d'un autre champ. Le présent travail traite d'une étude comparative entre les transformations de Hartley et de Fourier, appliquées à la séparation de champ d'onde d'un profil sismique vertical (PSV). La transformée de Fourier est souvent utilisée dans le traitement des données sismiques, opération qui demande un espace mémoire très grand et un temps de calcul énorme. En présence de toutes ces contraintes, les géophysiciens ont trouvé un moyen pour minimiser ces difficultés,

qui est de travailler avec les nombres réels, au lieu des nombres complexes, par le biais de la transformation de Hartley (1942).

L'introduction de la Transformée de Hartley dans le traitement des données sismiques est récente; elle a commencé à prendre de l'ampleur et est de plus en plus utilisée dans le traitement du signal sismique à partir des années 1990 (Saatcilar *et al.*, 1990, 1991). Elle est similaire à la transformation de Fourier; mais elle est plus rapide (Bracewell, 1986; Zhou 1992). Elle peut réaliser toutes les opérations mathématiques réalisées par Fourier (corrélation, autocorrélation, convolution, spectre de puissance, d'amplitude, de phase,.....).

Comme elle travaille avec les réels, elle nécessitant donc un espace mémoire deux fois plus petit que la transformation de Fourier, et moins d'opérations. Les transformations de Fourier et de Hartley sont appliquées à la séparation du champ d'ondes de profil sismique vertical sur un même modèle géologique afin de rendre les résultats comparables.

RÉALISATION DU PROFIL SISMIQUE VERTICAL (PSV)

Si le puits est foré verticalement, la source sismique a une position fixe, qui est proche de la gueule du puits. Mais si le puits est foré horizon-

LES TRANSFORMÉES DE FOURIER ET DE HARTLEY APPLIQUÉES
À LA SÉPARATION DU CHAMP D'ONDE DE PROFIL SISMIQUE VERTICAL

talement, la source a une position variable horizontalement, afin de maintenir la source et le géophone sur la même verticale. Le choix du déport dépend essentiellement de la profondeur de l'objectif à suivre; il est conditionné par le fait que les ondes incidentes doivent avoir un angle d'incidence inférieur à 30° pour respecter l'hypothèse d'incidence normale des rayons sismiques, nécessaire pour le calcul du coefficient de réflexion. Les couches géologiques sont supposées homogènes, isotropes et tabulaires.

Applications du PSV

Le PSV a de nombreuses applications:

- Il permet de faire la différence entre les ondes primaires et les ondes multiples.
- De calculer les vitesses de tranches de l'onde de cisaillement S et l'onde de compression P et le rapport v_P/v_S , de fournir des informations sur la lithologie du puits.
- Estimer en temps la position des réflecteurs situés en dessous du puits
- L'horizontalisation du champ d'ondes montantes rend son enregistrement comparable à celui de la sismique de surface. Ce champ peut être porteur d'informations géologiques intéressantes.

Séparation du champ d'ondes

Pour traiter les données, il est nécessaire de réaliser une opération importante qui est la séparation des champs d'ondes montant et descendant. Généralement, l'extraction du champ d'ondes exige l'horizontalité de l'événement désiré. Cette opération est réalisée par un décalage temporel du champ d'ondes, le temps de décalage est égal au temps de la première arrivée (onde directe).

Nous ajoutons les temps de premières arrivées pour aligner les ondes montantes et nous retranchons ces même temps pour aligner les ondes descendantes .

Filtre (f-k) (fréquence - nombre d'onde)

Il consiste à transformer les données sismiques du domaine spatio-temporel (t-z) au domaine fréquence-nombre d'onde (f-k) et supprimer les événements organisés de vitesse apparente bien déterminée. Les ondes descendantes caractérisées par des pentes positives dans le plan (t-z) se trouveront dans le quadrant positif du plan (f-k), et les ondes montantes caractérisées par des pentes négatives dans le domaine (t-z) seront représentées dans le quadrant négatif du plan (f-k).

