

ETUDE D'UN PLASMA EN DESEQUILIBRE THERMIQUE FORME D'UN MELANGE CH₄-Ar.

R. Benallal, B. Liani et A. Boudghène Stambouli
Laboratoire Physique Théorique- Département de Physique
Université de Tlemcen, B.P 119. 13000 Tlemcen
rafik.benallal@gmail.com

Résumé

On se propose de calculer, à l'aide des principales fonctions thermodynamiques ; l'énergie libre F , l'entropie S et l'enthalpie libre G , la composition chimique d'un plasma hors d'équilibre thermodynamique. Le rôle de F et G est connu, la recherche de l'état d'équilibre revient à rechercher le minimum de F et G . Lorsque le plasma s'écarte de l'équilibre, la loi de Saha cesse d'être applicable, on doit donc prendre en compte cette différence de température. A cet effet, nous utilisons notre modèle à $4T$ pour calculer la composition chimique du CH₄-Ar à différents écarts de températures exprimés par le paramètre $\theta = T_e/T_h$, avec une température électronique variant de 5000 à 20000 K sous pression atmosphérique.

Abstract

One propose to calculate with the thermodynamic functions; the free energy F , entropy S and free enthalpy G , the Non-LTE plasma composition. The function F and G are known, the equilibrium state investigation lead to minimise F and G functions. When plasma drift from the equilibrium state, the Saha law's becomes not applicable, thus one must take account this gap of temperature. In this case, we used our model at $4T$ on the CH₄-Ar composition for a various gap of temperature given by $\theta = T_e/T_h$ with the electronic temperature varies in the range 5000-20000 K at atmospheric pressure.

Mots clés: Plasma, composition chimique, hors équilibre thermique, équation de Saha, abaissement de potentiel d'ionisation, longueur de Debye.

1-Introduction :

On calcule la composition chimique d'un plasma en minimisant l'énergie libre de Gibbs (ou Helmholtz) qui dépend des potentiels chimiques des différentes espèces existant dans le gaz [2], ce qui permet de connaître les propriétés de transports [5]. Quand on suppose que les particules lourdes (molécule, atome ou ion) et les électrons ont des énergies cinétiques de même ordre de grandeur ou des températures voisines, ceci revient à considérer le milieu à une température unique. Toutefois, si la pression est basse ou si le champ électrique augmente (au voisinage des électrodes d'un arc à pression atmosphérique) et quand il existe des gradients de concentration (à proximité des parois ou quand un gaz « froid » est injecté dans un plasma) l'équilibre ne peut être établi. Excepté un plasma à dominance collisionnelle (par exemple pour la région du noyau d'un plasma d'arc aux pressions superatmosphériques), les électrons ne peuvent pas transférer immédiatement leur énergie excessive gagnée à partir d'un champ électrique externe aux particules lourdes, en conséquence, la

température électronique (T_e) du plasma est plus élevée que celle des particules lourdes (T_h) dans une même région. On dit dans ce cas que le plasma est hors d'équilibre thermodynamique. Dans la modélisation qui va suivre, les électrons et les particules lourdes sont supposés satisfaire les fonctions de distribution maxwellienne des vitesses caractérisées par la température électronique T_e et la température des particules lourdes T_h .

2-Méthode de calcul :

Lorsqu'un plasma est supposé être en équilibre thermodynamique, ceci revient à dire que toutes les particules constituant le gaz ont une seule température T , on peut calculer la composition chimique du plasma en utilisant l'équation de Saha qui est donné comme suite :

$$\frac{n_e n_i}{n_0} = \frac{2U_i}{U_0} \frac{(2\pi m_e k_B T)^{3/2}}{h^3} \exp\left(-\frac{E_i}{k_B T}\right)$$

(1)

Avec n_e , n_i et n_0 sont respectivement les densités des électrons, des ions positifs et des atomes neutres de la même espèce ; U_i et U_0 sont les fonctions de partition internes de l'ion et

est la masse de l'électron et k_B est la constante de Boltzmann. Cependant si le plasma est considéré être en déséquilibre thermique, l'équation précédente n'est plus valable. On doit donc utiliser une autre équation qui est plus adéquate à ce genre de phénomène. Potapov[6] a proposé une équation de Saha modifiée qui été ensuite corrigé par Xi Chen et al[3], puis nous avons généralisé[1] le modèle proposé par Xi Chen pour un mélange de gaz, ayant une température propre à chaque espèce. Pour calculer la composition chimique d'un plasma hors d'équilibre thermodynamique (Non-LTE), on utilise l'équation de Saha modifiée qui suit :

$$\frac{n_e n_i}{n_0} = \frac{2U_i(T_e)}{U_0(T_e)} \frac{(2\pi m_e k_B T_e)^{3/2}}{h^3} \exp\left(-\frac{E_i - \Delta E}{k_B T_e}\right) \quad (2)$$

Ayant dans notre cas un mélange de gaz, composé de plusieurs espèces, on a supposé que les particules lourdes ont, selon leur masse, des températures différentes. Donc chaque espèce à sa propre énergie cinétique moyenne et sont supposées suivent les fonctions de distribution des vitesses maxwelliennes caractérisées par les températures $T_{h_1}, T_{h_2}, T_{h_3}$ et T_e qui correspondent à celles de l'hydrogène, du carbone, de l'argon et de l'électron, respectivement. A partir de 8000 K, le système est essentiellement composé d'espèces atomiques et d'électrons libres. Sachant que les électrons sont des particules indiscernables, on peut diviser notre système isolé en 3 systèmes isolés, les uns des autres. Et en considérant que chaque système est composé de $2T$; T_{h_i} (i : l'espèce atomique) et T_e (la température électronique). On pourra écrire que la variation de l'entropie du système total est sous la forme suivante :

$$dS_{iso} = dS_{sys1}(T_{h_1}, T_e) + dS_{sys2}(T_{h_2}, T_e) + dS_{sys3}(T_{h_3}, T_e) \geq 0 \quad (3)$$

On peut utiliser le modèle à $2T$ pour chaque système puisqu'ils sont isolés les uns des autres.

