
Soumis le : 30 Décembre 2010

Forme révisée acceptée le : 18 Avril 2011

Email de l'auteur correspondant :

bet_himeur@yahoo.fr

Élément fini flexionnel triangulaire doté d'un quatrième nœud fictif basé sur l'approche en déformation

Mohammed Himeur,^{*} Mohamed Guenfoud,^{*}

^{*} *Labratoire de génie civil et hydraulique, Université 08 mai 1945 de Guelma, Guelma, Algérie*

Résumé

C'est un élément fini de plaque triangulaire d'élasticité plane développé en perspective de construction des éléments de coques. Sa formulation utilise des concepts relatifs à l'approche en déformation, au quatrième nœud fictif, à la condensation statique, à l'intégration analytique et se base sur les hypothèses de la théorie des plaques minces (Théorie de Kirchhoff). La démarche adoptée a permis d'aboutir à un élément fini de plaque (HIMEUR) concurrentiel, robuste et performant.

Mots clef: Élément fini, formulation en déformation, Intégration analytique, Condensation statique, plaque mince;

1. Introduction

Les structures complexes (de coque) sont fréquemment rencontrées dans divers domaines. Le développement d'éléments finis simples et performants pour l'analyse de ces structures constitue un des axes majeurs de la recherche scientifique en mécanique des solides. Seulement, des problèmes sont souvent rencontrés rendant difficile la concrétisation des objectifs assignés. Les principales contraintes observées sont souvent liées :

- aux aspects d'incompatibilité des champs de déplacement lors de l'adjonction des éléments de membrane avec ceux de plaque,
- aux phénomènes de blocage de cisaillement et de membrane : « *shear locking* » et « *membrane locking* »,
- aux problèmes numériques induits par l'absence du « 6^{ème} DDL » dans le cas des éléments co-planaires.
- aux problèmes numériques liés à l'intégration numérique.

L'objectif de cette recherche est donc, « la formulation d'éléments finis de coques basés sur la formulation en déformation » ayant pour finalité le contournement de ces difficultés d'une part, et la construction d'éléments finis de coques simples et efficaces pour l'analyse des structures complexes. Pour ce faire, nous avons enrichi notre démarche par des concepts et des techniques de développement reposant sur l'adoption de « l'approche en déformation », l'introduction d'un « quatrième nœud fictif » à l'élément triangulaire dont les degrés de liberté correspondants sont par la suite éliminés au niveau de la

matrice de rigidité élémentaire par la technique de « *condensation statique* », l'utilisation de « *l'intégration analytique* » pour l'évaluation de la matrice de rigidité.

Les premiers travaux [12] ont abouti à la construction d'éléments finis triangulaires de membrane pouvant être combinés, aisément, avec des éléments flexionnels (plaques, poutres et coques). Il s'agit des éléments :

- « T3_Kteta » [12], dont l'inconnue nodale de rotation est obtenue par adjonction à la matrice de rigidité de l'élément « CST » (formulé en déformation) une matrice de rigidité associée à la rotation autour de la normale (drilling rotation). Partant de la démarche de [18], cette matrice « de rotation » est obtenue en minimisant l'énergie de déformation de la rotation autour de la normale.

- « T43 » [13] et « T43_Eq » [12] qui sont des éléments finis triangulaires à nœud central perturbé. Ils se caractérisent par la présence d'inconnues nodales de rotation définies par dérivation des champs de déplacements (drilling rotation). Les fonctions d'interpolation, sont celles utilisées par Sabir [22] pour l'élément « T43 » et celles obtenues à partir des conditions d'équilibre pour l'élément « T43_Eq » (polynômes bi harmoniques choisis parmi les solutions données par le développement de la fonction d'Airy [26]).

- « T42 » et « T42_Eq » [12] qui ne possèdent pas d'inconnues nodales de rotation.

Le présent travail constitue un enchaînement de notre recherche, axé, cette fois-ci sur le développement d'éléments finis triangulaires de plaque. L'élément fini flexionnel triangulaire doté d'un quatrième nœud fictif basé sur l'approche en déformation constitue

l'aboutissement de ce travail. Nous l'avons baptisé « HIMEUR ».

Cet élément est formulé en utilisant l'approche en déformation. Les fonctions d'interpolation des champs de déformation, par conséquent des déplacements et des contraintes sont développées en utilisant le triangle de Pascal. C'est un élément triangulaire auquel nous avons rajouté un quatrième nœud fictif positionné à l'extérieur et loin du triangle. Cette position, à l'extérieur, est choisie pour éviter l'assouplissement de la matrice de rigidité qui entraînerait une surestimation des déplacements nodaux. Les degrés de liberté correspondant à ce quatrième nœud sont par la suite éliminés par condensation statique de la matrice de rigidité au niveau élémentaire. Donc l'intérêt majeur de ce nœud fictif réside en l'enrichissement des champs de déplacements (raffinement p : élévation du degré du polynôme d'interpolation), et vise, par conséquent, une plus grande précision dans l'approximation de la solution. Le critère variationnel correspondant est celui de l'énergie potentielle totale. L'intégration analytique pour l'évaluation de la matrice de rigidité, est fortement intéressante pour éviter la perte de convergence; phénomène observé chez les éléments isoparamétriques (utilisant l'intégration numérique) qui sont très sensibles (leur convergence est conditionnée par un maillage régulier - non distordu). Les hypothèses de cette formulation sont celles de la théorie des plaques minces (théorie de Kirchhoff) en négligeant le cisaillement transversal.

Pour valider le nouvel élément HIMEUR, nous l'avons testé sur un ensemble de cas tests. Pour chaque cas test, le résultat obtenu est comparé, d'une part, à la solution de référence correspondante, et d'autre part, à la solution donnée par certains éléments de plaque mince se trouvant dans la littérature. Le comportement en flexion simple (flexion dominante devant le cisaillement) est traité à travers l'exemple utilisé par J.L.Batoz et G.Dhatt [2]. Ce test est fort utile pour jauger les niveaux de convergence, la robustesse et les performances de notre élément. Le comportement de notre élément vis à vis du cisaillement transversal est analysé en utilisant l'exemple traité par Guenfoud [10], Belarbi et Charif [3]. Enfin nous avons soumis notre élément aux tests proposés par Robinson [20] pour jauger son comportement pour les aspects de torsion.

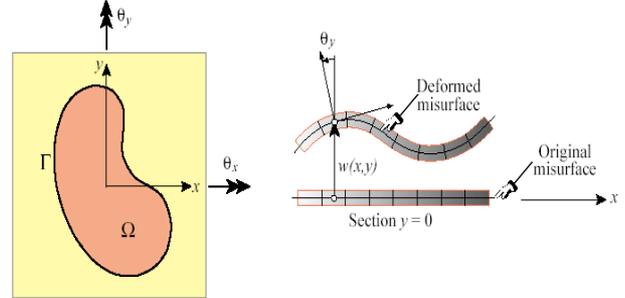
D'une manière générale, la démarche adoptée dans notre développement a permis d'aboutir à un élément fini de plaque (HIMEUR) concurrentiel, robuste et performant. Ceci apparaît, d'une part, à travers son excellent rythme de convergence vers la solution de référence et d'autre part, à travers les performances de son comportement face à d'autres éléments de plaque triangulaires existants dans la littérature : DKT, HCT, [2], C^0 [6], ANST3 et ANST6 [9], TRUMP (Argyris) et SRI [24].

