PROPOSITION D'UNE TECHNIQUE ITERATIVE DE RELAXATION POUR LE COUPLAGE FEM-BEM : APPLICATION EN MECANIQUE DE LA RUPTURE

Boumaiza D., Aour B.
[1]*ENSET d'Oran, Laboratoire de recherche en Technologie de l'Environnement, Département de Mécanique, BP1523 El'Mnaour 31000, Algérie,* bou_daho@hotmail.fr; ben_aour@yahoo.fr

Résumé

Dans cet article une technique de couplage de la méthode des éléments finis (FEM) et la méthode des éléments frontières (BEM) en utilisant une procédure itérative de relaxation à l'interface a été développée. En effet, cette technique conserve la nature des deux méthodes et n'exige aucune modification des matrices produites par ces dernières. En conséquence, il sera plus aisé d'employer différents logiciels sans aucune difficulté. Pour tester la fiabilité et l'efficacité de l'approche proposée, deux problèmes de la mécanique de la rupture ont été analysés. Les facteurs d'intensité de contraintes (FIC) ont été évalués en utilisant les techniques des éléments spéciaux QP (Quarter-point) et d'intégrale J implémentés dans la FEM. La convergence de ces techniques a été également testée en utilisant le couplage itérative FEM-BEM proposé. Les résultats ont montré que la technique de couplage FEM-BEM donne des valeurs stables et plus précises des facteurs d'intensité de contraintes en comparaison avec la FEM.

***Mots-clés** : Couplage FEM-BEM / Eléments finis / Eléments frontières / Mécanique de la rupture.*

Abstract
In this paper a coupling technique of the finite element method (FEM) and the boundary element method (BEM) by using a relaxation iterative procedure at the interface was developed. Indeed, this technique preserves the nature of the two methods and does not require any modification of the matrices produced by these last. Consequently, it will be easier to employ different software packages without any difficulty. To test the reliability and the effectiveness of the proposed approach, two problems of the fracture mechanics were analyzed. The stress intensity factors (SIF) were evaluated by using the techniques of special elements QP (Quarter-point) and integral J implemented in the FEM. The convergence of these techniques were also tested by using the iterative coupling FEM-BEM proposed. The results showed that the coupling technique of FEM-BEM gives stable and more precise values of stress intensity factors in comparison with the FEM.

***Key-words**: Coupling FEM-BEM / Finite element / Boundary elements / Fracture mechanics.*

1. Introduction

Actuellement, plusieurs méthodes de discrétisation sont disponibles aux ingénieurs qui doivent sélectionner la méthode offrant la solution la plus précise, sans dépenser beaucoup d'effort ou de temps. Parmi les méthodes les plus répandues dans l'industrie et la recherche scientifique, la méthode des éléments finis FEM (Finite Element Method) est réellement un outil standard et puissant pour l'analyse de plusieurs types de problèmes de la mécanique des solides, la mécanique des fluides, l'aérodynamique, l'aérospatiale, etc. Cette méthode consiste à discrétiser les équations aux dérivées partielles en équations algébriques, qui sont alors résolues par les méthodes numériques traditionnelles [1]. Elle est bien appropriée pour des problèmes de domaine finis, plaques minces et coques, des matériaux non-homogènes et anisotropes, ainsi que pour des structures de formes arbitraires avec un comportement non linéaire [2].

Une technique alternative, fondée sur la détermination d'une solution dite fondamentale de l'équation aux dérivées partielles considérée, a été utilisée dernièrement avec succès pour surmonter les difficultés rencontrées par l'application de la FEM.

Cette technique, désignée sous le vocable « *méthode des éléments frontières **BEM** (Boundary Element Method)* », est un traitement idéal pour traiter les problèmes de domaine infini et les régions qui présentent des points singuliers et des gradients élevés de contraintes [3]. De plus, elle nous permet de réduire à une dimension le problème traité en discrétisant uniquement le contour du domaine en segments pour les problèmes bidimensionnels, ou en éléments à deux dimensions pour les problèmes tridimensionnels. De ce fait, réside l'avantage principal de cette méthode, puisqu'il y aura moins de coordonnées des nœuds à introduire, moins de degrés de libertés, et par conséquent, une simplification significative de la préparation des données et une économie de mémoire.

En dépit de leurs avantages bien évidents, ces deux méthodes présentent toutefois des aspects négatifs, qui s'expriment, pour celle des éléments finis, par la difficulté de traiter certaines catégories de problèmes dans lesquels les champs mécaniques présentent de fortes singularités, des gradients élevés de contraintes, des domaines infinis ou semi infinis, et l'obligation de discrétisation de toute la structure, qui rend difficile l'application de la méthode surtout dans le cas des problèmes tridimensionnels. En ce qui concerne la méthode des éléments frontières, elle présente comme inconvénients, la difficulté de traiter des problèmes non linéaires et non homogènes, l'obtention d'un système d'équations constitué d'une matrice entièrement pleine et non symétrique. En plus, elle exige des fondements mathématiques relativement difficiles pour l'ingénieur.

