

Étude de la convection mixte dans une cavité rectangulaire horizontale chauffée latéralement

Abdellatif LOUARAYCHI*, Mohamed LAMSAADI, Mohamed NAÏMI, Hassan EL HARFI, Mourad KADDIRI

Université Sultan Moulay Slimane, Faculté des Sciences et Technique, Laboratoire de Modélisation des Écoulement et des Transferts (LAMET), B.P.523, Beni-Mellal, Maroc.

Résumé :

La convection mixte dans une cavité rectangulaire allongée de rapport d'aspect, $A = 12$, confinant un fluide newtonien de nombre de Prandtl, $Pr = 7$, est étudiée analytiquement et numériquement, dans le cas où les parois horizontales, dont celle supérieure est mobile, sont adiabatiques, et celles verticales sont soumises à une densité de flux de chaleur uniforme. Les résultats obtenus montrent la validité de l'approximation de l'écoulement parallèle et l'effet considérable des nombres de Richardson ($0,1 \leq Ri \leq 10^5$) et de Reynolds ($0,1 \leq Re \leq 10$) sur les intensités de l'écoulement et du transfert thermique.

Mots-clés : Convection mixte, Écoulement parallèle, Méthode des volumes finis, Transfert de chaleur

Abstract :

Mixed convection within a shallow rectangular cavity of aspect ratio, $A = 12$, confining a Newtonian fluid ($Pr = 7$), is studied analytically and numerically in the case where the horizontal walls, whose upper one is moving, are adiabatic, whereas those vertical are submitted to uniform density of flux. The obtained results show the validity of the parallel flow approximation and the considerable effect of the Richardson ($0.1 \leq Ri \leq 10^5$) and Reynolds ($0.1 \leq Re \leq 10$) numbers on the flow intensities and the heat transfer.

Keywords: Mixed convection, lids-driven cavity, parallel flow, finite volume method, heat transfer

Nomenclature

A	Rapport d'aspect de la cavité, ($= L/H'$)
C	Gradient de température horizontal adimensionnel
H'	Hauteur de la cavité, m
g	Intensité de la pesanteur, m/s^2
L'	Longueur de la cavité, m
\overline{Nu}	Nombre de Nusselt moyen, [Eq. 8]
P	Pression adimensionnelle
Pr	Nombre de Prandtl, [ν/α]
q'	Densité de flux de chaleur pariétale, w/m^2
Re	Nombre de Reynolds, [$U'_o \times H'/\nu$]
Ri	Nombre de Richardson, [$g\beta q' H'^2/\lambda U'^2_o$]
T	Température adimensionnelle
U'_o	Vitesse de la paroi supérieure
u	Vitesse adimensionnelle longitudinale
v	Vitesse adimensionnelle transversal
(x,y)	Coordonnées adimensionnelles

Lettres grecques

α	Diffusivité thermique du fluide, m^2/s
β	Coefficient d'expansion volumétrique thermique à pression constante, $1/k$
θ	Température adimensionnelle
ν	Viscosité cinématique, m^2/s
λ	Conductivité thermique du fluide, $W/m.k$
ψ	Fonction de courant adimensionnelle
ρ	Masse volumique du fluide, kg/m^3

Indices / Exposants

c	Valeur relative au centre de la cavité
'	Variables dimensionnelles

1. Introduction

La convection mixte dans des milieux confinés est un sujet d'investigation de grande importance, vue sa présence dans différentes applications industrielles tels que : le refroidissement des composants électroniques, les pertes de chaleur dans les collecteurs solaires et la ventilation des locaux [1]. Toutefois les travaux antérieurs, portant sur l'étude de ce phénomène, ont visés essentiellement le cas où la cavité est carrée [2-6]. Le cas d'une cavité horizontale, qui n'a pas trop suscité l'intérêt de la communauté scientifique, risque de révéler des résultats différents tels que la montre l'étude déjà menée dans ce sens dans le cas où toutes les parois sont immobiles [7-8]. La présente étude aborde donc cet aspect tout en considérant le cas où la paroi supérieure est mobile. La convection mixte, ici, est consécutive à l'application de flux uniforme de chaleur sur les parois verticales dans le même sens que celui du mouvement de la paroi mobile, alors que celles horizontales sont supposées adiabatiques.