2. Equations de base de la théorie des plaques minces (théorie de Kirchhoff)

2.1. Equations cinématiques

Figure 1

Déformation d'une plaque en flexion (Théorie de Kirchhoff)



Dans la figure 1, les rotations autour des deux axes x et y sont notées θ_x et θ_y et les pentes dans les deux directions sont définies par les variables β_x et β_y , avec :

$$\beta_x = \theta_y \quad \beta_y = -\theta_x \quad (2.1)$$

L'hypothèse de la section droite implique une variation linéaire du déplacement sur l'épaisseur de la plaque. Ce qui se traduit par :

$$u(x, y, z) = z\beta_x(x, y) = z\theta_y(x, y),$$

$$v(x, y, z) = z\beta_y(x, y) = -z\theta_x(x, y) \quad (2.2)$$

Les expressions (2.2) permettent de découpler les champs de déplacement (u , v) de celui de la flèche (w) qui constitue, en référence aux hypothèses de Kirchhoff, l'unique champ permettant de définir le comportement de la plaque.

Ainsi, les déplacements sont donnés par:

$$w(x, y, z) = w(x, y)$$

$$u(x, y, z) = -z \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$v(x, y, z) = -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.3)$$

Et les rotations sont données par :

$$-\theta_x = \beta_y = -z \frac{\partial w}{\partial y}; \quad \theta_y = \beta_x = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.4)$$

Le tenseur de déformation infinitésimal est alors :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = z \frac{\partial \beta_x}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = z \frac{\partial \beta_y}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = z \left(\frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right) = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

Les courbures liées aux moments sont données par :

$$\begin{aligned} K_x &= \frac{\partial \beta_x}{\partial x} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad K_y = \frac{\partial \beta_y}{\partial y} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ K_{xy} &= \left(\frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right) = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (2.6)$$

2.2. Conditions de compatibilité cinématique

Ces conditions ont été établies par Saint Venant (1854) [8]. Leur satisfaction est obligatoire pour garantir l'unicité des déplacements. Les équations de compatibilité sont sous forme développée comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 K_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 K_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 K_{xy}}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 K_{xy}}{\partial x} &= 2 \frac{\partial K_x}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 K_{xy}}{\partial y} &= 2 \frac{\partial K_y}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.7)$$

2.3. Loi de comportement

En état plan de contraintes et pour des matériaux isotropes, hypothèse généralement admise pour le calcul des structures minces (poutres, plaques et coques), la loi de comportement s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

Ce qui se traduit en termes de relation "Moments-Courbures" par le système d'équation suivant :

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (2.9)$$

Avec E le module d'Young, h l'épaisseur de la plaque et ν le coefficient de poisson.

2.3. Equations d'équilibre

L'équilibre d'un élément de dimensions $dx \times dy$ est obtenu par le bilan des forces des actions internes et externes.

$$q dx dy + (Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x}) dy + (Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y}) dx - Q_x dy - Q_y dx = 0 \quad (2.10)$$

Où Q_x et Q_y sont respectivement les efforts tranchants dans les sections perpendiculaires aux axes x et y et q la force surfacique extérieure. L'expression (2.10) est simplifiée pour donner :

$$q + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = 0 \quad (2.11)$$

L'équilibre des moments autour des axes x et y donne :

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}; \quad Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \quad (2.12)$$

En remplaçant les valeurs Q_x et Q_y des équations (2.11) et (2.12) dans la relation (2.9), la condition d'équilibre se traduit en fonction du déplacement "w" par l'expression suivante :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \frac{q}{D} = 0 \quad (2.13)$$

$$\text{Avec } D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

3. Formulation de l'élément "HIMEUR"

3.1. Fonction de forme

Pour les mouvements de corps rigide (MCR), les courbures liées aux moments sont nulles :

$$K_x = 0; \quad K_y = 0; \quad K_{xy} = 0 \quad (3.1)$$

En remplaçant dans les équations (2.6) les courbures par leurs valeurs données par les équations (3.1) et après intégration, nous obtenons les champs des déplacements représentant les mouvements de corps rigide qui se présentent comme suit :

$$W = a_1 - a_2 \cdot x - a_3 \cdot y \quad \beta_x = a_2 \quad \beta_y = a_3 \quad (3.2)$$

Avec a_2 et a_3 , des paramètres représentant les rotations θ_y et θ_x du corps rigide respectivement autour des axes "y" et "x" et a_1 représentant la translation (flèche) du corps rigide le long de la normale (axe "z").

Notre élément possède quatre nœuds (les trois sommets du triangle auquel nous avons ajouté un quatrième nœud fictif). Chacun de ses nœuds possède trois degrés de liberté. Donc les champs de déplacement, formulés par l'utilisation du modèle en déformation, possèdent 12 constantes indépendantes (a_1, \dots, a_{12}). Les trois premières (a_1, a_2, a_3) sont utilisées dans les équations (3.2) pour représenter les mouvements de corps rigide. Les neuf autres (a_4, \dots, a_{12}) sont utilisés pour la représentation de l'état de flexion pure. Ils sont répartis dans les fonctions d'interpolation des déformations de manière à satisfaire les équations (1.7) de compatibilité cinématique pour l'élasticité plane. Ainsi, les champs de déformation pour les modes supérieurs sont établis à partir du triangle de Pascal comme suit :

$$K_x = a_4 + a_5 \cdot x + a_6 \cdot y + a_7 \cdot x \cdot y$$

$$K_y = a_8 + a_9 \cdot x + a_{10} \cdot y + a_{11} \cdot x \cdot y$$

$$K_{xy} = a_{12} + 2 \cdot a_6 \cdot x + a_7 \cdot x^2 + 2 \cdot a_9 \cdot y + a_{11} \cdot y^2 \quad (3.3)$$

En remplaçant dans les équations (2.6) les courbures par leurs valeurs données par les équations (3.3) et après intégration, nous obtenons les champs des déplacements suivants :

$$W = -a_4 \frac{x^2}{2} - a_5 \frac{x^3}{6} - a_6 \frac{x^2 \cdot y}{2} - a_7 \frac{x^3 \cdot y}{6} - a_8 \frac{y^2}{2} - a_9 \frac{x \cdot y^2}{2} - a_{10} \frac{y^3}{6} - a_{11} \frac{x \cdot y^3}{6} - a_{12} \frac{x \cdot y}{2} \quad (3.4)$$

$$\beta_x = a_4 \cdot x + a_5 \cdot \frac{x^2}{2} + a_6 \cdot x \cdot y + a_7 \cdot \frac{x^2 \cdot y}{2} + a_9 \cdot \frac{y^2}{2} + a_{11} \cdot \frac{y^3}{6} + a_{12} \cdot \frac{y}{2}$$

$$\beta_y = a_6 \cdot \frac{x^2}{2} + a_7 \cdot \frac{x^3}{6} + a_8 \cdot y + a_9 \cdot x \cdot y + a_{10} \cdot \frac{y^2}{2} + a_{11} \cdot \frac{x \cdot y^2}{2} + a_{12} \cdot \frac{x}{2}$$

Le champ final des déplacements est obtenu en additionnant les relations (3.2) et (3.4) :

$$\begin{aligned} W &= a_1 - a_2 \cdot x - a_3 \cdot y - a_4 \frac{x^2}{2} - a_5 \frac{x^3}{6} - a_6 \frac{x^2 \cdot y}{2} - a_7 \frac{x^3 \cdot y}{6} \\ &- a_8 \frac{y^2}{2} - a_9 \frac{x \cdot y^2}{2} - a_{10} \frac{y^3}{6} - a_{11} \frac{x \cdot y^3}{6} - a_{12} \frac{x \cdot y}{2} \\ \beta_x &= a_2 + a_4 \cdot x + a_5 \frac{x^2}{2} + a_6 \cdot x \cdot y + a_7 \frac{x^2 \cdot y}{2} + a_9 \frac{y^2}{2} \\ &+ a_{11} \frac{y^3}{6} + a_{12} \frac{y}{2} \\ \beta_y &= a_3 + a_6 \frac{x^2}{2} + a_7 \frac{x^3}{6} + a_8 \cdot y + a_9 \cdot x \cdot y + a_{10} \frac{y^2}{2} \\ &+ a_{11} \frac{x \cdot y^2}{2} + a_{12} \frac{x}{2} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Sous forme matricielle le champ des déplacements donné par les équations (3.5) s'écrit comme suit :

$$\begin{Bmatrix} W(x, y) \\ \beta_x(x, y) \\ \beta_y(x, y) \end{Bmatrix} = [f(x, y)] \{a_i\} \quad (3.6)$$