Cette opération de séparation s'effectue de la façon suivante: pour extraire les ondes montantes, par exemple, du champ d'onde total, on met à zéro le quadrant positif (correspondant aux ondes descendantes), le retour au domaine spatio-temporel s'effectue par la transformation de Fourier ou Hartley inverse. On n'obtient ainsi dans le plan (z-t) qu'un seul train d'ondes, celui des ondes montantes. Une opération similaire peut être appliquée pour les ondes descendantes. Ce type de filtrage nécessite un pas d'échantillonnage régulier en temps et en profondeur, le pas d'échantillonnage en profondeur (ΔZ) doit être bien choisi et vérifier la relation suivante (Mari et Coppens 1991):

$$K_n = \frac{1}{2\Delta Z} \geq \frac{F_{Max}}{V_{Min}} \geq K \Rightarrow \Delta Z \leq \frac{V_{Min}}{2F_{Max}}$$

K_n : nombre d'onde de Nyquist, V_{Min} : vitesse de formation la plus basse et F_{Max} : fréquence la plus élevée qu'on puisse enregistrer et K : nombre d'ondes du signal que l'on veut enregistrer.

APPLICATION

Profil Sismique Vertical synthétique.

Modèle géologique utilisé :

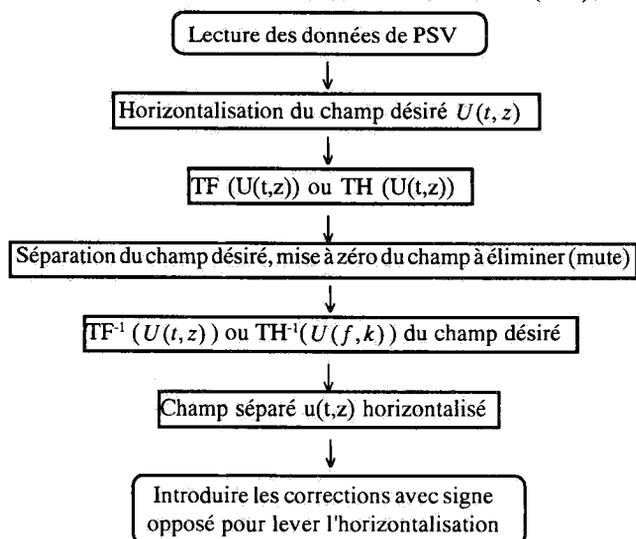
Epaisseur (m)	Vitesses (m/s)
$h_1 = 150$	$v_1 = 1500\text{m/s}$
$h_2 = 100$	$v_2 = 2000\text{m/s}$
$h_3 = 250$	$v_3 = 2500\text{m/s}$
Semi-infinie	$v_4 = 3000\text{m/s}$

Paramètres d'enregistrement :

- Nombre de traces $nt = 32$
- Longueur de l'enregistrement $t_e = 1000\text{ms}$
- Pas d'enregistrement $\tau = 4\text{ms}$
- Pas d'échantillonnage en profondeur, $\Delta z = 10\text{m}$
- Profondeur de la première trace = 50m
- Fréquence du signal dominant $F = 20\text{H}$
- Coefficient de réflexion air-solide $R_0 = -0.7$

Les paramètres suscités ainsi que le modèle géologique sont les données utilisées par les programmes informatiques en *Fortran 90* confectonnés pour le calcul et le traitement du PSV synthétique et réel.

Organigramme de séparation du champ d'ondes de PSV dans le domaine (f-k).



Interprétation

Le modèle géologique utilisé est le même pour les deux (02) méthodes de séparation afin de rendre les résultats comparables. Le champ d'onde correspond au modèle géologique choisi qui est composé de 04 couches stratifiées horizontalement.

La figure 1 met en évidence le champ d'ondes de PSV qui est constitué de trois réflexions primaires caractérisées par une forte énergie, de trois ondes multiples montantes qui sont parallèles aux ondes primaires, d'une onde directe définie par une forte amplitude, et d'ondes multiples descendantes qui sont parallèles à l'onde directe.

La figure 2 caractérise le spectre d'amplitude du champ d'ondes de PSV dans le domaine Fourier. On remarque que les ondes montantes se répartissent dans le quadrant négatif et les ondes descendantes se répartissent dans le quadrant positif.

La figure 3 montre le spectre d'amplitude du champ d'ondes de PSV dans le domaine Hartley. On voit que la répartition des ondes descendantes et montantes se fait comme dans le cas du domaine Fourier.

La figure 4 contient seulement le champ d'ondes montantes constitué de trois ondes primaires et d'ondes multiples montantes. Le champ d'ondes est défini dans le domaine de Fourier.

La figure 5 met en évidence le champ d'ondes descendantes, la séparation est effectuée dans le domaine Fourier.