Ce problème est régi par un système, d'équations aux dérivées partielles non linéaires, exprimé en termes de composantes horizontale et verticale de vitesse, température et pression. Avec l'approximation d'un écoulement parallèle, une solution analytique est obtenue lorsque le rapport d'aspect est large. Les équations gouvernantes sont aussi résolues numériquement en utilisant une approche basée sur la méthode des volumes finis dans un maillage régulier. Les résultats obtenus numériquement vont être comparés avec ceux analytiques. L'objectif de la présente étude est d'examiner l'effet des nombres de Richardson et de Reynolds sur les intensités d'écoulement et du transfert thermique en fonction des importances relatives des convections naturelle et forcée.

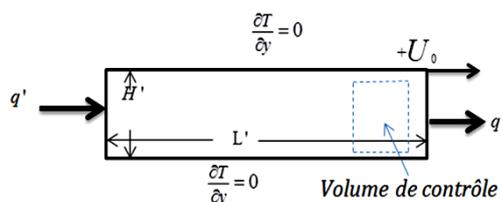


Figure 1 : Modèle physique et système de coordonnées

2. Équations de la convection et conditions aux limites associées

Les équations gouvernant la convection, exprimées en formulation de vitesses, pression et température, et les conditions aux limites correspondantes se présentent sous forme adimensionnelles comme suit :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + RiT \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{Re Pr} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (4)$$

a. Conditions aux limites :

$$u = v = \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad \text{pour} \quad x = 0 \text{ et } A \quad (5)$$

$$u = v = \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad \text{pour} \quad y = 0 \quad (6)$$

$$u - 1 = v = \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad \text{pour} \quad y = 1 \quad (7)$$

b. Transfert de chaleur

Le transfert de chaleur global dans la direction horizontale de la cavité peut être exprimé à l'aide du nombre de Nusselt moyen donné par :

$$\overline{Nu} = \int_0^1 -\frac{1}{(\partial T / \partial X)_{x=A/2}} \quad (8)$$

3. Méthodes de résolution :

3.1 Approche numérique

Dans le présent travail, les équations de conservation, présentées dans le paragraphe 2, sont résolues par le biais de la méthode des volumes finis de Patankar [9] et l'algorithme SIMPLER. Le choix d'une telle technique, réside dans les avantages qu'elle offre en termes de stabilité numérique, vis-à-vis des paramètres gouvernants, de convergence et de conservation des flux sur chaque volume élémentaire.

Le choix de la grille de maillage dépend du rapport d'aspect A de la cavité et aussi de la nature de la solution. Des essais numériques ont été nécessaires pour optimiser le temps et la précision des calculs. Ainsi la grille uniforme de

241×41 est trouvée suffisante pour modéliser avec précision les champs d'écoulement et de température dans une cavité ayant $A = 12$. Des configurations d'écoulement et de température, obtenues numériquement pour $Ri = 10^3$ et différentes valeurs de Re sont présentées sur la figure 2. Comme on peut le voir, dans tous les cas, l'écoulement présente un aspect parallèle et une stratification thermique dans la région centrale de la cavité, ce qui y prouve l'existence d'une solution analytique.