Avec,

$$\{a_i\}^T = \langle a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12} \rangle$$

$$[f(x, y)]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -x & 1 & 0 \\ -y & 0 & 1 \\ -\frac{x^2}{2} & x & 0 \\ -\frac{x^3}{6} & \frac{x^2}{2} & 0 \\ -\frac{x^2 \cdot y}{2} & x \cdot y & \frac{x^2}{2} \\ -\frac{x^3 \cdot y}{6} & \frac{x^2 \cdot y}{2} & \frac{x^3}{6} \\ -\frac{y^2}{2} & 0 & y \\ -\frac{x \cdot y^2}{2} & \frac{y^2}{2} & x \cdot y \\ -\frac{y^3}{6} & 0 & \frac{y^2}{2} \\ \frac{6}{6} & \frac{6}{6} & \frac{2}{2} \\ -\frac{x \cdot y}{2} & \frac{y}{2} & \frac{x}{2} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Connaissant les coordonnées nodales (x_i, y_i) correspondant aux nœuds j ($j=1, \dots, 4$) et en application de la relation (3.7) le vecteur des déplacements nodaux, au niveau élémentaire, est donné comme suit :

$$\{q^e\} = \begin{Bmatrix} [f(x_1, y_1)] \\ [f(x_2, y_2)] \\ [f(x_3, y_3)] \\ [f(x_4, y_4)] \end{Bmatrix} \{a_i\} \quad (3.8)$$

Avec,
 $\{q^e\}^T = \langle w_1, \beta_{x_1}, \beta_{y_1}, w_2, \beta_{x_2}, \beta_{y_2}, w_3, \beta_{x_3}, \beta_{y_3}, w_4, \beta_{x_4}, \beta_{y_4} \rangle$
 $[A] = \begin{bmatrix} [f(x_1, y_1)] \\ [f(x_2, y_2)] \\ [f(x_3, y_3)] \\ [f(x_4, y_4)] \end{bmatrix}$ est la matrice des coordonnées nodales.

Sa forme matricielle développée est donnée en annexe.

De l'équation (3.8), on en déduit la valeur des paramètres "a_i" qui sont données par le système d'équations suivant : $\{a_i\} = [A]^{-1} \{q^e\}$ (3.9)

En remplaçant les valeurs des paramètres a_i données par la relation (3.9) dans le système d'équation (3.6), on obtient la relation :

$$\begin{Bmatrix} W(x, y) \\ \beta_x(x, y) \\ \beta_y(x, y) \end{Bmatrix} = [f(x, y)] [A]^{-1} \{q^e\} \quad (3.10)$$

dans laquelle, $[N] = [f(x, y)] [A]^{-1}$ représente la matrice des fonctions d'interpolation N_i. En remplaçant dans les équations (2.6), w(x,y) par ses valeurs de l'équation (3.6), la relation déformation - déplacement prend la forme développée suivante :

$$\begin{Bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & x.y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & x.y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.x & x^2 & 0 & 2.y & 0 & y^2 & 1 \end{bmatrix} \{a_i\} \quad (3.11)$$

Ainsi, la matrice de déformation est donnée comme suit :

$$[Q(x, y)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & x.y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & x.y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.x & x^2 & 0 & 2.y & 0 & y^2 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

3.2. Matrice de rigidité élémentaire

Le travail virtuel intérieur, élémentaire discrétisé est donné par l'expression :

$$(\delta W_{int})^e = \int_{V^e} \delta \{\epsilon\}^T \cdot \{\sigma\} dV \quad (3.13)$$

$$\text{Sachant que : } \{\epsilon\} = [N]^T \{q^e\} = [Q(x, y)] [A]^{-1} \{q^e\} \quad (3.14)$$

$$\text{Et que : } \{\sigma\} = [D] \{\epsilon\} \quad (3.15)$$

Et en remplaçant dans l'expression (3.13) $\{\epsilon\}$ et $\{\sigma\}$ par leurs valeurs données, respectivement dans les équations (3.14) et (3.15), on obtient :

$$(\delta W_{int})^e = \delta \{q^e\}^T \int_V [Q(x, y)]^T \cdot [A^{-1}]^T \cdot [D] \cdot [Q(x, y)] [A]^{-1} \{q^e\} dV \quad (3.16)$$

Ainsi, la matrice de rigidité élémentaire tirée de l'expression (3.16) est la suivante :

$$[K^e] = \int_V [Q(x, y)]^T \cdot [A^{-1}]^T \cdot [D] \cdot [Q(x, y)] [A]^{-1} dV \quad (3.17)$$

L'expression (3.17) peut, s'écrire :

$$[K^e] = [A^{-1}]^T \int_V [Q(x, y)]^T [D] [Q(x, y)] dV [A]^{-1} = [A^{-1}]^T [K_0] [A]^{-1} \quad (3.18)$$

L'évaluation de l'expression $[K_0] = \int_V [Q(x, y)]^T [D] [Q(x, y)] dV$ est établie par intégration

analytique des différents composants résultant du produit matriciel $[Q(x, y)]^T [D] [Q(x, y)]$ dont les expressions prennent la forme " $H_{\alpha\beta} = C \cdot x^\alpha \cdot y^\beta$ ". La matrice $[K_0]$ relative à l'élément "HIMEUR" est donnée en annexe. Donc la matrice $[K_0]$ est évaluée par intégration analytique des valeurs $\int_x \int_y H_{\alpha\beta} = \int_x \int_y C \cdot x^\alpha \cdot y^\beta$. Enfin

la matrice de rigidité élémentaire à prendre en considération au niveau de l'assemblage et de la construction de la matrice de rigidité globale de la structure, est celle obtenue après condensation de la matrice $[K^e]$. Cette condensation statique concerne les degrés de liberté relatifs au quatrième nœud fictif.

4. Validation de l'élément "HIMEUR"

4.1. Poutre-Console soumise à une charge ponctuelle à son extrémité libre

Ce test permet de vérifier le comportement de notre élément en flexion simple en fonction de l'élanement (rapport L/h). En effet dans ce cas test la flexion est dominante devant le cisaillement pour des rapports L/h élevés. A l'extrémité libre, la poutre est soumise selon la direction "Oz", à une charge ponctuelle d'intensité P=0.1. On simule un encastrement parfait à l'autre extrémité (voir Figure2).

Les données géométriques, mécaniques et de chargement sont fournies dans le tableau 1.