$$dS_{sys1} \geq 0 ; dS_{sys2} \geq 0 ; dS_{sys3} \geq 0 \quad (4)$$

On aboutira sous la condition d'équilibre

$$\sum_k \frac{V_k \mu_k}{T_k} = 0 \quad \text{à} :$$

$$\frac{\mu_e}{T_e} + \frac{\mu_{h_1,ex}}{T_e} - \frac{\mu_{a_1,ex}}{T_e} + \frac{\mu_{h_1,Tr}}{T_{h_1}} - \frac{\mu_{a_1,Tr}}{T_{h_1}} = 0$$

$$\frac{\mu_e}{T_e} + \frac{\mu_{h_2,ex}}{T_e} - \frac{\mu_{a_2,ex}}{T_e} + \frac{\mu_{h_2,Tr}}{T_{h_2}} - \frac{\mu_{a_2,Tr}}{T_{h_2}} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\mu_e}{T_e} + \frac{\mu_{h_3,ex}}{T_e} - \frac{\mu_{a_3,ex}}{T_e} + \frac{\mu_{h_3,Tr}}{T_{h_3}} - \frac{\mu_{a_3,Tr}}{T_{h_3}} = 0$$

On peut donc, en utilisant ces équations (addition) et en remplaçant les potentiels chimiques par leurs valeurs respectives (Eqs. 5), avoir :

$$\frac{n_{a_1} n_{h_2}}{n_{a_2} n_{h_1}} = \frac{U_{a_1}(T_e) U_{h_2}(T_e)}{U_{a_2}(T_e) U_{h_1}(T_e)} \exp(E_{I_1} - E_{I_2}) \quad (6)$$

Et

$$\frac{n_{a_1} n_{h_3}}{n_{a_3} n_{h_1}} = \frac{U_{a_1}(T_e) U_{h_3}(T_e)}{U_{a_3}(T_e) U_{h_1}(T_e)} \exp(E_{I_1} - E_{I_3}) \quad (7)$$

On posera

$$\alpha_{12} = \frac{U_{a_1}(T_e) U_{h_2}(T_e)}{U_{a_2}(T_e) U_{h_1}(T_e)} \exp(E_{I_1} - E_{I_2}) \quad (8)$$

$$\alpha_{13} = \frac{U_{a_1}(T_e) U_{h_3}(T_e)}{U_{a_3}(T_e) U_{h_1}(T_e)} \exp(E_{I_1} - E_{I_3}) \quad (9)$$

On peut à présent utiliser le paramètre $\theta = T_e/T_{h_i}$, en calculant les densités du système 1 (n_{h_1}, n_{a_1}) déduire les autres densités de la façon suivante

$$n_{h_2} = \alpha_{12} \frac{n_{a_2} n_{h_1}}{n_{a_1}} \quad (10)$$

$$n_{h_3} = \alpha_{13} \frac{n_{a_3} n_{h_1}}{n_{a_1}} \quad (11)$$

ΔE est l'abaissement du potentiel d'ionisation dû à la présence des particules chargées. Ce terme est lié à la grande fréquence d'échanges entre les niveaux dont le nombre quantique principal est voisin de la limite d'ionisation. La fonction de partition n'est pas une fonction divergente, car on limite le nombre des niveaux à ceux qui n'ont pas une zone commune de recouvrement. Pour limiter le nombre de niveaux, on introduit l'abaissement du potentiel d'ionisation. Celui-ci est dû à la présence de particules chargées. Le potentiel d'ionisation est alors diminué de la quantité :

$$\Delta E = (z_i + 1) \frac{1}{4k\epsilon_0} \frac{e^2}{\lambda_D} \quad (12)$$

Kihara et al [7,8], ont supposé que le taux de relaxation entre la température électronique et celle des ions est proportionnel au temps du taux de variation des énergies cinétiques moyennes. Et ils ont ajouté que l'énergie cinétique des particules est plus grande que leur énergie potentielle, les ions seront complètement écrantés par les électrons environnants. Cependant, les électrons ont un mouvement très rapide comparé à celui des ions et très peu d'ions prennent part à l'effet d'écrantage. Par conséquent, la longueur de Debye des interactions ion-électron est plus petite que celle des électrons:

$$\frac{1}{\lambda_D} = k_1 \exp\left[\left(\frac{k_1^2 + k_2^2}{2k_2^2}\right) \ln\left(\frac{k_1^2 + k_2^2}{2k_2^2}\right) - \frac{1}{2}\right] \quad (13)$$

Où

$$k_1 = \sqrt{\frac{e^2 n_e}{\epsilon_0 k_B T_e}}, \quad k_2 = \sqrt{\frac{e^2}{\epsilon_0 k_B} \sum_{i=1}^{N_{\max}} \frac{z_i n_i}{T_h}}$$

z_i est la charge ionique et λ_D la longueur de Debye.

3-Résultats et discussion :

Le gaz est composé d'un mélange CH_4-Ar , qui sera soumis à une température électronique allant de 5000 K à 20 000 K sous différentes valeurs de θ . Dans cet intervalle de température, on ne considère que les espèces suivantes : C, H_2 , H, Ar, C^+ , C^{++} , C^{+++} , H^+ , Ar^+ , Ar^{++} , el.

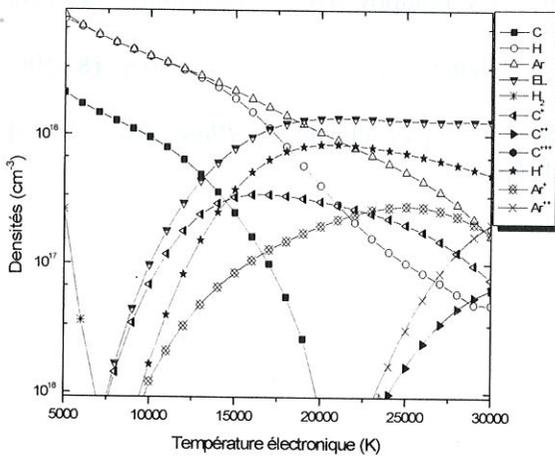


Fig.1. Evolution des densités différentes espèces avec 80% d'argon sous pression atmosphérique, et $T_e=2T_h$

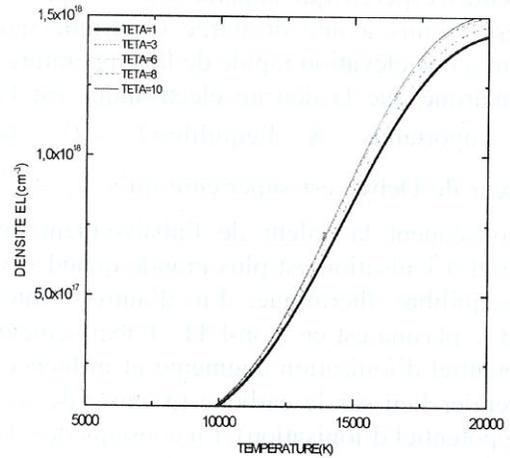


Fig.2. représente la densité électronique pour différentes valeurs de θ sous pression atmosphérique.