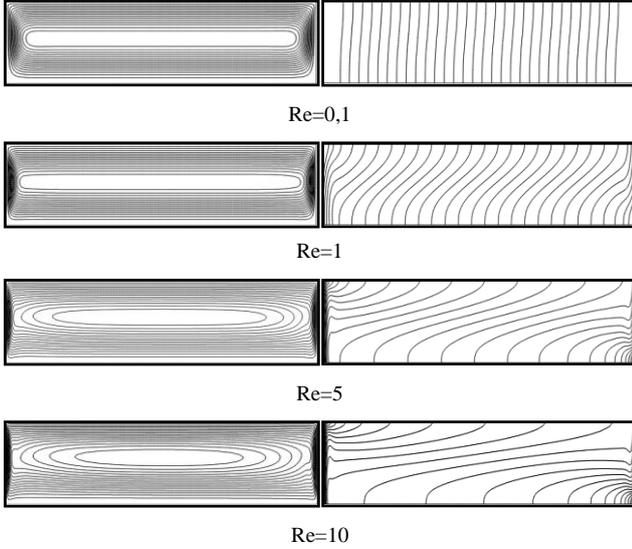


Figure 2 : Lignes de courant (à gauche) et isothermes (à droite) pour $Ri = 10^3$ et diverses valeurs de Re

3.2 Approximation de l'écoulement parallèle

Sur la base des observations effectuées, juste ci-dessus, les simplifications suivantes s'imposent :

$$u(x, y) = u(y) = \frac{d\psi}{dy}, \quad v(x, y) = -\frac{d\psi}{dx} = 0 \quad (9)$$

$$\text{et } T(x, y) = C(x - A/2) + \theta(y) \quad (10)$$

où la constante C qui n'est autre que le gradient horizontal de température, peut être obtenue en intégrant (4) sur le volume de contrôle choisi arbitrairement dans la figure 1 en prenant en compte (5-7) et en raccordant avec la région de l'écoulement parallèle [10], soit :

$$C + 1 = \text{Re Pr} \int_0^1 u \theta \, dy \quad (11)$$

Moyennant ceci, les équations (1) à (4) deviennent :

$$\frac{d^3 u}{dy^3} = \text{Re Ri} C \quad (12)$$

et

$$\frac{1}{\text{Re Pr}} \frac{d^2 \theta}{dy^2} = Cu \quad (13)$$

La résolution de (12) et (13), tenant compte des équations (6) et (7), conduit aux expressions suivantes :

$$u(y) = \frac{1}{12} \text{Re Ri} C (2y^3 - 3y^2 + y) + (3y^2 - 2y) \quad (14)$$

$$\psi(y) = \frac{1}{12} \text{Re Ri} C \left(\frac{y^4}{2} - y^3 + \frac{y^2}{2} \right) + (y^3 - y^2) \quad (15)$$

$$\theta(y) = \frac{1}{12} \text{Pr Ri Re}^2 C^2 \left(\frac{y^5}{10} - \frac{y^4}{4} + \frac{y^3}{6} - \frac{1}{120} \right) + \text{Re Pr} C \left(\frac{y^4}{4} - \frac{y^3}{3} + \frac{1}{30} \right) \quad (16)$$

Ainsi, en injectant (14) et (16) dans (11) on obtient l'équation transcendante suivante :

$$1 + \left(1 + \frac{\text{Re}^2 \text{Pr}^2}{105} \right) C + \frac{\text{Re}^3 \text{Pr}^2 \text{Ri}}{3360} C^2 + \frac{\text{Ri}^2 \text{Re}^4 \text{Pr}^2}{362880} C^3 = 0 \quad (17)$$

qui permet de déterminer la valeur de C en fonction de celles de Re , Ri et Pr . Pour ce qui est du transfert de chaleur, l'expression (8) devient :

$$\overline{Nu} = -\frac{1}{C} \quad (18)$$

4. Résultats et discussions

Le problème de la convection mixte au sein de la cavité considérée est gouverné par le rapport d'aspect, A , le nombre de Richardson, Ri , le nombre de Reynolds, Re et le nombre de Prandtl, Pr . Les simulations numériques ont montré qu'à partir d'un rapport d'aspect, $A = 12$, l'influence du confinement latéral ne se fait plus sentir et l'écoulement garde un aspect parallèle et une stratification thermique dans la région centrale de la cavité, ce qui justifie le choix de cette valeur de A . Il en résulte que, pour $Pr = 7$ (cas de l'eau par exemple), les paramètres de contrôle de l'étude sont Re , Ri et Pr .