Par suite, on peut remarquer que, quand la FEM est forte le BEM est faible et vice-versa. Par conséquent, une approche combinée pourrait être à la fois précise et efficace pour une large classe de problèmes. L'idée de subdiviser le domaine en sous-régions, dans lesquelles la technique la plus appropriée est appliquée, est très intéressante du point de vue conception et exécution, surtout dans le cas où une région locale non homogène ou même non linéaire est entourée par une région infinie ou semi infinie homogène et isotrope. Dans ce cas-ci, la solution fondamentale de la portion infinie ou semi infinie est facile à être résolue par la BEM, tandis que, la FEM est bien adaptée pour la modélisation de la partie non linéaire ou non homogène.

Il est important de noter que le couplage des deux méthodes a été un thème de recherche, d'un grand intérêt pour plus de trois décennies. Le premier travail de Zienkiewicz et al. [4] sur le couplage FEM-BEM, a donné un intérêt spécial à cet axe de recherche. Juste, après la publication de ce papier, plusieurs travaux ont été menés par plusieurs auteurs [5-9]. Une revue approfondie de la littérature sur ce sujet peut être trouvé dans les références [6-8]. Le développement et l'analyse de nouvelles techniques pour le couplage FEM-BEM, a été le sujet d'intérêt progressif, ces dernières années. Il a été intensivement étudié et appliqué à des domaines tels que la mécanique des fluides et des solides, la géo-mécanique, l'électromagnétisme, l'acoustique, etc. [9-12]. Le problème majeur qui a été posé est l'incompatibilité des deux méthodes vu leurs caractères numériques totalement différents avec des variables de base différentes, et donc, ces deux méthodes ne peuvent pas être directement couplées. Par conséquent, plusieurs approches ont été proposées dans la littérature pour contourner correctement ce problème:

(i) *L'approche FE*, où la matrice de rigidité de la FEM est modifiée par incorporation des contributions provenant du système d'équations BEM [8-9].

(ii) *L'approche BE*, où la matrice d'influence de la BEM est modifiée en incluant les contributions de la FEM [5]. Notant que cette approche est rarement utilisée en pratique.

(iii) *L'approche FE-BE*, qui regroupe celles qui ne sont pas inclus dans l'une des deux approches précités [13-15].

Les deux premières approches présentent plusieurs inconvénients, à savoir, l'obtention d'un système d'équations global non symétrique, la complexité de l'algorithme nécessaire pour la création du système d'équations global, la difficulté liée à l'inversion de la matrice, etc. [7]. De plus, ces deux approches empêchent l'utilisateur d'utiliser directement les logiciels commerciaux. Afin de contourner correctement ces difficultés, plusieurs autres approches, qui font partie de la troisième catégorie, ont été développées récemment [10-12]. Parmi lesquelles, la méthode itérative de coulage par décomposition du domaine parait être la plus prometteuse [13]. Cette technique, qui fait l'objet de ce présent travail, consiste à subdiviser le domaine du problème en deux sous domaines qui peuvent être modélisés simultanément par une combinaison de la FEM et la BEM, de telle sorte que les conditions de continuité et d'équilibre soient vérifiées au niveau de l'interface commune. Avec cette procédure, ni la modification des matrices de l'une des deux méthodes, ni la symétrisation ou la différentiation numérique sont nécessaires. De plus, cette technique est optimale du point de vue stockage sur disque puisqu'aucune matrice supplémentaire ne sera générée.

Dans ce qui suit, une présentation détaillée de l'approche itérative pour le couplage FEM-BEM sera discutée dans le second paragraphe. La section 3 est consacrée pour les techniques d'évaluation des facteurs d'intensité de contraintes. Enfin, pour mettre en évidence la fiabilité et l'efficacité de la technique de couplage développée, des applications en mécanique de la rupture seront exposés à la fin de ce travail.

2. Procédure du couplage itératif FEM-BEM

2.1. Position du problème

Nous tenons à signaler que les systèmes d'équations finaux de la FEM et la BEM sont différents. La FEM est régi par un système d'équations liant les déplacements aux forces nodales, alors que, la BEM est conduit par un système d'équations reliant les déplacements et les tractions nodaux. Ceci rend possible de créer facilement un couplage entre les deux méthodes au niveau de l'interface commune. Pour ce fait, nous considérons un problème de valeur frontière d'un milieu continu élastique, homogène et isotrope soumis à des charges externes, comme le montre la Figure 1. Le domaine peut être aisément décomposé en deux sous-domaines. Le premier, noté Ω^{FE} avec une frontière Γ^{FE}, est discrétisé en éléments finis et le second, Ω^{BE} de frontière Γ^{BE}, est discrétisé en éléments frontières.

