Raisonnement et démonstration dans l'enseignement moyen

Nédjadi MESSEGUEM,
Directeur de l'Education de la wilaya de Tlemcen
Ex inspecteur de mathématiques des collèges

Le raisonnement mathématique

Un des objectifs de l'enseignement des mathématiques dès l'école primaire, est le développement des qualités logiques et d'aptitude au raisonnement. Pour cela, il y a lieu de mettre l'élève en situation de recherche personnelle, d'instaurer le débat mathématique en classe à l'occasion de la résolution de problèmes. Le débat permet d'examiner et de confronter les hypothèses, les méthodes et les solutions.

Ce que dit le programme de mathématiques de l'enseignement moyen :

1. L'introduction du programme de mathématiques dans l'enseignement moyen(collège) décrit deux étapes dans le raisonnement mathématique :

- la première est la recherche et la production d'une preuve, et qui est la phase la plus délicate ;
- la seconde consistant à mettre en forme la preuve, et doit donner lieu à la rédaction d'un texte cohérent utilisant les connecteurs logiques acquis et développés en langues sans exagérer sur le plan de la forme.

2. La nécessité de structurer l'activité des élèves autour de la résolution de problèmes est affirmée dans l'introduction générale des programmes pour les trois cycles et aussi pour l'ensemble des matières. Le programme de mathématiques du cycle moyen accorde une place centrale à la résolution de problèmes. La résolution de problème met en œuvre la méthode d'investigation dans le champ des mathématiques.

La résolution de problèmes en mathématiques recouvre plusieurs activités qui, toutes, s'appuient sur le raisonnement de l'élève.

Ces activités souvent imbriquées peuvent se résumer en quatre compétences transversales (valables pour l'ensemble des disciplines) et citées par les programmes :

- Lire interpréter et organiser l'information ;
- S'engager dans une démarche de recherche et d'investigation ;
- Mettre en relation les connaissances acquises, les techniques et les outils adéquats pour produire une preuve ;
- Communiquer par des moyens variés et adapter la solution du problème sous forme d'un texte structuré non formalisé.

Il est, en effet, important de ménager une progressivité dans l'apprentissage de la démonstration et de faire une large part au raisonnement, enjeu principal de la formation mathématique en général et au collège en particulier. La question de la preuve occupe une place importante en mathématiques. La pratique de l'argumentation pour convaincre de la validité d'une proposition a commencé dès l'école primaire et se poursuit dans le moyen pour faire accéder l'élève à la démonstration. La préoccupation de prouver et de démontrer ne doit pas se fixer uniquement dans le domaine géométrique. Il est impératif de travailler la preuve et la démonstration au niveau du calcul numérique et du calcul littéral.

En effet, le programme distingue le raisonnement (constitué de la recherche, de la découverte et de la production d'une preuve) de la démonstration formalisée (texte structuré sous forme déductive de ce raisonnement).

1. La démarche d'investigation : un moment crucial dans l'aboutissement du raisonnement.

Lorsqu'on demande de démontrer à un élève, on lui demande de s'engager au préalable dans une phase d'investigation pendant laquelle la démarche est essentiellement inductive (tâtonnements et essais sur des cas particuliers). Une des difficultés majeures pour le professeur va donc consister à faire vivre dans la classe des moments où il va faire pratiquer à ses élèves des raisonnements inductifs (notamment pour expliquer comment on trouve des résultats).

Dans le domaine scientifique, la démarche d'investigation occupe une place essentielle. En mathématiques, elle trouve véritablement sa place dans la résolution de problèmes et doit donner l'occasion, par sa mise en œuvre, d'acquérir ou de consolider des compétences pour concevoir ou utiliser un raisonnement.

2. Place du raisonnement dans cette démarche :

Les élèves sont amenés à raisonner en alternant :

a. Des temps de recherches individuelles laissant une certaine autonomie à l'élève qui doit choisir des directions, émettre des hypothèses (en mathématiques c'est faire des conjectures), faire des essais avec des allers-retours possibles. Le professeur observe la progression des élèves, peut échanger avec quelques-uns pour ne pas les laisser en situation de blocage ou éviter qu'ils se dirigent trop longtemps sur une voie sans issue, et surtout repère tous les éléments qui lui permettront de gérer la réflexion collective ;

b. Des temps d'échanges oraux permettent aux élèves de proposer leurs idées, de les argumenter de les justifier, de valider ou de rejeter les propositions de leurs camarades.

De nombreux types de raisonnement peuvent être mis en œuvre :

- le raisonnement par induction y est présent puisque, dans une activité d'investigation la démarche à suivre n'est pas suggérée par l'énoncé. Le raisonnement inductif fonctionne selon un schéma logique précis :

« Constatant que dans les exemples où (A est vraie), alors (B est vraie), je présume que (A implique B) est vraie ».

Le raisonnement inductif prend toute sa place en mathématiques dans la phase de recherche, en particulier sous la forme du schéma explicatif dans le raisonnement par chainage arrière – essentiel en géométrie.

De l'étude de plusieurs exemples concordants (et si possible représentatifs) on déduit, par présomption, une propriété générale.

Dans la phase de recherche, cela conduirait à se poser la question de ce qu'il suffirait d'avoir pour emporter la conclusion.

En mathématiques, le raisonnement inductif ne se conçoit, en général, que comme une première étape, conduisant à une conjecture. Il restera ensuite, par un raisonnement déductif, à démontrer la véracité de cette conjecture.