Figure 2

Poutre –Console soumise à une charge ponctuelle

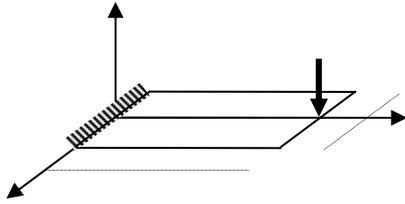


Tableau 1

Données géométriques, mécaniques et de chargement pour la poutre console en flexion simple

Longueur	L=10 m
Largeur	b=1 m
Épaisseur	h=varie de 0,1 à 10m
Module d'Young	E=1,2x10 ⁶ N/m ²
Coefficient de Poisson	ν = 0
Chargement	P=0,1 N

Pour voir l'influence du cisaillement transversal sur le comportement de notre élément, nous simulons, dans ce cas test, le déplacement "w" du point "A" selon la direction "Oz" pour plusieurs valeurs du rapport "L/h". Nous comparons ensuite les résultats, d'une part à la solution théorique donnée par la formule (4.1) de la théorie des poutres et d'autre part, au comportement d'autres éléments triangulaires traités par Guenfoud [10] (DSTM, ANST6, DKTM). La solution théorique du déplacement "w" du point "A" selon la direction "Oz" est donnée comme suit :

$$w_r = \frac{4PL^3}{EBh^3} \left[1 + \frac{1}{2k} \left(\frac{h}{L} \right)^2 \right] \quad (4.1)$$

Les résultats de simulation du point "A" suivant la direction "Oz" sont donnés dans le graphe 1 et le tableau 2.

Le graphe 1 représente, sous forme graphique, le déplacement normalisé du point "A" en flexion simple en fonction du rapport "L/h" et la comparaison du comportement de l'élément HIMEUR par rapport à la solution théorique de référence. Nous remarquons que notre élément est très performant pour des élancements importants (rapport L/h >10). Il est à noter que sa convergence vers la solution est obtenue avec un maillage composé de dix (10) éléments.

Graphe 1

Déplacement normalisé du point A en flexion simple

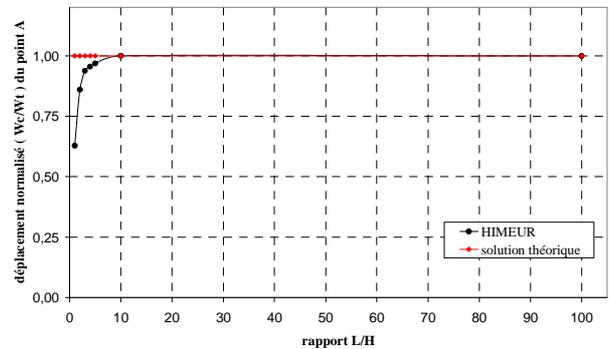


Tableau 2

Déplacement du point A suivant l'axe "Oz" de la poutre console en flexion simple

L/h	DSTM	ANST6	DKTM	HIMEUR	Solution théorique
1	5,1x10 ⁻⁷	5,3x10 ⁻⁷	3,1x10 ⁻⁷	3,3x10 ⁻⁷	5,3x10 ⁻⁷
2	2,9x10 ⁻⁶	3,0x10 ⁻⁶	2,5x10 ⁻⁶	2,7x10 ⁻⁶	3,1x10 ⁻⁶
3	9,0x10 ⁻⁶	9,6x10 ⁻⁶	8,4x10 ⁻⁶	9,0x10 ⁻⁶	9,6x10 ⁻⁶
4	2,0x10 ⁻⁵	2,2x10 ⁻⁵	2,0x10 ⁻⁵	2,1x10 ⁻⁵	2,2x10 ⁻⁵
5	4,0x10 ⁻⁵	4,2x10 ⁻⁵	3,9x10 ⁻⁵	4,1x10 ⁻⁵	4,3x10 ⁻⁵
10	-	-	-	3,3x10 ⁻⁴	3,3x10 ⁻⁴
100	0,31329	-	0,31327	0,33303	0,3333

Le tableau 2 récapitule aussi les résultats donnés par d'autres éléments triangulaires existants. Nous remarquons là également que notre élément est robuste devant les éléments DSTM, DKTM, [10] surtout pour des rapports L/h > 3, puisque son comportement est plus proche de la solution théorique de référence. Comme il est très concurrentiel face à l'élément ANST6 [10]. Il faut noter que l'élément HIMEUR donne de moins bonnes performances que les autres éléments lorsque le rapport L/h est inférieur à 10. Ceci s'explique par le fait que notre élément néglige l'influence du cisaillement transversal (Hypothèses de Kirchhof).

4.2. Plaque carrée isotrope

Cet exemple a été repris par de nombreux auteurs dans la littérature notamment [2]. Il s'agit d'une plaque carrée isotrope de côté *a* et d'épaisseur *h*. Nous simulons dans ce travail plusieurs cas de figure en fonction des conditions aux limites de la plaque et du type de chargement. Il s'agit dans ce cas test d'étudier le comportement de l'élément HIMEUR en considérant différents maillages et plusieurs rapports "a/h". Les résultats concernent le déplacement "w" du point central (C) de la plaque, qui est comparé aux solutions analytiques données pour les plaques minces

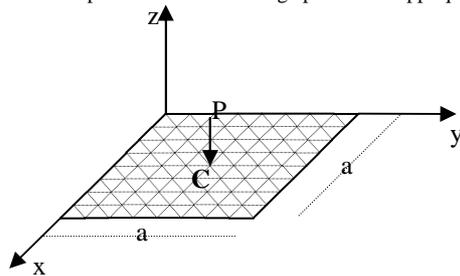
relatives à chaque cas de figure. Comme on procèdera à des comparaisons avec des éléments triangulaires existants dans la littérature, notamment les éléments SRI [24], C^O[6], TRUMP (Argyris), DKT [2].

4.2.1. *Plaque carrée isotrope sollicitée par une charge ponctuelle appliquée en son centre*

4.2.1.1. *Plaque carrée isotrope simplement appuyée sur ses quatre côtés*

Figure 3

Plaque carrée isotrope soumise à une charge ponctuelle appliquée en son centre



Les données géométriques et mécaniques sont données dans le tableau 3.

Tableau 3

Données géométriques, mécaniques et de chargement pour la plaque carrée isotrope

Longueur du côté	a = 2,0m
Epaisseur	h = 0,03m
Module d'Young	E=210x10 ⁹ N/m ²
Coefficient de Poisson	ν = 0,3
Chargement	P= 800 N

La solution théorique du déplacement "w" du point "C" le long de la direction "Oz" est donnée par [2] comme suit :

:

Tableau 4

Déplacement normalisé "W_c/W_t" du point C - plaque carrée isotrope, simplement appuyée sur ses quatre côtés, avec charge concentrée au point C -

Maillage	4 x 4			6 x 6			8 x 8		
a/h	100	1000	10000	100	1000	10000	100	1000	10000
SRI	0,070	0,9E-3	0,9E-5	0,134	0,0018	1,9E-5	0,207	0,0031	3,1E-5
C ^O	0,898	0,382	0,008	0,960	0,781	0,083	0,978	0,916	0,309
TRUMP	1,017	1,016	1,016	1,009	1,007	1,007	1,006	1,004	1,004
DKT	1,003	1,003	1,003	1,002	1,002	1,002	1,001	1,001	1,001
HIMEUR	0,984	0,984	0,984	0,997	0,997	0,997	1,000	1,000	1,000

4.2.1.2. *Plaque carrée isotrope encastree sur ses quatre côtés*

Nous reprenons pour ce cas test l'exemple de la figure 3 avec les mêmes données géométriques et mécaniques du matériau, mais en simulant un encastrement parfait de la

$$w_t = 0.0116 \frac{Pa^2}{D} \quad \text{avec} \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (4.2)$$

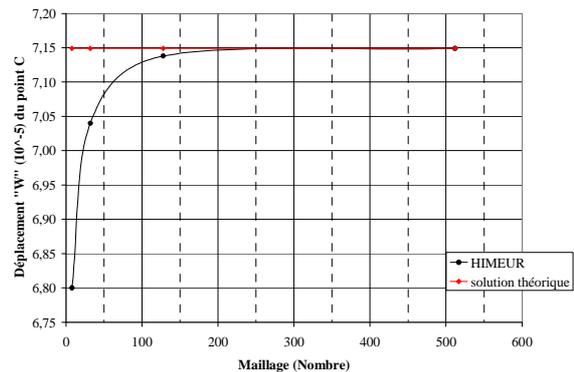
Les résultats du déplacement du point "C" suivant la direction "Oz" selon différents maillages sont donnés dans le graphe 2 et le tableau 4.