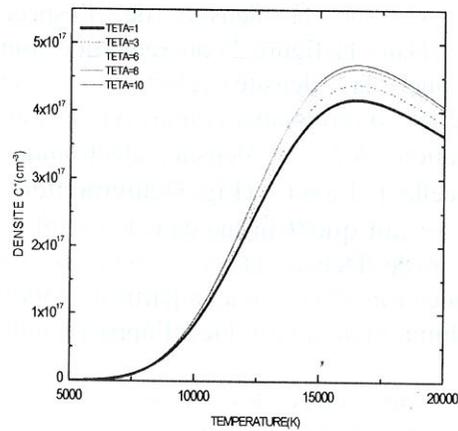


Fig.3. représente la densité de C^+ pour différentes valeurs de θ sous pression atmosphérique.

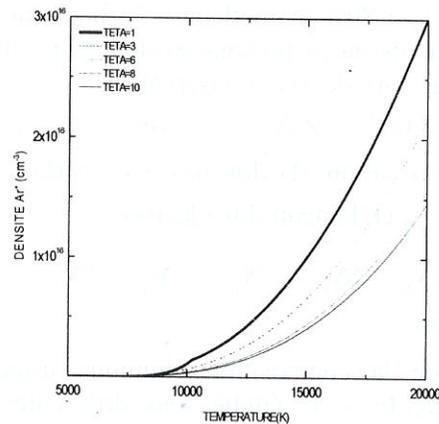


Fig.4. représente la densité de Ar^+ pour différentes valeurs de θ sous pression atmosphérique

La figure.1. représente les densités des différentes espèces qui apparaissent lorsque le gaz est soumis à une décharge électrique qui conduit à une élévation rapide de la température, on remarque que la densité électronique est la plus importante. A l'équilibre $T_{h_i} = T_e$, la longueur de Debye est supérieure qu'à $T_{h_i} < T_e$ par conséquent la valeur de l'abaissement de potentiel d'ionisation est plus grande quand il y a déséquilibre thermique. En d'autre terme, quand le plasma est en Non-LTE, l'abaissement de potentiel d'ionisation augmente et influence, en premier lieu sur le carbone (à cause de son faible potentiel d'ionisation). En conséquence, la densité de C^+ est la plus élevée. On constate que les espèces ioniques présents, en premier temps, sont C^+ et Ar^+ . Puis au fur est à mesure que la température électronique augmente, il y a apparition des autres espèces ioniques. Les trois dernières figures montrent l'influence du paramètre θ sur la densité de l'espèce considérée. Dans la figure.2. on remarque tout d'abord que la densité électronique et importante et sa croissance rapide et suivant l'augmentation de θ la densité électronique (Fig.2) et celle de l'ion C^+ (Fig.3) augmentent, c'est due au fait que θ influe dans le calcul de la longueur de Debye. Dans la figure.3. on constate une croissance suivie, à partir de 15000 K, d'une diminution qui est due à l'apparition du C^{++} .

On peut voir, dans les figures.2.3. que l'influence du paramètre θ implique une augmentation de la densité électronique et de C^+ , tandis que dans la figure.4., plus θ augmente plus la densité d' Ar^+ diminue, ceci est due au choix du dosage que nous avons pris (20% d'argon et 80% de méthane). Sachant que dans nos calculs, nous prenons évidemment en compte ; la loi de la conservation de la matière $(1-Z) N_{Ar}^{tot} = Z N_{CH_4}^{tot}$ avec Z le

pourcentage d'argon, la loi des gaz parfaits

$$\sum N_i = \frac{P}{(kT)}$$

$$N_{at} = N_{H^+} + N_{C^+} + 2N_{C^{++}} + 3N_{C^{+++}} + N_{Ar^+} + 2N_{Ar^{++}}$$

4-Conclusion :

Le calcul de la composition chimique d'un plasma CH_4-Ar a été étudié sous différentes valeurs de θ qui représente le déséquilibre thermique pour une température électronique variant entre 5000 et 20000 K. La méthode à 4T est une approche de calcul qui prend en compte

l'écart de température qu'il peut y avoir entre les différentes espèces présentent dans le mélange, et par conséquent est plus approprié pour les plasma composés de macromolécules à basses températures.

La composition chimique est calculée en utilisant l'équation de Saha modifiée, où la longueur de Debye prend en compte les différentes températures présentent dans le plasma. A partir de cette étude, on peut conclure que :

- Le paramètre θ influe sur l'évolution de la densité des espèces.
- Le choix du dosage initial du gaz est déterminant dans le calcul de la composition.
- L'abaissement du potentiel d'ionisation, et par conséquent la longueur de Debye, a une influence directe sur la densité des espèces.

Références:

- [1] B.Liani , R.Benallal and Z.Bentalha 2005, *Modelling of a multi temperature plasma composition, Chin. Phys. Lett.* **22**, No.12, 3119
- [2] M.Mitchner and C.H.Kruger 1973, *Partially Ionized Gases (New York:Wiley)* pp, 37-47
- [3] X.Chen et al 1999, *J.Phys. D:Appl.Phys.* **32**, 1711-1718.
- [4] L D Landau and EM Lifshitz 1980, *statistical physics.* (Oxford: Pergamon) Part 1 p 132
- [5] A.Gleizes, B.Chervy and JJ.Gonzales 1999 *J.Phys.D:Appl.Phys.* **32**.2060
- [6] A.V.Potapov, *High temperature.* **4** (1966) 55.
- [7] T.Kihara et al., *J. Phys. Soc. Jpn.* **18** (1963) 837.
- [8] T.Kihara et al., *J. Phys. Soc. Jpn.* **18** (1963)1043.