Il peut être aussi déductif. Le raisonnement déductif fonctionne selon le schéma classique :

« Sachant que (A est vraie) et (A implique B) est vraie, je déduis que (B est vraie) »

A partir de propriétés reconnues comme vraies, par enchainement logique, on déduit une propriété.

Par l'absurde, admettons que nous ayons à démontrer une proposition p. La démarche consiste à montrer que l'hypothèse non p (c'est-à-dire que p est fausse) mène à une contradiction logique. Ainsi p ne peut pas être fausse et doit être donc vraie.

Cependant, il est important que la mise en œuvre orale ou écrite, ne soit pas gênée par un formalisme prématuré.

La rédaction et la mise en forme d'une preuve doivent être travaillées collectivement, avec l'aide du professeur et être présentées comme une façon convaincante de communiquer un raisonnement aussi bien à l'oral que par écrit en puisant dans les compétences acquises en langues notamment parmi celles relatives aux textes argumentatifs.

3. Mise en place d'une preuve argumentée :

Ce travail inclus dans une séquence d'enseignement, est suivi d'un temps de synthèse identifiant clairement les points à retenir puis d'une institutionnalisation des acquis de (savoir-faire, démarches) et de leur mise en œuvre en fin de séance.

En revanche, une fois la preuve trouvée, seul le raisonnement déductif est utilisé dans la phase de mise en forme. En fait, pour l'élève, la difficulté est double :

- Il faut passer d'un raisonnement inductif à un raisonnement déductif pour établir la preuve ;
- Il faut ensuite mettre en forme ce raisonnement déductif pour en faire une démonstration, c'est-à-dire, une preuve communicable.

1. Exemple, à partir de la 3ième année moyenne :

Deux points A et B étant donnés déterminer l'ensemble de tous les points C tel que le triangle ABC soit un triangle en C.

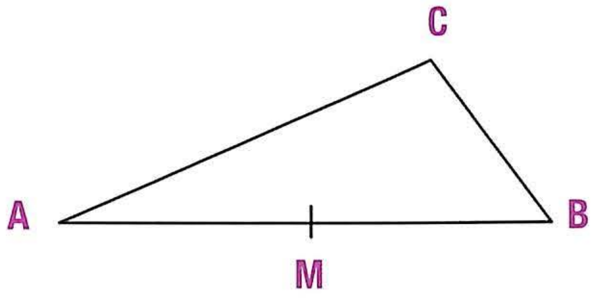
Première expérimentation : tracé d'un certain nombre de points avec une équerre (l'élève est amené à raisonner pour faire sa construction).

Observation : cela semble être un cercle. Mais quel est son centre ?

Émission d'une conjecture : l'ensemble des points est le cercle de diamètre [AB].

Vérification expérimentale avec une règle graduée et un compas : la distance du milieu de [AB] aux points tracés est-elle égale à la moitié de AB ?

Justification :



Qu'est-ce qui permet de monter que C est

Sur le cercle de centre M et de diamètre [AB]

(Privé des deux points A et B) ?

La diagonale d'un rectangle ?

Des triangles isocèles (grâce aux angles) ?

Les médiatrices des côtés de l'angle droit ? Et réciproquement ?

Raisonnements par induction puis par déduction

Quelle que soit la méthode choisie, la rédaction de la preuve peut être visée, mais seulement dans un second temps.

Ce qu'il faut aussi retenir à propos du raisonnement :

- Raisonner en mathématiques, ce n'est pas seulement pratiquer le raisonnement déductif.
- Un raisonnement déductif peut être considéré comme complet au cycle moyen même s'il n'a pas une mise en forme canonique.

2. D'autres exemples pour raisonner :

Règles de raisonnement à faire fonctionner au 3ième palier :

1) Un contre exemple suffit pour invalider un énoncé

Ex : est-ce-que la somme de deux fractions est une fraction dont le numérateur est la somme des numérateurs et dont le dénominateur est la somme des dénominateurs

2) Des exemples ne suffisent pas à vérifier qu'un énoncé est vrai

Ex : si on multiplie un nombre par lui-même, on obtient un nombre plus grand que le nombre choisi au départ.

3) par exhaustivité des cas.

En conclusion :

Comment développer et faire évoluer tout au long du 3ième palier les compétences des élèves relatives au raisonnement ?

1. Du côté des élèves :

- En leur donnant suffisamment des occasions de développer une démarche d'investigation ;
- En leur permettant de débattre oralement lors de la présentation des solutions d'exercices ;
- En communicant par écrit les résultats de la recherche.

2. Du côté des enseignants :

- En travaillant sur les conjectures et sur les preuves ;
- En faisant découvrir les implicites des textes par l'analyse du contenu et du lexique ;
- En reconstituant des énoncés de problèmes à partir d'un schéma, d'un dessin ;
- En s'exerçant sur des raisonnements inachevés, sur des résultats intermédiaires.

Comment évaluer le raisonnement ?

Utiliser comme critères d'évaluation, les éléments des compétences de la résolution de problèmes ;

- Lire, interpréter et organiser l'information sous-jacentes aux énoncés de problèmes ;
- S'engager dans une démarche de recherche et d'investigation pour produire des conjectures ;
- Produire une preuve en mobilisant les connaissances nécessaires, les outils et les techniques adéquats ;
- Communiquer la solution du problème en recourant à des moyens adaptés non formalisés.

BIBLIOGRAPHIE :

1- Programmes de mathématiques du 3ième palier, direction de l'enseignement fondamental, juin 2013.

2- Raisonnement et démonstration au collège, Académie de Toulouse, avril 2009.

3- Jean Houdebine, L'apprentissage de la démonstration, Cahiers Pédagogiques n°316, 1993.