Le graphe 2 représente, sous forme graphique, le déplacement du point "C" selon différents maillages. Nous remarquons la bonne performance de notre élément, puisque il converge rapidement vers la solution analytique de référence. Le tableau 4 regroupe aussi les valeurs du déplacement normalisé "W_c/W_t" du point C de quelques éléments triangulaires de plaque mince, pour différents maillages et plusieurs rapports "a/h" et met en exergue la qualité des résultats obtenus par l'élément HIMEUR devant ces éléments.

Là aussi notre élément est le plus robuste devant les éléments SRI [24], C^O [6], TRUMP (Argyris), quelque soit le maillage ou le rapport "a/h" et très concurrentiel face à l'élément DKT [2].

Graphe 2

Déplacement "W" du point C - plaque carrée isotrope, simplement appuyée sur ses quatre côtés, avec charge concentrée au point C.



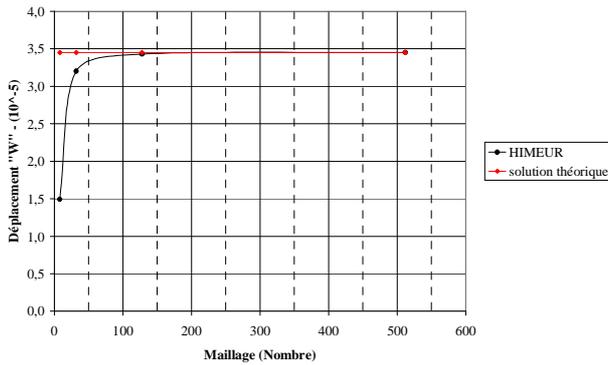
plaque sur ses quatre côtés. La solution théorique du déplacement "w" du point "C" le long de la direction "Oz" est donnée par [2] comme suit :

$$w_t = 0.0056 \frac{Pa^2}{D} \quad \text{avec} \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (4.3)$$

Les résultats du déplacement du point "C" suivant la direction "Oz" selon différents maillages sont donnés dans le graphe 3. Celui-ci représente, sous forme graphique, le déplacement du point "C" selon différents maillages. Au même titre que les cas tests précédents, notre élément présente, là également de bonnes performances, puisque il converge rapidement vers la solution analytique de référence.

Graphe 3

Déplacement "W" du point C - plaque carrée isotrope encastree sur ses quatre côtés, avec charge concentrée au point C



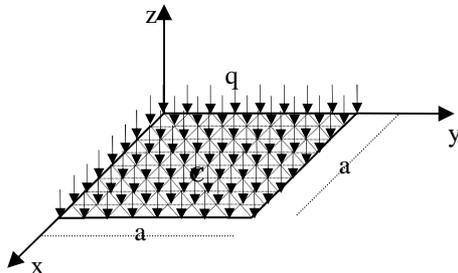
Le graphe 3 représente, sous forme graphique, le déplacement du point "C" selon différents maillages. Au même titre que les cas tests précédents, notre élément présente, là également de bonnes performances, puisque il converge rapidement vers la solution analytique de référence.

4.2.2. Plaque carrée isotrope sollicitée par une charge uniformément répartie

Nous reprenons pour ce cas test l'exemple de plaque de la figure 3 que nous sollicitons d'une charge uniformément répartie d'intensité $q = 60 \text{ T/m}^2$

Figure 4

Plaque carrée isotrope soumise à une charge uniformément répartie



La solution théorique du déplacement "w" du point "C" le long de la direction "Oz" est donnée pour le cas d'une plaque simplement appuyée par la formule (4.4) et pour le cas de la plaque encastree par la formule (4.5) :

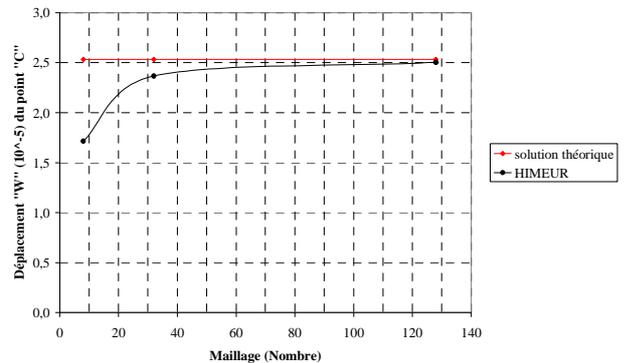
$$w_c = 0.004062 \frac{qa^4}{D} \quad \text{avec} \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (4.4)$$

$$w_c = 0.00126 \frac{qa^4}{D} \quad \text{avec} \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (4.5)$$

Les résultats de simulation du déplacement du point "C" suivant la direction "Oz" selon différents maillages sont donnés dans les graphes 4 et 5

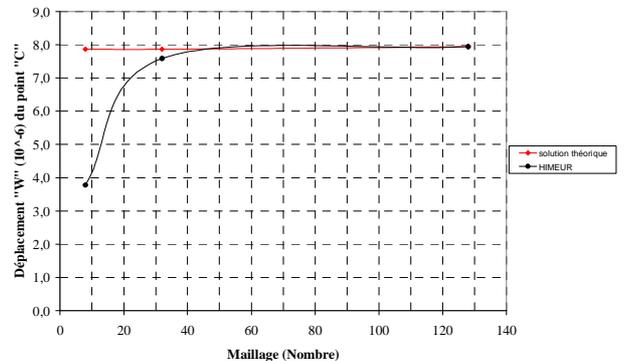
Graphe 4

Déplacement "W" du point C - plaque carrée isotrope simplement appuyée sur ses quatre côtés avec une charge uniformément répartie.



Graphe 5

Déplacement "W" du point C - plaque carrée isotrope encastree sur ses quatre côtés, avec une charge uniformément répartie.



Le graphe 4 regroupe les résultats pour le cas d'une plaque simplement appuyée et le graphe 5 ceux relatifs à la plaque encastree sur ses quatre côtés. Nous remarquons que pour les deux cas tests, notre élément se comporte bien, puisque il se caractérise par la rapidité de convergence vers la solution analytique.

4.3. Plaque biaise isotrope

Il s'agit, pour ce test, d'une plaque isotrope biaise (angle 60°) (figure 5) soumise à une charge uniforme p ayant deux appuis simples ($W=0$) et deux bords libres.