COMMANDE ADAPTATIVE FLOUE ROBUSTE PAR H^∞ POUR DES SYSTEMES NON LINEAIRES MULTIVARIABLES

F. Khaber

Département d'Electrotechnique, Faculté des Sciences de l'ingénieur, Université Ferhat ABBAS de Sétif, 19000
ijkhaber@yahoo.fr

RESUME- Dans ce papier, il s'agit de la conception de lois de commande robustes pour une classe de systèmes non linéaires multivariables (MIMO). Ces systèmes sont représentés par modèles d'entrée-sortie et sont sujets à des incertitudes structurelles et des perturbations externes. Un schéma de commande robuste hybride, formée par la combinaison d'une composante H^∞ , d'un algorithme de commande à structure variable (VSS) et d'une commande floue, est développé. Cette structure de commande garantie que tous les états et signaux impliqués sont bornés. Par conséquent, la performance de poursuite est nettement améliorée. Cette stratégie de commande robuste peut être exploitée pour traiter une grande classe de systèmes non linéaires incertains en utilisant des approximateurs flous adaptatifs. La synthèse de Lyapunov permet de garantir stabilité du système en boucle fermée. Pour illustrer les performances et l'efficacité de l'approche proposée, un exemple de simulation (robot à deux articulations) est présenté.

ABSTRACT- This paper addresses the problem of designing robust output tracking controls for a class of nonlinear MIMO systems that are represented by input-output models involving plant uncertainties and external disturbances. Hybrid adaptive-robust tracking control schemes which are based upon a combination of the H^∞ tracking theory, VSS control algorithm, and fuzzy control design are developed such that all the states and signals are bounded and an H^∞ tracking control is guaranteed. Consequently, the tracking performance of adaptive fuzzy-based control is greatly improved with the help of robust VSS and H^∞ control algorithms. The H^∞ tracking control design can be extended to treat general uncertain nonlinear systems with the help of adaptive fuzzy approximators. The robustness and the stability of the closed loop system are guaranteed by an analytic survey exploiting the Lyapunov synthesis. To illustrate performances and the efficiency of the proposed approach, a simulation example (robot of two joints) is presented.

MOTS-CLES Commande adaptative, Technique H^∞

1. INTRODUCTION

La commande floue peut être une alternative pour gouverner les systèmes industriels complexes où il est difficile d'avoir un modèle mathématique. En effet, la capacité d'introduire directement des informations linguistiques fournies par un expert humain dans la commande en facilite la mise en œuvre. Depuis quelques années des approches analytiques de mise en œuvre satisfaisant les critères de performance de base (stabilité, robustesse, etc...) sont proposées dans la littérature. On peut en citer les travaux de Malki et al. [1], qui ont développé un contrôleur proportionnel dérivé flou où la stabilité du système global est vérifiée par une étude théorique rigoureuse. Dans le cas des systèmes incertains et variant dans le temps, la commande floue classique ne permet pas d'avoir de bons résultats. Pour résoudre ce

problème, des algorithmes de commande adaptative floue ont été proposées, où non seulement les informations linguistiques fournies par des experts humains sont incorporées d'une manière systématique, mais la stabilité globale du système bouclé et la convergence de l'erreur de poursuite sont garanties par une analyse théorique [2][3]. Néanmoins, avec ce genre de commande, on ne peut éliminer les effets des erreurs d'approximations et des perturbations externes sur l'erreur de poursuite. Plusieurs travaux ont abordé ce problème. Chen et al. [4] ont proposé des systèmes flous adaptatifs permettant d'approximer le système, associés à une composante de type H^∞ permettant d'atténuer ces effets indésirables à un niveau donné. Afin d'assurer la convergence de l'algorithme, c'est à dire forcer les paramètres ajustables à rester dans une certaine région, ils utilisent une loi de

projection de type gradient. Cependant, le choix du niveau d'atténuation est difficile car dépendant de la commande, celui-ci est restreint aussi pour garantir l'existence de l'intégrale de l'erreur quadratique [5]. De plus, aucune contrainte n'est imposée pour garder le système dans un régime forcé " $\hat{g}(x)$ ". Une approche analogue a été proposée dans [6]. Néanmoins, seul un choix judicieux des paramètres initiaux permet d'assurer la convergence de l'algorithme.

Afin de palier à tous ces problèmes, nous proposons dans ce travail, un algorithme de commande adaptative muni d'une loi de projection. Cette loi de commande va forcer le système à rester dans la zone de commandabilité ce qui entraînera la convergence de l'erreur de poursuite vers zéro. De plus, elle permettra d'atténuer l'effet des erreurs d'approximation et des perturbations externes à un niveau prédéfini. Pour valider l'approche et montrer son efficacité la commande d'un robot à deux articulations est synthétisée.

2. FORMULATION DU PROBLEME

On considère le système MIMO décrit par :

$$\begin{cases} \dot{y}_1^{(r)} = f_1(x) + g_{11}(x) u_1 + \dots + g_{1p}(x) u_p + d_1(x) \\ \vdots \\ \dot{y}_p^{(m)} = f_p(x) + g_{p1}(x) u_1 + \dots + g_{pp}(x) u_p + d_p(x) \end{cases} \quad (1)$$

où $x \in R^m$ est le vecteur d'état mesuré, $U = [u_1, \dots, u_p]^T \in R^p$ est le vecteur d'entrée, $Y = [y_1, \dots, y_p]^T \in R^p$ est le vecteur de sortie, $f, g_i, h_i \in R$ sont des fonctions lisses et $d_i(x)$ représente le vecteur des perturbations externes.

L'équation (1) peut être réécrite sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1^{(r)} \\ \vdots \\ \dot{y}_p^{(m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_p(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_{11}(x) & \dots & g_{1p}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{p1}(x) & \dots & g_{pp}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_p \end{bmatrix} = f(x) + G(x)U + d \quad (2)$$

2.1. Supposition 1

$G(x)$ est bornée sur un compact $S \subset R^n$, si $\|G(x)\|^2 = \text{tr}(G^T(x).G(x)) \geq b_1 > 0$.

où b_1 représente la plus petite valeur singulière de la matrice $G(x)$.

Etant données les trajectoires de référence y_{m1}, \dots, y_{mp} , on définit les erreurs de poursuite

$$e_1 = y_{m1} - y_1, \dots, e_p = y_{mp} - y_p$$

2.2. Objectifs de la commande

Il s'agit de déterminer une commande par retour d'état robuste $u = u(x/\theta)$ basée sur les systèmes flous et des lois d'adaptation pour ajuster le vecteur des paramètres telles que les conditions suivantes soient satisfaites :

Tous les signaux et les paramètres estimés sont uniformément bornés.