La figure 6 illustre le champ d'ondes montantes après horizontalisation, la séparation est réalisée dans le plan de Hartley, ce type de champ est utilisé généralement pour le calage de la sismique de surface.

La figure 7 représente le champ d'ondes descendantes dans le domaine de Hartley, on voit que ce champ d'ondes est le même que le champ de la figure 5.

LES TRANSFORMÉES DE FOURIER ET DE HARTLEY APPLIQUÉES
 À LA SÉPARATION DU CHAMP D'ONDE DE PROFIL SISMIQUE VERTICAL

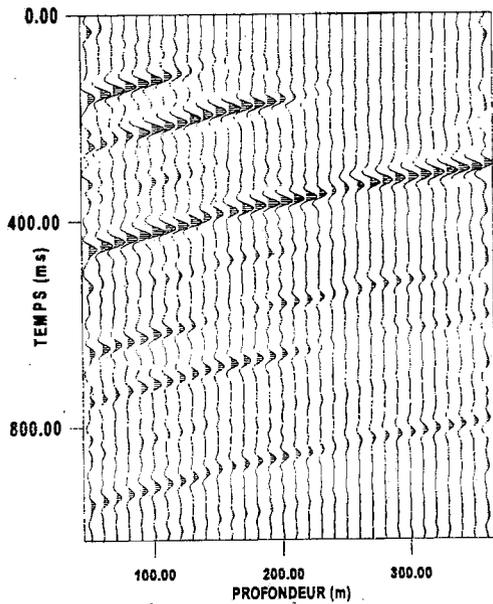


Fig. 1 - Profil Sismique Vertical avec égalisation dynamique

Vertical seismic profile with dynamic equalization

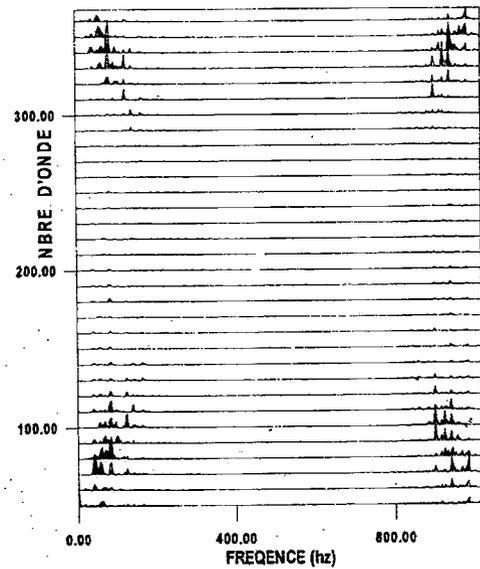


Fig. 2 - Spectre d'amplitude PSV dans le domaine de Fourier

Amplitude Spectrum of VSP in Fourier domain

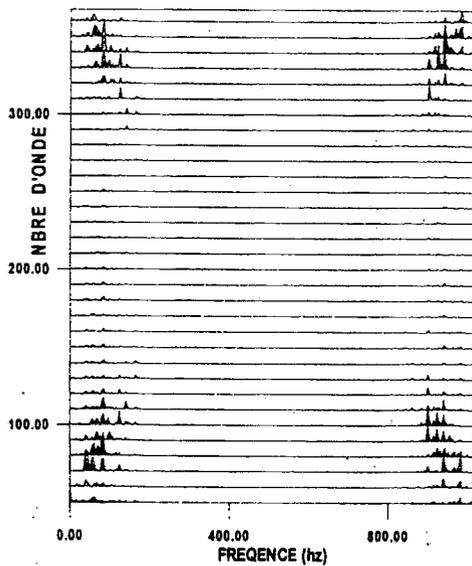


Fig. 3 - Spectre d'amplitude de PSV dans le domaine de Hartley

Amplitude Spectrum of VSP in Hartley domain

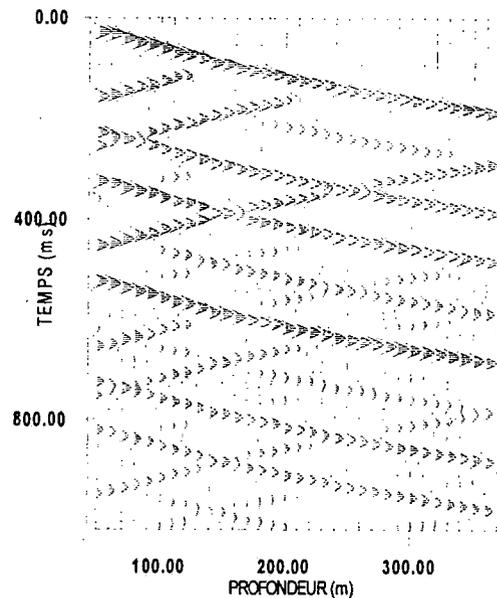


Fig. 4 - Champs d'ondes montantes séparées par la transformée rapide de Fourier

Fourier upgoing wave field separated by FFT.