Les données géométriques et mécaniques sont données dans le tableau 5. Ce problème, traité par [2] pour l'analyse des éléments quadrilatéraux DSQ et Q4γ est utilisé pour évaluer la convergence de notre élément. Pour ce faire nous avons considéré des maillages de 2x2, 4x2, 8x2, 16x2 éléments par côté. La solution de référence, obtenue par un schéma de différences finies [19], est donnée par la formule 4.6.

$$w_{ref.} = 0.07945 \cdot \frac{P.L^2}{D} \quad \text{avec} \quad D = \frac{E.h^3}{12(1-\nu^2)} \quad (4.6)$$

Figure 5

Plaque isotrope biaise (60°) avec bords libres

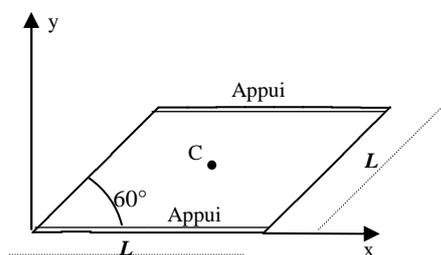


Tableau 5

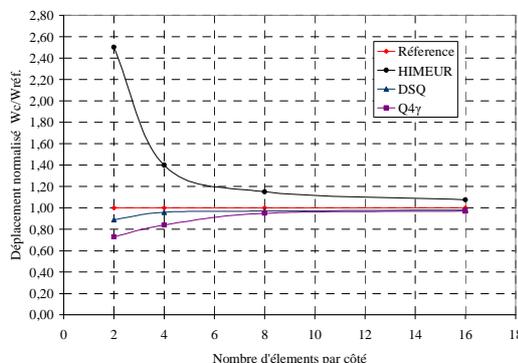
Données géométriques, mécaniques pour la plaque biaise (60°) isotrope

Longueur du côté	L = 100 m
Epaisseur	h = 0,1 m
Module d'Young	E = 1000 N/m ²
Coefficient de Poisson	ν = 0,31

Les résultats des déplacements obtenus par l'élément HIMEUR sont illustrés par le graphe 6. Nous y avons également, porté pour des fins de comparaison, les résultats donnés par les éléments quadrilatéraux DSQ et Q4γ [2]. Nous remarquons une convergence monotone pour les trois éléments avec une convergence par le haut de l'élément "HIMEUR".

Graphe 6

Déplacement normalisé "W_c/W_{ref.}" du point central - plaque biaise isotrope avec bords libres.



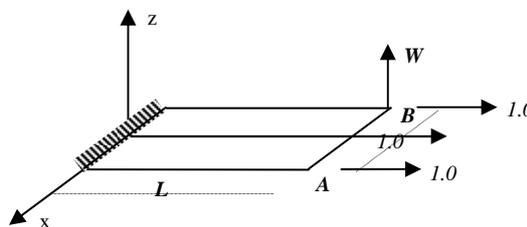
4.4. Tests de ROBINSON

Il s'agit de deux tests proposés par ROBINSON [20] pour étudier le comportement d'un élément triangulaire sollicité en flexion et en torsion gênées.

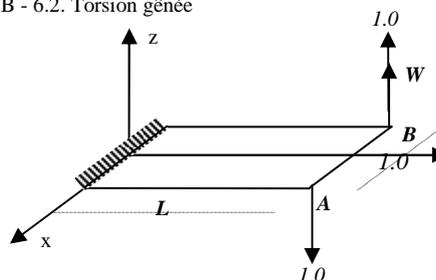
Figure 6

Poutre – Console soumise aux tests de ROBINSON

A – 6.1. flexion gênée



B - 6.2. Torsion gênée



Les caractéristiques géométriques et mécaniques du matériau sont données dans le tableau 6. Nous étudions l'influence du rapport "L/h" (la longueur varie de 1 x h à 10000 x h) sur le déplacement "W" du point "A" pour deux types de sollicitations.

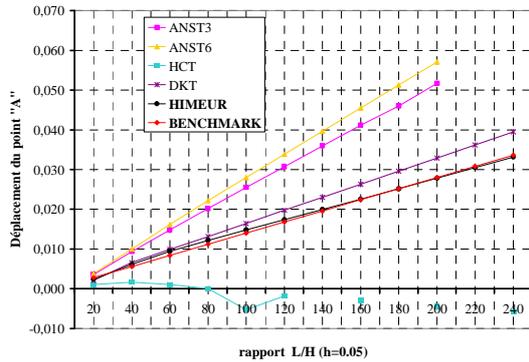
Tableau 6

Données géométriques, mécaniques du matériau pour la poutre-console soumise au test de *ROBINSON*

Longueur du côté	L = Variable
Largeur	B=1 m
Epaisseur	h= 0,05 m
Module d'Young	E=1,0x10 ⁷ N/m ²
Coefficient de Poisson	$\nu = 0,25$

Graphe 7

Test "A" - Flexion Gênée – déplacement "W" du point "A"



Graphe 8

Tableau 7

Test "A" - Flexion Gênée – déplacement "W" du point "A"

L	ANST3	ANST6	HCT	DKT	HIMEUR	BENCHMARK
0,05	0,00000174	0,0000064	-	-	0,000008022	-
0,5	0,00087300	0,0011800	-	-	0,00092053	-
1	0,00356000	0,0038100	0,0010520	0,002105	0,00235240	0,0028
2	0,00935000	0,0100000	0,0015790	0,006580	0,00614230	0,0056
3	0,01480000	0,0162000	0,0010520	0,009870	0,00938960	0,0084
4	0,02020000	0,0222000	0	0,013160	0,01215900	0,0112
5	0,02550000	0,0280000	-0,0052600	0,016450	0,01477200	0,0140
6	0,03070000	0,0339000	-0,0018420	0,019740	0,01735700	0,0168
7	0,03600000	0,0397000	-	0,023030	0,01995100	0,0196
8	0,04120000	0,0455000	-0,0028940	0,026320	0,02256200	0,0224
9	0,04600000	0,0513000	-	0,029620	0,02518800	0,0252
10	0,05170000	0,0571000	-0,0044730	0,032900	0,02782800	0,0280
11	-	-	-	0,036190	0,03047800	0,0308
12	-	-	-0,0057890	0,039480	0,03313700	0,0336
25	0,12970000	0,1433000	-	-	0,06805900	-
50	0,25970000	0,2869000	-	-	0,13567000	-
500	2,59850000	2,6540000	-	-	1,35530000	-

Test "B" - Torsion Gênée – déplacement "W" du point "A"

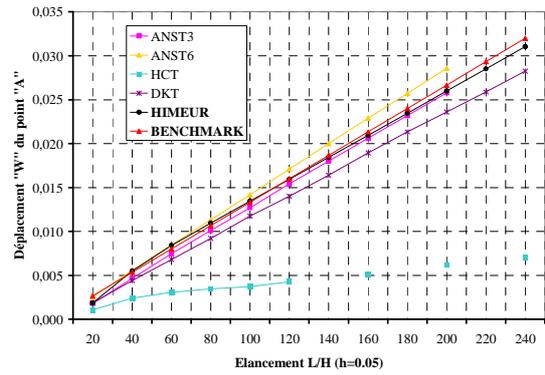


Tableau 8

Test "B" - Torsion Gênée – déplacement "W" du point "A"

L	ANST3	ANST6	HCT	DKT	HIMEUR	BENCHMARK
0,05	0,00000116	0,00000383	-	-	0,00000100	-
0,5	0,00043800	0,00088300	-	-	0,00045531	-
1	0,00178000	0,00252000	0,0010660	0,001866	0,00186770	0,002666
2	0,00467000	0,00555000	0,0024000	0,004400	0,00550220	0,005333
3	0,00743000	0,00847000	0,0030660	0,006800	0,00840630	0,007999
4	0,01010000	0,01130000	0,0034660	0,009200	0,01095800	0,010666
5	0,01270000	0,01420000	0,0037330	0,011733	0,01344500	0,013333
6	0,01540000	0,01710000	0,0042666	0,014000	0,01593200	0,015999
7	0,01800000	0,02000000	-	0,016400	0,01842900	0,018666
8	0,02060000	0,02290000	0,0050660	0,018933	0,02093700	0,021333
9	0,02320000	0,02570000	-	0,021333	0,02345500	0,023999
10	0,02580000	0,02860000	0,0061330	0,023600	0,02598100	0,026666
11	-	-	-	0,025866	0,02851200	0,029333
12	-	-	0,0070660	0,028266	0,03104700	0,031999
25	0,06489000	0,07170000	-	-	0,06419500	-
50	0,12986000	0,14350000	-	-	0,12817000	-
500	1,29930000	1,43270000	-	-	1,28090000	-