Etant donnée un niveau d'atténuation des perturbations $\rho > 0$, tel que le critère de poursuite H^∞ suivant est réalisé [4].

$$\int_0^T Q e^T d \leq e^T(0) P e(0) + \frac{1}{\eta} (\tilde{\theta}^T(0) \tilde{\theta}(0)) + \rho^2 \int_0^T w^T w dt \quad (3)$$

où $T \in [0, \infty)$ $w \in L_2[0, T]$ sont des perturbations combinées, Q, P sont des matrices définies positives, $\tilde{\theta} = \theta - \theta^*$ est le vecteur des erreurs d'approximation des paramètres du système, η est un paramètre de conception.

Si les conditions initiales $e(0) = 0, \tilde{\theta}(0) = 0$, alors l'équation (3) est équivalente à :

$$\sup_{w \in L_2[0, T]} \frac{\|e\|_Q}{\|w\|} \leq \rho^2 \quad (4)$$

avec $\|e\|_Q = \int_0^T e^T Q e dt$ et $\|w\| = \int_0^T w^T w dt$,

c'est à dire, les gains L_2 de w par rapport à l'erreur de poursuite e doivent être inférieurs ou égaux à ρ .

3. CONCEPTION DU CONTROLEUR ADAPTATIF FLOU

On considère le système (4), si $f_i(x)$ et $g_{ij}(x)$ sont connues et $d_i(x) = 0$ (puisque $G(x) \neq 0$), la commande par retour d'état est :

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix} = G^{-1}(x) \left(- \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_p(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_p \end{bmatrix} \right) \quad (5)$$

où v_i est une entrée externe bien définie.

Les trajectoires de référence peuvent être asymptotiquement poursuivies sous l'action des contrôleurs linéaires externes.

$$\begin{cases} v_1 = y_{m1}^{(r1)} + k_{1r1} e_1^{(r1-1)} + \dots + k_{11} e_1 \\ \vdots \\ v_p = y_{mp}^{(rp)} + k_{ppp} e_p^{(rp-1)} + \dots + k_{p1} e_p \end{cases} \quad (6)$$

En substituant (5) dans (6), nous pouvons obtenir :

$$\begin{cases} e_1^{(r1)} + k_{1r1} e_1^{(r1-1)} + \dots + k_{11} e_1 = 0 \\ \vdots \\ e_p^{(rp)} + k_{ppp} e_p^{(rp-1)} + \dots + k_{p1} e_p = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Si les coefficients k_{ij} sont choisis tels que tous polynômes dans (7) soient du type Hurwitz, alors nous pouvons conclure que $\lim_{t \rightarrow \infty} e_i(t) = 0$:

qui est l'objectif principal de la commande. Cependant, dans notre cas, les fonctions non linéaires $f_i(x)$ et $g_{ij}(x)$ sont inconnues, et $d_i \neq 0$, donc l'obtention de la loi de commande (5) s'avère impossible.

Dans cette situation, notre but est d'approximer $f_i(x)$ et $g_{ij}(x)$ avec les systèmes flous \hat{f} et \hat{g} définis par :

$$\hat{f}_i(x/\theta_i) = \theta_i^T \zeta(x) \quad (8)$$

$$\hat{g}_{ij}(x/\theta_{ij}) = \theta_{ij}^T \xi(x) \quad (9)$$

Choisissant une commande équivalente [7]

$$u_i = \hat{G}^{-1}(x) (-\hat{f}_i(x/\theta_i) + v_i) \quad (10)$$

A cause de l'existence des erreurs d'approximation floue et des perturbations externes, le terme de commande équivalente ne peut pas assurer à lui seul la stabilité du système en boucle fermée. Il est nécessaire alors d'ajouter un compensateur robuste. La commande floue résultante sera alors :

$$u_i = \hat{G}^{-1}(x) (-\hat{f}_i(x/\theta_i) + v_i + \mu_{fi}) \quad (11)$$

où μ_{fi} est le compensateur robuste défini par

$$\mu_{fi} = -\frac{1}{\lambda_i} B_i^T P_i e_i \quad (12)$$

λ_i et P_i sont les solutions de l'équation de Riccati suivante :

$$P_i A_i + A_i^T P_i + Q_i - \left(\frac{2}{\lambda_i} - \frac{1}{\rho^2} \right) P_i B_i B_i^T P_i = 0 \quad (13)$$

Il est à noter que cette équation admet une solution $P = P^T \geq 0$ si et seulement si $2\rho^2 > \lambda_i$.

En utilisant (11), nous pouvons écrire (2) comme :

$$\begin{aligned} y_i^{(n)} &= f_i(x) + (G(x) + \hat{G}(x) - \hat{G}(x)) \hat{G}^{-1}(x) (-\hat{f}_i(x) + v_i - \mu_{fi}) + d_i \\ &= f_i(x) + (G(x) - \hat{G}(x)) \hat{G}^{-1}(x) (-\hat{f}_i(x) + v_i - \mu_{fi}) + \\ &\quad \hat{G}(x) \hat{G}^{-1}(x) (-\hat{f}_i(x) + v_i - \mu_{fi}) + d_i \\ &= (f_i(x) - \hat{f}_i(x)) + (G(x) - \hat{G}(x)) u_i + v_i - \mu_{fi} + d_i \quad (14) \end{aligned}$$

$i = 1, \dots, p$

En utilisant (6), (14) peut être réécrite comme :

$$\begin{aligned} e_i^{(ri)} + k_{ir1} e_i^{(ri-1)} + \dots + k_{ii} e_i &= (f_i(x) - \hat{f}_i(x/\theta_i)) + \\ & (g_{ij}(x) - \hat{g}_{ij}(x/\theta_{ij})) u_j + \mu_{fi} + d_i \quad (15) \end{aligned}$$

A partir de (15), il est clair que m_{fi} est employé pour atténuer les perturbations externes et les erreurs d'approximation floue.