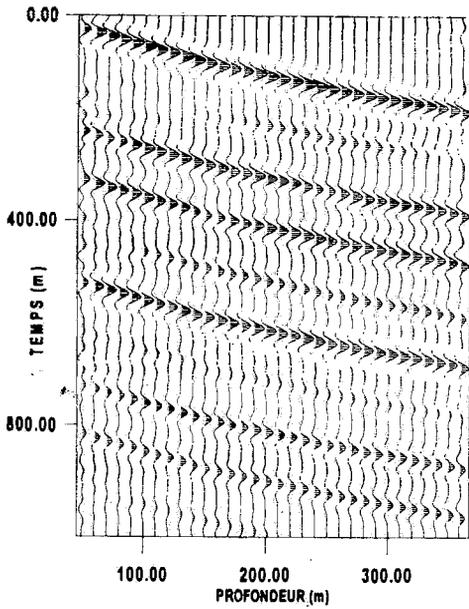


Fig. 5 - Champs d'ondes descendantes séparés par la Transformée rapide de Fourier

Downgoing wave field separated by FFT

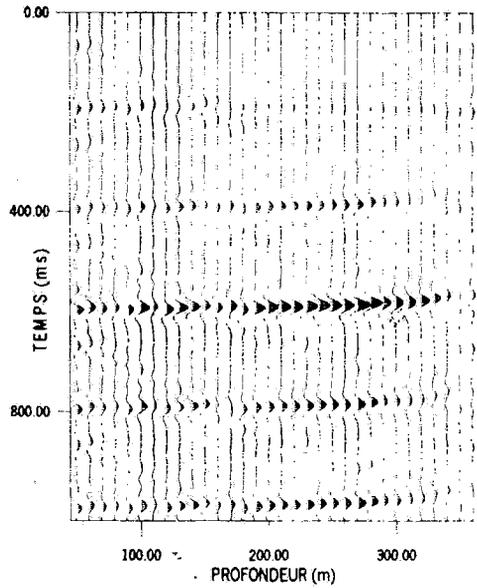


Fig. 6 - Champs d'ondes montantes horizontalisés séparés par la Transformée rapide de Hartley (FHT).

Upgoing waves field horizontalized separated by Hartley transform

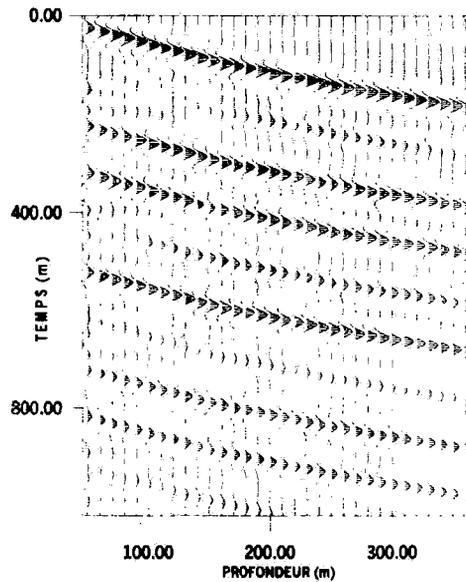


Fig. 7 - Champs d'ondes descendantes séparés par la Transformée rapide de Hartley

Downgoing waves field separated by Hartley transform

LES TRANSFORMÉES DE FOURIER ET DE HARTLEY APPLIQUÉES
 À LA SÉPARATION DU CHAMP D'ONDE DE PROFIL SISMIQUE VERTICAL

A la suite de ce traitement on remarque que les transformations de Fourier et de Hartley donnent un résultat identique.

Profil sismique vertical réel.

Le PSV réel est réalisé par l'entreprise nationale de géophysique dans le bassin sédimentaire d'Illizi (situé dans le Sahara Algérien) à la suite d'une demande formulée par Sonatrach.