Des exemples typiques de lignes de courant (à gauche) et d'isothermes (à droite) sont présentés dans la figure 2, pour $Ri = 10^3$, et différentes valeurs de Re . En premier lieu, il est intéressant de remarquer que l'écoulement est unicellulaire tournant dans le sens horaire, comme conséquence de l'aspect coopératif des effets de cisaillement et de flottabilité, qui agissent ensemble de gauche à droite.

Force, aussi, est de constater le parallélisme de l'écoulement et la stratification thermique horizontale dans la majeure partie de la cavité. En outre, la symétrie observée pour l'écoulement, due à un effet de flottabilité prépondérant, est généralement brisée par l'effet de cisaillement. D'autre part, une augmentation de Re rend les isothermes plus inclinées par rapport à la direction verticale et les lignes de courants relativement lâches près de la paroi supérieure en mouvement, donnant lieu à un écoulement presque symétrique et caractérisé par des lignes de courant quasi-équidistantes, puisque l'effet de cisaillement tend à affaiblir l'écoulement. Pour des valeurs de Re relativement faibles, Les effets de cisaillement et de flottabilité ne sont pas suffisants pour promouvoir une convection significative, et le régime est pseudo-conductif tel que l'indiquent les isothermes, qui sont quasi-verticales.

Les évolutions de l'intensité de l'écoulement au centre de la cavité, ψ_c , et du taux de transfert de chaleur, \overline{Nu} , en fonction de Ri sont reportées sur les figures 3 et 4, pour diverses valeurs de Re . On peut y voir clairement l'excellent accord entre les deux solutions avec une erreur relative ne dépassant pas 1%, ce qui témoigne de la validité de l'approximation de l'écoulement parallèle. Aussi, une augmentation de Ri affecte positivement ψ_c et de \overline{Nu} lequel qui commence par croître lentement pour atteindre une tendance asymptotiquement linéaire à partir d'une certaine valeur de Ri , qui dépend de Re , car la flottabilité devient, peu à peu, la principale force motrice pour le mouvement du fluide avec l'augmentation de Ri .

Par ailleurs, il est intéressant de voir qu'une augmentation de Re réduit ψ_c et rehausse \overline{Nu} , ce qui signifie que l'effet de cisaillement affaiblit l'écoulement et améliore le transfert de chaleur grâce à son rôle de brassage. Il en résulte que Re et Ri agissent de façons opposées sur l'intensité de l'écoulement et favorisent le transfert thermique \overline{Nu} .