L'équation dynamique de l'erreur peut être écrite comme :

$$\begin{aligned} \dot{e}_i &= A_i e_i + B_i \mu_{fi} + B_i \left[(\hat{f}_i(x/\theta_i) - f_i(x)) \right] + \\ & B_i \left[\sum_{j=1}^p (\hat{g}_{ij}(x/\theta_{ij}) - g_{ij}(x/\theta_{ij})) u_j - d_i \right] \quad (16) \end{aligned}$$

où

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & 1 \\ -k_{i1} & -k_{i2} & \dots & -k_{iri} \end{bmatrix}, \quad B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Définissant les paramètres optimaux θ_i^* et θ_{ij}^* :

$$\theta_i^* = \arg \min \left[\sup | \hat{f}_i(x/\theta_i) - f_i(x) | \right] \quad (17)$$

$$\theta_{ij}^* = \arg \min \left[\sup | \hat{g}_{ij}(x/\theta_{ij}) - g_{ij}(x) | \right] \quad (18)$$

Soient Ω_i, Ω_{ij} les ensembles compacts définis par : $\Omega_i = \{ \theta_i \mid \|\theta_i\| \leq M_i \}$,

$$\Omega_{ij} = \{ \theta_{ij} \mid \|\theta_{ij}\| \leq M_{ij} \};$$

où les M_i, M_{ij} sont des paramètres de conception.

On définit les erreurs minimales d'approximation:

$$w_i^* = (\hat{f}_i(x/\theta_i^*) - f_i(x)) + \sum_{j=1}^p (\hat{g}_{ij}(x/\theta_{ij}^*) - g_{ij}(x)) u_j \quad (19)$$

alors l'équation (16) peut être exprimée par :

$$\dot{e}_i = A_i e_i + B_i \mu_{ij} + B_i \left[\left(\hat{f}_i(x/\theta_i) - \hat{f}_i(x/\theta_i^*) \right) + B_i \left[\sum_{j=1}^p \left(\hat{g}_{ij}(x/\theta_{ij}) - \hat{g}_{ij}^*(x/\theta_{ij}^*) \right) \mu_j - w_i \right] \right] \quad (20)$$

où $\tilde{\theta}_i = \theta_i - \theta_i^*$, $\tilde{\theta}_{ij} = \theta_{ij} - \theta_{ij}^*$, $w_i = w_i^* - d_i$

Pour garantir que les paramètres d'adaptation θ_i et θ_{ij} soient bornées, nous introduisons l'opérateur de projection [8] dans le processus de contrôle.

Ces paramètres d'adaptation sont choisis comme :

$$\dot{\theta}_i \begin{cases} -\eta_i e_i^T P_i B_i \xi(x) & \text{si } \|\theta_i\| < M_i \text{ ou } L_i > 0 \\ \Pr[-\eta_i e_i^T P_i B_i \xi(x)] & \text{si } \|\theta_i\| = M_i \text{ et } L_i \leq 0 \end{cases} \quad (21)$$

$$\dot{\theta}_{ij} \begin{cases} -\eta_{ij} e_i^T P_i B_i \xi(x) u_i & \text{si } \|\theta_{ij}\| < M_{ij} \text{ ou } L_{ij} > 0 \\ \Pr[-\eta_{ij} e_i^T P_i B_i \xi(x) u_i] & \text{si } \|\theta_{ij}\| = M_{ij} \text{ et } L_{ij} \leq 0 \end{cases} \quad (22)$$

où l'opérateur de projection $\Pr[\cdot]$ est défini par :

$$\Pr[-\eta_i e_i^T P_i B_i \xi(x)] = -\eta_i e_i^T P_i B_i \xi(x) + \frac{\eta_i e_i^T P_i B_i \xi(x) \theta_i^2}{\|\theta_i\|^2} \quad (23)$$

$$\Pr[-\eta_{ij} e_i^T P_i B_i \xi(x) u_i] = -\eta_{ij} e_i^T P_i B_i \xi(x) u_i + \frac{\eta_{ij} e_i^T P_i B_i \xi(x) u_i \theta_{ij}^2}{\|\theta_{ij}\|^2} \quad (24)$$

3.1. Théorème 1

Considérant le système (1) avec la supposition 1. Si les stratégies de commande (11), (21) et (22) sont adoptées, les propriétés suivantes sont garanties :

- Tous les signaux et tous les paramètres estimés sont bornés, c'est à dire $\|\theta_i\| \leq M_i, \|\theta_{ij}\| \leq M_{ij}, x, u_i \in L_\infty$.

- Etant donné un niveau d'atténuation ρ , l'indice de performance proposé dans (3), est satisfait.

Démonstration

Pour montrer que $\|\theta_i\| \leq M_i, \|\theta_{ij}\| \leq M_{ij}$, une démarche semblable à celle exposée dans [9] est adoptée.

Soit la fonction de Lyapunov suivante :

$$V = V_1 + \dots + V_p$$

$$V_i = \frac{1}{2} e_i^T P_i e_i + \frac{1}{2\eta_i} \tilde{\theta}_i^T \tilde{\theta}_i + \sum_{j=1}^p \frac{1}{2\eta_{ij}} \tilde{\theta}_{ij}^T \tilde{\theta}_{ij} \quad (25)$$

En différenciant V et V_i le long de la solution de (24), nous obtenons :

$$\dot{V} = \dot{V}_1 + \dots + \dot{V}_p \quad (26)$$

$$\dot{V}_i = \frac{1}{2} \dot{e}_i^T P_i e_i + \frac{1}{2} e_i^T P_i \dot{e}_i + \frac{1}{\eta_i} \dot{\tilde{\theta}}_i^T \tilde{\theta}_i + \sum_{j=1}^p \frac{1}{\eta_{ij}} \dot{\tilde{\theta}}_{ij}^T \tilde{\theta}_{ij} \quad (27)$$

$$= \frac{1}{2} \left[e_i^T A_i^T P_i e_i - \frac{1}{\lambda_i} e_i^T P_i B_i B_i^T P_i e_i + \xi^T(x) \tilde{\theta}_i B_i^T P_i e_i \right] +$$

$$\frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^p \xi^T(x) \tilde{\theta}_{ij} B_i^T P_i e_i u_i + w_i^T B_i^T P_i e_i + e_i^T P_i A_i e_i \right] +$$

$$\frac{1}{2} \left[-\frac{1}{\lambda_i} e_i^T P_i B_i B_i^T P_i e_i + e_i^T P_i B_i \tilde{\theta}_i^T \xi(x) \right] +$$