Les Paramètres d'enregistrement sont :

- Nombre de traces, $nt=64$
- Nombre d'échantillons par trace, $ne=512$
- Pas d'échantillonnage en temps $\tau = 4ms$
- Pas d'échantillonnage en profondeur $\Delta z = 10m$
- Profondeur du premier géophone $offset=50m$

L'enregistrement du PSV réel avec égalisation dynamique est représenté par la figure 8, sur lequel on voit que les ondes descendantes sont définies par une forte énergie par rapport aux autres ondes. La figure 9; contient uniquement le champ d'ondes descendantes déterminé par la transformée de Fourier. Le champ d'ondes montantes séparé par la même transformée est représenté par la figure 10. On constate qu'au niveau de ce champ les réflexions sismiques sont continues mais moins énergétiques que les ondes descendantes. Ce même champ d'ondes est déterminé aussi par la Transformée de Hartley et mis en évidence par la figure 11. On voit qu'il correspond parfaitement au champ d'ondes montantes déterminé dans le domaine de Fourier qui est représenté par la figure 10.

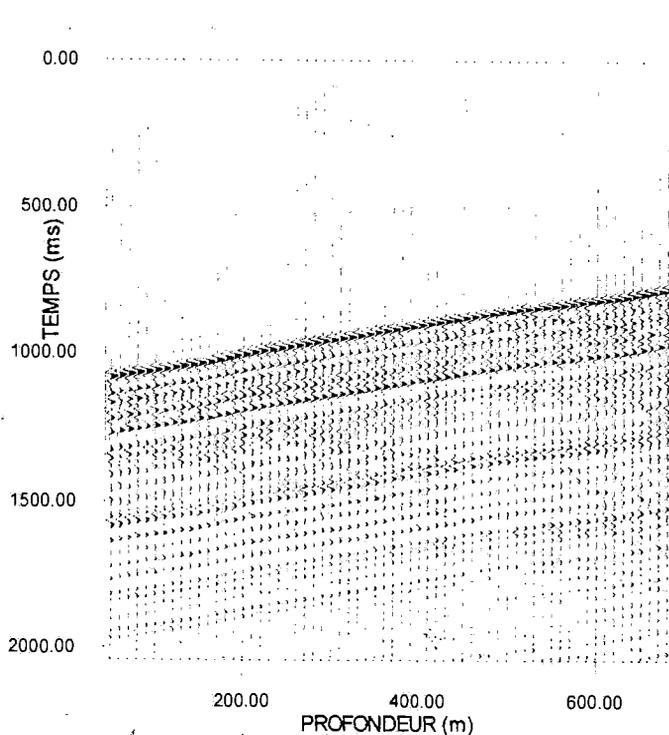


Fig. 8 - Profil sismique vertical réel avec égalisation dynamique
Vertical seismic profile with dynamic equalization

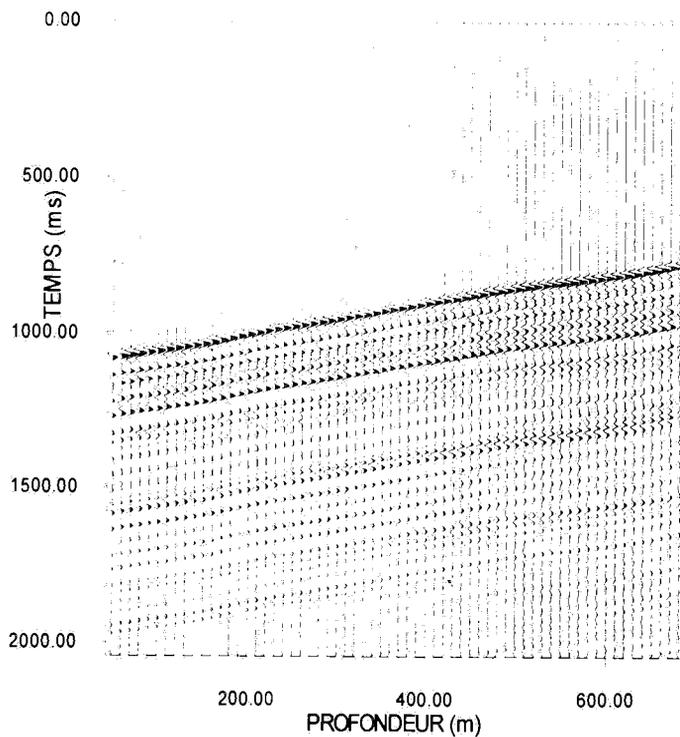


Fig. 9 - Champ d'ondes descendantes séparé par la Transformée de Fourier
Downgoing waves field separated by Fourier Transform