Le test "A" concerne le comportement de la poutre-console sous l'action de deux couples $M_y=1.0$ appliquées aux nœuds de son extrémité libre. C'est la flexion gênée. Le test "B" concerne l'action de deux charges concentrées $P_z=1.0$ et $P_z=-1.0$ appliquées respectivement aux mêmes nœuds. C'est la torsion gênée. La solution de référence (BENCHMARK) relative aux éléments triangulaires est extraite de [9]. Les graphes 7 et 8 et les tableaux 7 et 8 représentent le déplacement "W" du point "A" en fonction du rapport "L/h" et la comparaison du comportement de l'élément HIMEUR par rapport à la solution de référence (BENCHMARK) et aux résultats donnés par d'autres éléments triangulaires existants ANST3 [9], ANST6 [9], HCT, DKT [2]. L'étude détaillée des résultats obtenus met en exergue la bonne performance de l'élément HIMEUR. En effet les résultats enregistrés sont très proches de la solution de référence tant pour la flexion gênée que pour la torsion gênée et ceci quelque soit la longueur "L". Il est à noter, que ce résultat n'est obtenu qu'avec un maillage modéré, composé seulement de quatre éléments triangulaires. Par ailleurs, l'élément HIMEUR apparaît plus robuste que tous les éléments pris comme base de comparaison, bien que l'élément DKT pour la situation de flexion gênée et à un degré moindre l'élément ANST3 pour la situation de la torsion gênée, lui sont concurrentiels. Les graphes 7 et 8 illustrent, sous forme graphique ces constats.

5. Conclusion

Nous avons présenté dans ce travail un élément fini flexionnel triangulaire en perspective de l'analyse linéaire statique et dynamique et pour l'analyse non linéaire géométrique de structures courbes (arcs et coques). L'approche adoptée, les concepts et les techniques de développement utilisés ont permis d'aboutir à un élément fini concurrentiel, robuste et performant pour le traitement des plaques minces. Il reste à poursuivre sa maturation pour en faire un outil fiable et efficace pour aborder le calcul de toutes les situations de coques, des plus minces aux plus épaisses, profondes ou surbaissées. C'est un élément qui présente des avantages certains qui plaident pour son utilisation. La présence du nœud fictif et l'adoption de l'approche « en déformation » ont donné la possibilité d'enrichissement des champs de déplacements, par conséquent une plus grande précision dans l'approximation de la solution, en évitant la complexité des théories classiques. La réduction des matrices de rigidité élémentaires par la technique de « condensation statique », action concernant les degrés de liberté relatifs au nœud fictif, permet d'éviter des systèmes d'équations, à résoudre, énormes, donc des économies de temps machine non négligeables. L'utilisation de l'intégration analytique dans l'évaluation de la matrice de rigidité, a donné à notre élément des comportements performants. Ce résultat a été remarquable dans les tests de convergence effectués où

nous observons une tendance rapide vers la solution contrairement aux éléments isoparamétriques (utilisant l'intégration numérique).

Références

- [1] Batoz J. L., Bath KJ, Ho L.W., A study of three node triangular plate bending elements. *Int. J. Num. Meth. Eng.* 1980;15:1771-812.
- [2] Batoz J. L., Dhatt G., Modélisation des structures par éléments finis, vol.1, Solides Elastiques, Vol 2 : Poutres et plaques, Hermes, Paris, 1990, Volume 1, 455 pages, Volume 2, 483 pages.
- [3] Belarbi M. T., Charif A. Développement d'un nouvel élément hexaédrique simple basé sur le modèle en déformation pour l'étude des plaques minces et épaisses, *Revue européenne des éléments finis*, 1999 pp 135-157.
- [4] Belarbi M. T., Développement de nouveaux éléments à modèle en déformation : Application linéaire et non linéaire, Thèse de Doctorat, Univ. Constantine (Algérie), 2000.
- [5] Belouar L., Guenfoud M., A new rectangular finite element based on the strain approach for plate bending, *Thin-Walled struct.*, 43-2005, pp 47-63.
- [6] Belytschko, T. ONG, J.S.J., LIU, WK., KENNEDY, J.M., Hourglass control in linear and nonlinear problems, *Compute methods in applied mechanics and engineering*, 1984, Vol 43, pp 251-276.
- [7] Clough R.W. & Tocher J.L., Finite element stiffness matrixes for analysis of plate bending, *Proceeding of first conference Matrix methods in structural mechanics, Wright-Pattersonm Qir force bqsem Ohiom 1965.* 515-812.
- [8] François Frey, *Traité de génie civil de l'école polytechnique fédérale de Lausanne – Volume 3 – Analyse des structures et milieux continus – mécanique des solides*, Presses polytechniques et universitaires romandes CH-1015, 1998.
- [9] Guenfoud M., Deux éléments triangulaires nouveaux pour l'analyse linéaire et non linéaire géométrique des coques, Thèse de doctorat, Institut national des sciences appliquées de Lyon (France), Novembre 1990, 346p
- [10] Guenfoud M., Présentation de l'élément DSTM pour le calcul linéaire des coques d'épaisseur quelconque, *Ann. l'ITBTP*, 1993; 515: 25-52.
- [11] Hamadi D. J. and Belarbi M. T., *Integration solution routine to evaluate the element stiffness matrix for distorted shape*, *Asian journal of civil engineering (Bulding housing)*, Vol 7, n° 5, pp 525-549, 2006.
- [12] Himeur M., Développement d'éléments membranaires nouveaux d'élasticité plane basés sur la formulation en déformation, Thèse de magistère, Université de Guelma (Algérie), Département de Génie Civil, Novembre 2008, 104p
- [13] Himeur M. & Guenfoud M., Elément fini triangulaire nouveau à noeud central perturbé en formulation déformation avec drilling rotation, *CIFMA'03*, 21-23 April 2008, Alep, Syrie
- [14] Ibrahimbegovic A., et Frey F. et Rebora B., Une approche unifiée de a modélisation des structures complexes : les éléments finis avec degré de liberté de rotation, LSC, Rapport Interne 93/10, Ecole polytechnique fédérale de Lausanne (Suisse), Juin 1993.
- [15] Khelassi A., *La condensation statique et son introduction dans le code*, Mémoire de Magister, Université de Batna (Algérie), 2.
- [16] Maalem T., *Contribution au modèle en déformation dans l'analyse des structures*, Thèse de Doctorat, Université de Batna (Algérie), 2007.
- [17] Messaoudi H., *Approche unifiée pour la modélisation d'une buse enterrée*, Mémoire de Magister, Université de Batna (Algérie), 2004.
- [18] Providas E. and Kattis M. A., An assessment of two fundamental flat triangular shell elements with drilling rotation, *Computers and structures* 77, pp 129-139, 2000.
- [19] Razake A., Program of triangular bending elements with derivative smoothing, *IJNME*, Vol. 6, p. 333-343, 1973.
- [20] Robinson J., element evaluation. A set of assessment points and standards tests *Proc. Element method in the commercial environment*, Vol. 1, pp 217-248, Oct. 1978.
- [21] Sabir A.B., A new class of finite elements for plane elasticity problems, *CAFEM 7th*, Int. conf. Struct. Mech. In reactor Tecnology, Chicago, 1983.
- [22] Sabir A.B., A rectangular and triangular plane elasticity element with drilling degrees freedom, chapter 9 in *proceeding of the 2nd International conference on variational methods in engineering*, Southampton University, Springer verlag, Berlin, 1985, pp 17-25.
- [23] Sabir A.B., A Sfendji, Triangular and Rectangular Plane Elasticity Finite Elements, *Thin-Walled struct.*, 21-1995, pp 225-232.
- [24] Sabourin F.m Salle F., Calcul des structures par éléments finis, Barres – Poutres Elasticité plane Axisymétrique Plaques – coques non linéarité, Chapitre IV, INSA Lyon, 2000, 17 pages.
- [25] Jean-Luc SARF, *La condensation statique dans felina (nouvelle édition)*, Rapport Interne LSC 91/22, 1991.
- [26] Teodorecu Paul, *Grands éléments finis "GEF"* pour l'élasticité plane, Thèse n° 462 de doctorat présentée au département de génie civil, Ecole polytechnique fédérale de Lausanne Suisse, 1982
- [27] Yuan F., Miller RE., A rectangular finite element for moderately thick flat plate, *Computer Struct.* 1988;30:1375-87.