$$\frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^p e_i^T P_i B_i \tilde{\theta}_{ij}^T \xi(x) u_i + e_i^T P_i B_i w_i \right] +$$

$$\frac{1}{\eta_i} \dot{\tilde{\theta}}_i^T \tilde{\theta}_i + \sum_{j=1}^p \frac{1}{\eta_{ij}} \dot{\tilde{\theta}}_{ij}^T \tilde{\theta}_{ij}$$

$$= \frac{1}{2} e_i^T \left(P_i A_i + A_i P_i - \frac{2}{\lambda_i} P_i B_i B_i^T P_i \right) e_i +$$

$$\frac{1}{2} \left(w_i^T B_i^T P_i e_i + e_i^T P_i B_i w_i \right) +$$

$$\frac{1}{\eta_i} \left(\eta_i e_i^T P_i B_i \xi^T(x) + \dot{\theta}_i^T \right) \tilde{\theta}_i +$$

$$\sum_{j=1}^p \frac{1}{\eta_{ij}} \left(\eta_{ij} e_i^T P_i B_i \xi^T(x) u_i + \dot{\theta}_{ij}^T \right) \tilde{\theta}_{ij} \quad (28)$$

En utilisant (21) et (22), nous pouvons déduire les inégalités suivantes :

$$\left(\eta_i e_i^T P_i B_i \xi^T(x) + \dot{\theta}_i^T \right) \tilde{\theta}_i \leq 0,$$

$$\left(\eta_{ij} e_i^T P_i B_i \xi^T(x) u_i + \dot{\theta}_{ij}^T \right) \tilde{\theta}_{ij} \leq 0.$$

A partir de ces inégalités et de l'équation de Riccati (13), nous avons

$$\dot{V}_i \leq -\frac{1}{2} e_i^T Q_i e_i + \frac{1}{2} \rho^2 w_i^2 \quad (29)$$

L'intégration de (29) entre $t=0$ et $t=T$ donne

$$\frac{1}{2} \int_0^T e_i^T Q_i e_i dt \leq e_i^T(0) P_i e_i(0) + \theta_i^T(0) \theta_i(0) + \frac{1}{2} \rho^2 \int_0^T w_i^T w_i dt \quad (30)$$

ce qui signifie que l'objectif (ii) du contrôleur est satisfait.

La synthèse de la loi de commande est résumée par l'algorithme suivant :

3.2. Algorithme

A partir de l'analyse précédente, nous pouvons résumer les étapes de conception du contrôleur adaptatif flou par l'algorithme suivant :

Etape 1 : Traitement autonome

- Spécifier les coefficients k_{ij} tels que toutes les racines d'équation (6) soient dans le demi plan gauche.

- Choisir une matrice strictement définie positive Q_i , un niveau d'atténuation désirée ρ et un facteur positif λ_i , avec $2\rho^2 > \lambda_i$, et résoudre l'équation de Riccati (13) pour obtenir une matrice (solution) strictement définie positif P_i .

- Spécifier les paramètres du système M_i, M_{ij} basés sur des contraintes pratiques.

- Choisir les fonctions d'appartenance $\mu^i(x)$ pour $i=1,2,\dots,M$ et calculer les fonctions floues de base [3].

Etape 2 : Adaptation en ligne

- Appliquer la commande en boucle fermée (11) pour le système (2), où μ_{ji} est donné par (12).

- Utiliser les lois d'adaptation (21) et (22) pour ajuster les paramètres θ_i et θ_{ij} .

4. EXEMPLE DE SIMULATION

On considère un bras de robot à deux articulations de masses $m_1 = 5\text{Kg}$ et $m_2 = 2,5\text{Kg}$ et de longueurs $l_1 = l_2 = 0,5\text{m}$ (figure 1) :

Le système peut être décrit par l'équation différentielle suivante :

$$M(\underline{q})\ddot{\underline{q}} + C(\underline{q}, \dot{\underline{q}})\dot{\underline{q}} + G(\underline{q}) = \underline{\Gamma}$$

$$\text{avec } \underline{q} = [q_1, q_2]^T, \quad \dot{\underline{q}} = [\dot{q}_1, \dot{q}_2]^T,$$

$\ddot{\underline{q}} = [\ddot{q}_1, \ddot{q}_2]^T$ sont respectivement la position, la vitesse et l'accélération angulaire.

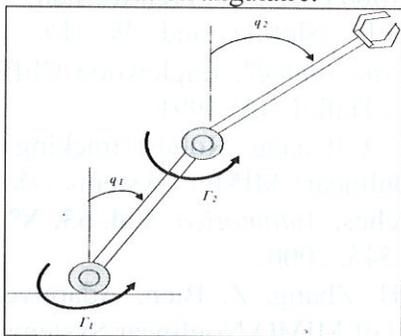


Figure 1. Bras de robot à deux articulations.

$M(\underline{q})$ matrice des moments d'inertie, symétrique et définie positive donnée par :

$$M(\underline{q}) = \begin{bmatrix} (m_1 + m_2)l_1^2 & m_2l_1l_2 \cos(q_1 - q_2) \\ m_2l_1l_2 \cos(q_1 - q_2) & m_2l_2^2 \end{bmatrix}$$

$$C(\underline{q}, \dot{\underline{q}}) = m_2l_1l_2 \sin(q_1 - q_2) \begin{bmatrix} 0 & \dot{q}_2 \\ \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ la matrice de Coriolis}$$

$$G(\underline{q}) = \begin{bmatrix} -(m_1 + m_2)l_1g \sin(q_1) \\ -m_2l_2g \sin(q_2) \end{bmatrix}, \text{ la matrice gravité}$$

$\underline{\Gamma} \in \mathbb{R}^2$ le vecteur des couples.

A partir de l'état initial $x(0) = [1 \ 1 \ 0 \ 0]^T$, le bras doit suivre les trajectoires de référence $\underline{y}_r = [\sin(t) \ \sin(t)]^T$.

Les perturbations sont :

structurelles : $dm_1 = 0,5 \sin(2t) + 0,5 \sin(3t)$ et $dm_2 = 0,25 \sin(2t) + 0,25 \sin(3t)$

externes : $d_1 = d_2 = 0,5 \sin(2t) + 0,5 \sin(3t)$.