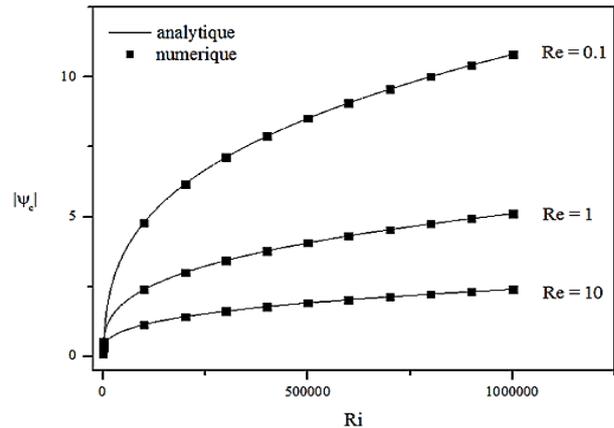


Figure 3 : Évolution de ψ_c avec Ri pour différentes valeurs de Re

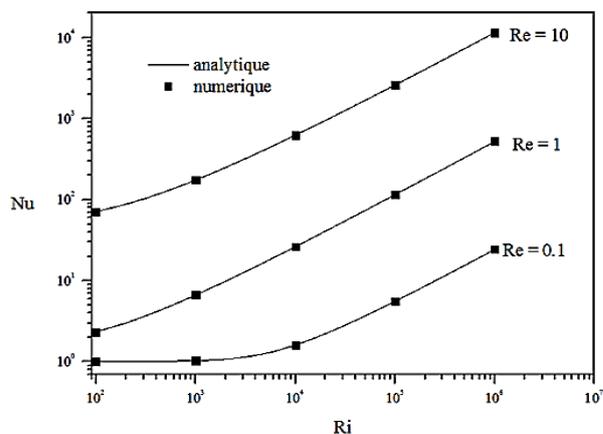


Figure 4 : Evolution de \overline{Nu} avec Ri pour différentes valeurs de Re

5. Conclusion

L'étude numérique et analytique de la convection mixte dans une cavité rectangulaire allongée ($A = 12$), confinant un fluide newtonien ayant $Pr = 7$, est entreprise dans le cas où les parois verticales sont soumises à une densité de flux de chaleur uniforme, alors que celles horizontales, dont la supérieure est animée d'un mouvement uniforme dans le sens de celui de la densité du flux de chaleur, sont adiabatiques. Nous avons pu démontrer la validité de l'approximation de l'écoulement parallèle on se basant sur l'analyse des lignes de courant et les isothermes (Figure 2).

Nous avons trouvé aussi que le nombre de Richardson, qui compare les importances relatives des convections naturelle et forcée, a un effet positif sur le transfert de chaleur et l'intensité de l'écoulement, car la flottabilité devient la principale force motrice de l'écoulement. Par contre le nombre de Reynolds, qui compare les effets d'inertie à ceux de viscosité, a un effet positif sur le transfert mais un

effet négatif sur l'intensité de l'écoulement.

Références

- [1] C. K. Cha and Y. Jaluria, "Recirculating mixed convection flow for energy extraction," *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 27 (10) (1984) 1801–1812.
 - [2] A. Raji, M. Hasnaoui, Corrélations en convection mixte dans des cavités ventilées, *Rev. Gen. Therm.*, 37 (1998) 874-884.
 - [3] O. Aydin, W. J. Yang, Mixed convection in cavities with a locally heated lower wall and moving sidewalls, *Numerical Heat Transfer, Part A*, 37 (2000) 695-710, 2000.
 - [4] H. F. Oztop, I. Dagtekin, Mixed convection in two sided lid driven differentially heated square cavity, *Int. J. Heat. Mass Transfer*, 47 (2004) 1761-1769
 - [5] R. Iwatsu, J. M. Hyun, K. Kuwahara, Mixed convection in driven cavity with a stable vertical temperature gradient, *Int. J. Heat. Mass Transfer*, 36 (6) (1993) 1601-1608.
 - [6] M. K. Moallemi, K. S. Jang, Prandtl number effects on laminar mixed convection heat transfer in a lid-driven cavity, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 35 (1992) 1881-1892.
 - [7] M. Lamsaadi, M. Naimi, M. Hassnaoui, Natural convection heat transfer in shallow horizontal rectangular enclosures uniformly heated from the side and filled with non-newtonien power law fluids, *Energy Conversion and management*, 47 (2006) 2535-2551.
 - [8] M. Er-Raki, M. Hasnaoui, A. Amahmid and M. Bourich, Subcritical convection in the presence of Soret effect within a horizontal porous enclosure heated and salted from the short sides, *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, 21 (2011) 150-167.
 - [9] S. Patankar, *Numerical heat transfer and fluid flow*. Hemisphere, Washington DC, 1980.
 - [10] A. Bejan, The boundary layer regime in a porous layer with uniform heat flux from the side, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 26 (1983) 1339-1346.
-