Annexes

A.1. Matrice des coordonnées nodales

$$[A] = \begin{Bmatrix} w(x_1, y_1) \\ \beta_x(x_1, y_1) \\ \beta_y(x_1, y_1) \\ w(x_2, y_2) \\ \beta_x(x_2, y_2) \\ \beta_y(x_2, y_2) \\ w(x_3, y_3) \\ \beta_x(x_3, y_3) \\ \beta_y(x_3, y_3) \\ w(x_4, y_4) \\ \beta_x(x_4, y_4) \\ \beta_y(x_4, y_4) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -x_1 & -y_1 & -\frac{x_1^2}{2} & -\frac{x_1^3}{6} & -\frac{x_1^2 y_1}{2} & -\frac{x_1^3 y_1}{6} & -\frac{y_1^2}{2} & -\frac{x_1 y_1^2}{2} & -\frac{y_1^3}{6} & -\frac{x_1 y_1^3}{6} & -\frac{x_1 y_1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & x_1 & \frac{x_1^2}{2} & x_1 y_1 & \frac{x_1^2 y_1}{2} & 0 & \frac{y_1^2}{2} & 0 & \frac{y_1^3}{6} & \frac{y_1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{x_1^2}{2} & \frac{x_1^3}{6} & y_1 & x_1 y_1 & \frac{y_1^2}{2} & \frac{x_1 y_1^2}{2} & \frac{x_1}{2} \\ 1 & -x_2 & -y_2 & -\frac{x_2^2}{2} & -\frac{x_2^3}{6} & -\frac{x_2^2 y_2}{2} & -\frac{x_2^3 y_2}{6} & -\frac{y_2^2}{2} & -\frac{x_2 y_2^2}{2} & -\frac{y_2^3}{6} & -\frac{x_2 y_2^3}{6} & -\frac{x_2 y_2}{2} \\ 0 & 1 & 0 & x_2 & \frac{x_2^2}{2} & x_2 y_2 & \frac{x_2^2 y_2}{2} & 0 & \frac{y_2^2}{2} & 0 & \frac{y_2^3}{6} & \frac{y_2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{x_2^2}{2} & \frac{x_2^3}{6} & y_2 & x_2 y_2 & \frac{y_2^2}{2} & \frac{x_2 y_2^2}{2} & \frac{x_2}{2} \\ 1 & -x_3 & -y_3 & -\frac{x_3^2}{2} & -\frac{x_3^3}{6} & -\frac{x_1^2 y_3}{2} & -\frac{x_3^3 y_3}{6} & -\frac{y_3^2}{2} & -\frac{x_3 y_3^2}{2} & -\frac{y_3^3}{6} & -\frac{x_3 y_3^3}{6} & -\frac{x_3 y_3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & x_3 & \frac{x_3^2}{2} & x_3 y_3 & \frac{x_3^2 y_3}{2} & 0 & \frac{y_3^2}{2} & 0 & \frac{y_3^3}{6} & \frac{y_3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{x_3^2}{2} & \frac{x_3^3}{6} & y_3 & x_3 y_3 & \frac{y_3^2}{2} & \frac{x_3 y_3^2}{2} & \frac{x_3}{2} \\ 1 & -x_4 & -y_4 & -\frac{x_4^2}{2} & -\frac{x_4^3}{6} & -\frac{x_4^2 y_4}{2} & -\frac{x_4^3 y_4}{6} & -\frac{y_4^2}{2} & -\frac{x_4 y_4^2}{2} & -\frac{y_4^3}{6} & -\frac{x_4 y_4^3}{6} & -\frac{x_4 y_4}{2} \\ 0 & 1 & 0 & x_4 & \frac{x_4^2}{2} & x_4 y_4 & \frac{x_4^2 y_4}{2} & 0 & \frac{y_4^2}{2} & 0 & \frac{y_4^3}{6} & \frac{y_4}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{x_4^2}{2} & \frac{x_4^3}{6} & y_4 & x_4 y_4 & \frac{y_4^2}{2} & \frac{x_4 y_4^2}{2} & \frac{x_4}{2} \end{bmatrix}$$

A.2. Matrice [Ko]

- Forme générale

$$[Ko] = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 \\ y & 0 & 2x \\ xy & 0 & x^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 2y \\ 0 & y & 0 \\ 0 & xy & y^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2x & x^2 & 0 & 2y & 0 & y^2 & 1 \end{pmatrix} dx dy \end{bmatrix}$$

- Forme développée avant intégration analytique

$$[K_0] = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & x & y & x.y & \nu & \nu.x & \nu.y & \nu.x.y & \nu.x.y & 0 & & \\ & & x^2 & x.y & x^2.y & \nu.x & \nu.x^2 & \nu.x.y & \nu.x^2.y & \nu.x^2.y & 0 & & \\ & & & 4.x^2.d + y^2 & 2.x^3.d + x.y^2 & \nu.y & x.y.(v+4.d) & \nu.y^2 & x.y^2.(v+2.d) & 2.x.d & & & \\ & & & & x^4.d + x^2.y^2 & \nu.x.y & x^2.y.(v+2.d) & \nu.x.y^2 & x^2.y^2.(v+d) & x^2.d & & & \\ & & & & & & 1 & x & y & x.y & 0 & & \\ & & & & & & & x^2 + 4.y^2.d & x.y & x^2.y + 2.y^3.d & 2.y.d & & \\ & & & & & & & & y^2 & x.y^2 & 0 & & \\ & & & & & & & & & x^2.y^2 + y^4.d & y^2.d & & \\ & & & & & & & & & & & & d \end{bmatrix}$$

$$d = \frac{(1-\nu)}{2}$$

Avec:

- Forme développée après intégration analytique

$$[K_0] = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & H_{00} & H_{10} & H_{01} & H_{11} & \nu.H_{00} & \nu.H_{10} & \nu.H_{01} & \nu.H_{11} & \nu.H_{11} & 0 & & \\ & & H_{20} & H_{11} & H_{21} & \nu.H_{10} & \nu.H_{20} & \nu.H_{11} & \nu.H_{21} & \nu.H_{21} & 0 & & \\ & & & 4.H_{20}.d + H_{02} & 2.H_{30}.d + H_{12} & \nu.H_{01} & H_{11}.(v+4.d) & \nu.H_{02} & H_{12}.(v+2.d) & 2.H_{10}.d & & & \\ & & & & H_{40}.d + H_{22} & \nu.H_{11} & H_{21}.(v+2.d) & \nu.H_{12} & H_{22}.(v+d) & H_{20}.d & & & \\ & & & & & & H_{00} & H_{10} & H_{01} & H_{11} & 0 & & \\ & & & & & & & H_{20} + 4.H_{02}.d & H_{11} & H_{21} + 2.H_{03}.d & 2.H_{01}.d & & \\ & & & & & & & & H_{02} & H_{12} & 0 & & \\ & & & & & & & & & H_{22} + H_{04}.d & H_{02}.d & & \\ & & & & & & & & & & & & H_{00}.d \end{bmatrix}$$

$$\text{Avec: } H_{\alpha\beta} = \iint X^\alpha Y^\beta dx.dy$$