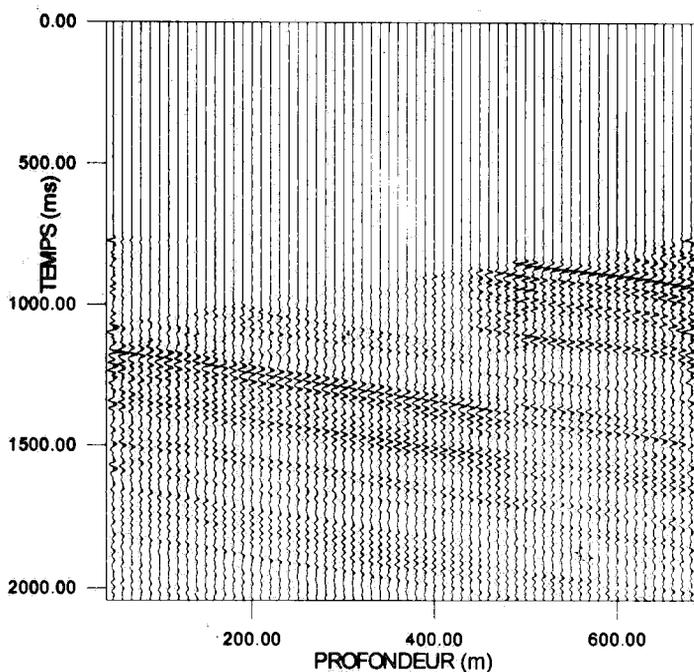


Fig. 10 - Champ d'ondes montantes séparé par la Transformée de Fourier
Upgoing waves field separated by Fourier Transform

LES TRANSFORMÉES DE FOURIER ET DE HARTLEY APPLIQUÉES
 À LA SÉPARATION DU CHAMP D'ONDE DE PROFIL SISMIQUE VERTICAL

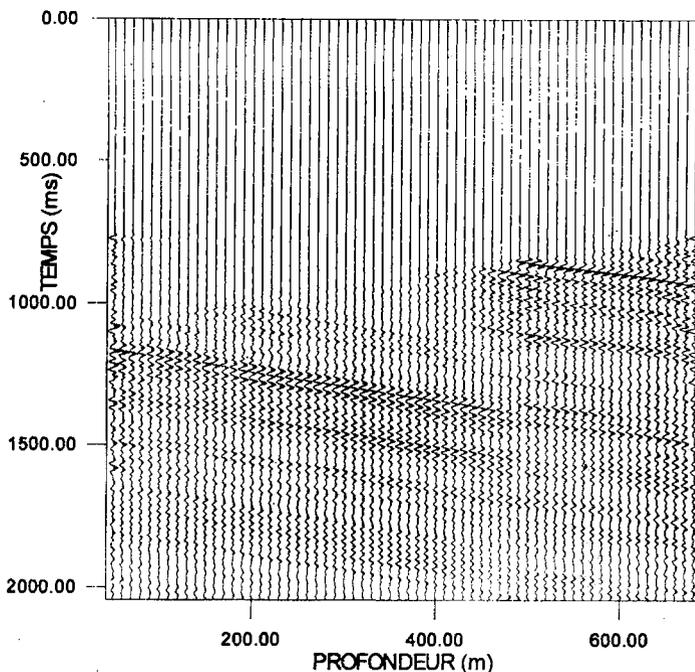


Fig. 11 - Champ d'ondes montantes séparé par la Transformée de Hartley
Upgoing waves field separated by FHT

CONCLUSION

Le PSV synthétique a une très grande utilité pratique surtout à l'interprétation des données sismiques, il constitue un outil de base pour le calage de la sismique de surface, il permet également de choisir les paramètres de mise en œuvre et de traitement du PSV réel.