Pour la détermination des fonctions $f(x)$ et $G(x)$, on définit cinq ensembles flous sur l'univers de discours $[-1,5 \ 1,5]$, dont les fonctions d'appartenance sont des gaussiennes centrées en $\{-1,5 \ -0,75 \ 0 \ 0,75 \ 1,5\}$ et de variance 0,375.

Les différents paramètres des lois d'adaptation sont: $M_f = 20$, $M_g = 7,75$, $f^M = [12 \ 2]^T$, $\lambda_{\min}(g(x)) = 0,5$ et $\lambda_{\max}(g(x)) = 2,75$.

Les résultats de simulation montrent de bonnes performances de poursuite ainsi que la convergence de l'erreur de poursuite malgré la présence perturbations structurelles et externes (figures 2 et 3). La figure 4 présente les commandes générées pour atteindre l'objectif assigné. Ces commandes ont des amplitudes correctes et présentent des formes lisses facilitant leurs implémentations.

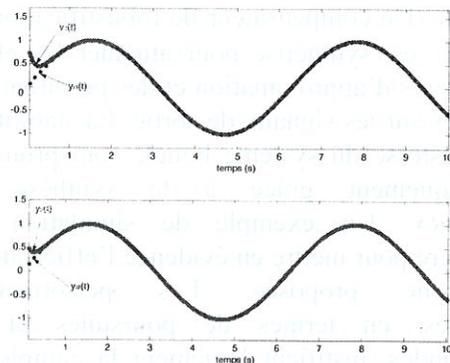


Figure 2. Positions angulaires du robot.

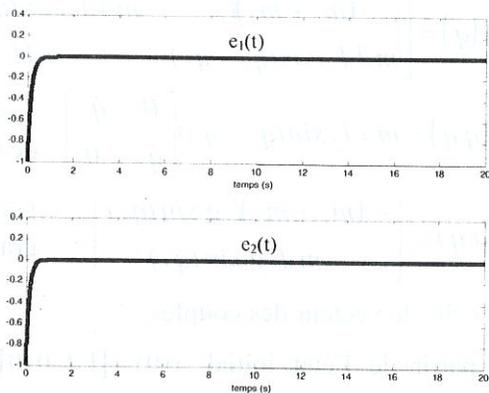


Figure 3. Erreurs de poursuite.

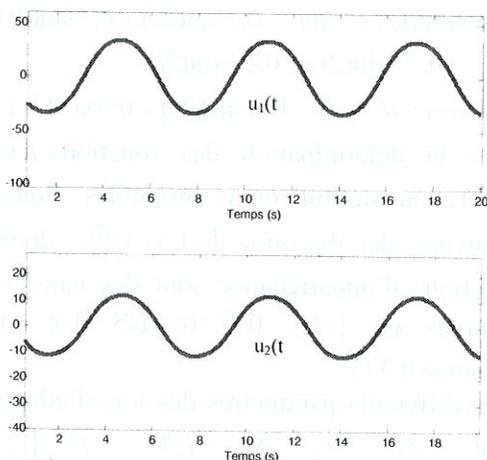


Figure 4. Commandes appliquées au robot.

CONCLUSION

Dans cette approche, un schéma de contrôle pour la synthèse d'une commande adaptative floue robuste, pour une classe de systèmes non linéaires incertains MIMO, est développé. Dans cette conception, les systèmes flous sont utilisés pour approximer les fonctions inconnues représentant la dynamique du système sous contrôle. Un compensateur de robustification de type H^∞ est synthétisé pour atténuer les effets des erreurs d'approximation et des perturbations externes sur les signaux de sortie. La stabilité et la robustesse du système bouclé sont prouvées analytiquement grâce à la synthèse de Lyapunov. Un exemple de simulation est considéré pour mettre en évidence l'efficacité de l'approche proposée. Les performances obtenues, en termes de poursuites et de commandes, justifient largement la complexité des lois de commandes proposées.

REFERENCES

- [1] H.A. Malki, H. Li and G. Chen, New design and stability of fuzzy proportional-derivative control systems, *IEEE Trans. On Fuzzy Syst.*, **Vol. 2**, N° 4, pp. 245-257, 1994.
- [2] C.Y. Su and Y. Stepaneko, Adaptive control of a class of nonlinear systems with fuzzy logic, *IEEE Trans. On Fuzzy Syst.* **Vol. 2**, N° 4, pp. 185-294, 1994.
- [3] L-X. Wang, *Adaptive fuzzy systems and control: design and stability analysis*, Englewood Cliffs, N.J., Prentice Hall, USA, 1997,
- [4] B-S. Chen, C-H. Lee and Y.C. Chang, H^∞ tracking design of uncertain nonlinear SISO systems: Adaptive fuzzy approach, *IEEE Trans. On Fuzzy Syst.*, **Vol. 4**, N° 1, pp. 32-43, 1996.
- [5] H.J. Kang, H. Lee and M. Park, Comments on tracking design of uncertain nonlinear SISO systems: Adaptive approach, *IEEE Trans. On Fuzzy Syst.*, **Vol. 6**, N° 4, pp. 605-606, 1998.
- [6] A. Hamzaoui, J. Zaytoon and A. Elkari, Adaptive fuzzy control for uncertain nonlinear systems, in *Proc. Of IFAC Workshop on Control Applications of Optimization*, pp.137-141, Saint-Petersburg, Russia, 1999.
- [7] A. Isodri, *Nonlinear Control Systems*, Springer, London, 1995.
- [8] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, Englewood cliffs, NJ: prentice-hall, 1996.
- [9] J.E. Slotine and W. Li, *Applied nonlinear control*", Englewood Cliffs, N.J., Prentice Hall, USA, 1991.
- [10] Y. C Chang, Robust tracking control for nonlinear MIMO systems via fuzzy approaches, *Automatica*, **Vol. 63**, N° 10, pp. 1535-1545, 2000.
- [11] H. Zhang, Z. Bien, Adaptive Fuzzy Control of MIMO Nonlinear Systems, *Fuzzy Sets and Systems*, **Vol. 115**, pp. 191-204, 2000.
- [12] S. Tang, J. Tang, T. Wang, Fuzzy adaptive control of multivariable nonlinear systems, *Fuzzy Sets and Systems*, **Vol. 111**, pp. 153-167, 2000.