Les critères objectifs de comparaison entre la FFT et la FHT sont la vitesse d'exécution et l'espace mémoire nécessaire au stockage des données. Il est évident que la FHT a besoin de moins d'espace mémoire, car elle travaille uniquement avec les nombres réels, alors que la FFT utilise les complexes, donc demande deux fois plus d'espace mémoire. Mais grâce au progrès technologique réalisé dans le domaine du hardware, l'espace mémoire et la vitesse d'exécution ne sont plus des contraintes pour le traitement des données sismiques. Les résultats de la transformée peuvent être stockés à la place des

données d'origine, et le passage de l'espace Fourier à l'espace Hartley, ou inverse, s'effectue facilement. Toute opération réalisée dans l'espace Fourier peut être directement convertie dans l'espace Hartley. L'opération de séparation du champ d'ondes par la Transformée de Hartley s'effectue plus rapidement que par la Transformée de Fourier. Suite au traitement du PSV synthétique et du PSV réel, nous déduisons que la séparation du champ d'ondes s'effectuant dans le domaine de Fourier ou dans le domaine de Hartley donne le même résultat. Au niveau du centre de traitement de la société Sonatrach ces deux techniques puissantes de séparation ne sont pas appliquées, les géophysiciens de cette société utilisent souvent uniquement le filtre médian. L'opération de la convolution est fréquente dans le filtrage des signaux sismiques, parfois elle est plus facile à réaliser dans le domaine de Fourier que dans le domaine de Hartley. Nous estimons alors que la Transformée

de Fourier est un outil de séparation de champ d'ondes performant et simple à appliquer.

BIBLIOGRAPHIE

- BRACEWELL, R.N., 1986.** The Hartley Transform. New York : *Oxford University Press*.
- CRAWFORD T.D. AND W.YANG 1992.** The Hartley basic fonctions and transform : alternatives to plane the Fourier transform. *Chem. Phys. Lett.* 192, 45.
- HARTLEY, R.V.L., 1942.** More symmetrical Fourier Analysis applied to transmission problem : *Proceeding of the institute of the radio engineers* v. 30, pp 144-150
- KUHL, H., SACCHI, M. AND FERTIG, J., 2001.** The Hartley transform in seismic imaging, *Geophysics*, vol 66 n°4 p.1251-1257.
- JARVIS, K.D. AND KNIGHT, R., 2000.** Near surface surveys using the seismic cone penetrometer, *geophysics* Vol 65, n°4 p. 1025-1056
- LIFERMAN, J., 1980.** les méthodes rapides de transformation du signal : Fourier, Walsh, Madamard, *Hear 2^{ième} édition Masson France*, p.1-26
- MARI, J.L. AND COPPENS, F., 1991.** seismic well surveying. *Edition Technip France*, p.30-40.
- MARI, J. ET GLANGEAUD, F., 1993.** Waves Separation. *Revue de l'Institut Français du pétrole*
- MARI, J.L., GLANGEAUD, F. ET COPPENS, F., 1997.** Traitement du signal pour géologues et géophysiciens *édition Technip*, p. 359-398.
- MILLIGAN, P.A., RECTOR, J.W. AND BAINE, R.W., 1997.** Hydrophone VSP imaging at a shallow site, *Geophysics* vol 62 n°3 p.842-852
- MOHAN, N.L AND ANAND BABU, I., 1994.** Note on 2-D Hartley Transform, *Geophysics* vol 59 n°8, p. 1150-1155
- SAATCILAR, R., ERGINTAV, S. AND CANITEZ, N., 1990.** The use of the Hartley Transform in geophysical applications, *geophysics*, vol 55, n°11 p.1488-1495.
- SUNDARARAJAN, N., 1995.** 2 D Hartley Transform. *Geophysics*, vol 60, n°1, p-262-267.
- SAATCILAR, R., EGINTAV, S. AND CANITEZ, N., 1991.** The use of the Hartley transform in geophysical applications. Erratum, *geophysics*, 56, 9 p- 1514-1514.
- SHERIFF, R.E. AND GELDART, L.P., 1981.** Traité de prospection sismique tome II, *ERG* p.209.
- TRADUESZ, ULRYCH, J., MAURICIO SACCITY, D. AND MICHAEL GRAUL, J., 1999.** Signal and noise separation Artand science. *Geophysics* vol 64 n°5. p 1648-1658.
- ZHOU, B., 1992.** discussion on the use of Hartley transform in geophysical applications, by R, Saatcilar, S. Ergintav, and Canitez, N, (geophysics, 55, 1488-1495, November 1990), *geophysics* 57, p : 1996-1997.

ANNEXE

I - LES TRANSFORMATIONS DE FOURIER ET DE HARTLEY

La transformée de Hartley d'un signal réel est obtenue par un simple changement de l'exponentiel du noyau de l'intégrale de Fourier par le noyau de Hartley qui est égal à :

$$\exp(-i2\pi v) \Rightarrow \cos 2\pi v = \sin 2\pi v + \cos 2\pi v$$

I.1 - La Transformée de Fourier Directe

$$s_f(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i2\pi vt} s(t) dt \quad (1)$$

$s_f(v)$: est la Transformée de Fourier directe de $s(t)$.

I.2 - La Transformée de Fourier Inverse (TF^{-1})

La reconstitution du signal $s(t)$ à partir de sa transformée directe est obtenue par sa TF^{-1}

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_f(v) e^{i2\pi vt} dv \quad (2)$$

La Transformée de Fourier s'écrit sous la forme :

$$s_f(v) = e(v) - i\alpha(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) (\cos 2\pi vt - i \sin 2\pi vt) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-i2\pi vt} dt \quad (3)$$

on a alors la transformée de $s(t)$:

$e(v)$ et $\alpha(v)$ représentent respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de la transformée de Fourier.

I.3 - La Transformée directe de Hartley

Si on remplace $\exp(-i v)$ par $\cos(2\pi v)$, (Hartley, 1942) on obtient alors :

$$s_H(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cos(2\pi vt) dt \quad (4)$$

Le signal obtenu $s_H(v)$ est appelé la Transformée de Hartley directe de $s(t)$.

I.4 - La Transformée de Hartley Inverse

La reconstitution du signal original $s(t)$ à partir de sa Transformée de Hartley est obtenue par la transformée inverse qui s'exprime par :

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_H(v) \cos(2\pi vt) dv \quad (5)$$

I.5 - Relation entre les transformations de Fourier et de Hartley

D'après Bracewell, 1986, la relation entre la transformée de Fourier et celle Hartley peut être montrée comme suit :

$$e(v) = \frac{H(v) + H(-v)}{2} \quad \text{et} \quad \alpha(v) = \frac{H(v) - H(-v)}{2} \quad (6)$$

où $e(v)$ et $\alpha(v)$ sont respectivement les fonctions paire et impaire définies comme suit :

$$e(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cos(2\pi vt) dt \quad \text{et} \quad \alpha(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \sin(2\pi vt) dt$$

$$H_H(v) = e(v) + \alpha(v).$$

La Transformée de Fourier peut être exprimée comme :

$$H_F(v) = e(v) - i\alpha(v) \quad \text{ou bien}$$

$$H_F = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cos(2\pi vt) dt - i \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \sin(2\pi vt) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-2\pi vt} dt.$$

Similairement, la Transformée de Hartley peut être écrite comme suit :

$$H_H(v) = \text{Re}H_F(v) - \text{Im}H_F(v) \quad (7)$$

Il est intéressant de noter que les composantes en amplitude et en phase de Fourier et de Hartley sont les mêmes (Saatchi *et al.*, 1990)

$$E(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \cos(ux - vy) dx dy = [H_H(u,v) + H_H(-u,-v)]/2 \quad (11)$$

II - LES TRANSFORMATIONS DE HARTLEY ET DE FOURIER A DEUX DIMENSIONS

$$O(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \sin(ux + vy) dx dy = [H_H(u,v) - H_H(-u,-v)]/2 \quad (12)$$

II.1 - La transformation de Fourier directe à deux dimensions (Liferman, 1980)

La transformée de Fourier directe de la fonction $f(t,x)$ s'obtient par :

$$H_F(v,k) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t,x) e^{-j(2\pi vt + kx)} dt dx \quad (8)$$

II.2 - La Transformée de Hartley Inverse à deux dimensions

La transformée inverse peut être obtenue en intercalant les positions de $f(x,y)$ et de $H_H(u,v)$ dans l'équation (10).

$$f(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H_H(u,v) \text{cas}(ux) \text{cas}(vy) du dv \quad (13)$$

II.2 - La transformation de Fourier inverse à deux dimensions

La reconstitution de la fonction $f(t,x)$ à partir de sa transformée directe est obtenue par sa transformée inverse (TF^{-1})

$$f(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H_F(v,k) dk dv \quad (9)$$

II.3 - La transformée de Hartley directe à deux dimensions

La transformée de Hartley directe de la fonction $f(x,y)$ s'obtient par:

$$H_H(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \text{cas}(ux) \text{cas}(vy) dx dy = E(u,v) + O(u,v). \quad (10)$$

où $E(u,v)$ et $O(u,v)$ sont les parties paire et impaire définies comme suit :