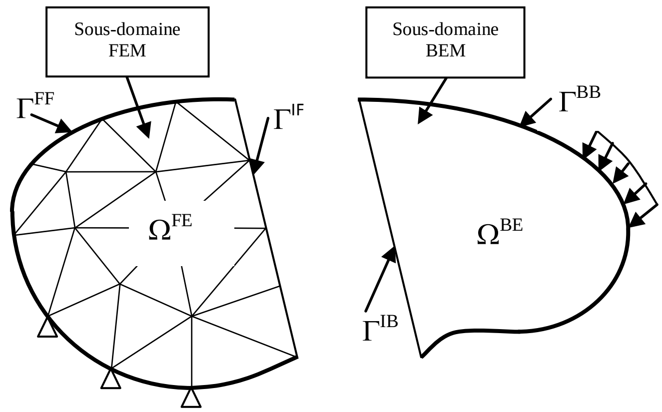
Sans entrer dans les détails des deux méthodes FEM et BEM, les systèmes d'équations finaux d'éléments finis et d'éléments frontières pour les deux sous-domaines, qui sont reliés à travers une interface commune, peuvent être respectivement écrits sous les formes matricielles suivantes [1,5]:

$$[\mathbf{K}]^{FE}\{\mathbf{u}\}^{FE}=\{\mathbf{F}\}^{FE} \qquad (1)$$

pour le sous-domaine FEM, et

$$[\mathbf{H}]^{BE}\{\mathbf{u}\}^{BE}=[\mathbf{G}]^{BE}\{\mathbf{t}\}^{BE} \qquad (2)$$

pour le sous-domaine BEM.



$\Omega = \Omega^{FE} + \Omega^{BE}$, $\Gamma = \Gamma^{FF} + \Gamma^{BB}$, $\Gamma^{FE} = \Gamma^{FF} + \Gamma^{IF}$, $\Gamma^{BE} = \Gamma^{BB} + \Gamma^{IB}$

Fig. 1. Discrétisation d'un corps bidimensionnel avec FEM-BEM.

Dans les équations (1) et (2), $[\mathbf{K}]^{FE}$, $\{\mathbf{u}\}^{FE}$ et $\{\mathbf{F}\}^{FE}$ représentent respectivement la matrice de rigidité, le vecteur des déplacements nodaux et le vecteur des forces nodales pour le sous-domaine FEM, $[\mathbf{H}]^{BE}$ est la matrice des coefficients d'influence liée au vecteur des déplacements $\{\mathbf{u}\}^{BE}$ et $[\mathbf{G}]^{BE}$ représente la matrice des coefficients d'influence liée au vecteur des tractions $\{\mathbf{t}\}^{BE}$ pour le sous-domaine BEM.

2.2. Principe de la technique itérative

Afin de faciliter le développement de l'algorithme itératif, on subdivise tout d'abord le domaine du problème étudié en deux sous-domaines avec un comportement adéquat et solvable en utilisant respectivement dans l'un les éléments finis et dans l'autre les éléments frontières (Fig.1). Une estimation initiale est faite pour les déplacements à l'interface, dans le sous-domaine de BEM, afin d'évaluer les tractions nodales de l'interface. Pour des raisons de commodité, des valeurs nulles peuvent être assignées aux déplacements à l'interface, ce qui représente physiquement une situation fixe de cette dernière. Après la conversion des tractions à des forces nodales équivalentes, ces dernières sont utilisées comme conditions aux limites du sous-domaine FEM pour trouver les déplacements à l'interface. La procédure est alors réitérée avec une relaxation sur les déplacements jusqu'à la convergence de la solution.

Les équations (1) et (2) peuvent être encore subdivisées selon les déplacements qui sont associés et non associés à l'interface comme suit :

$$\begin{bmatrix} K^{FF} & K^{FI} \\ K^{IF} & K^{II} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^{F} \\ u^{IF} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F^{F} \\ F^{IF} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

pour le sous-domaine de FEM.

$$\begin{bmatrix} H^{BB} & H^{BI} \\ H^{IB} & H^{II} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^{B} \\ u^{IB} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G^{BB} & G^{BI} \\ G^{IB} & G^{II} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t^{B} \\ t^{IB} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

pour le sous-domaine de BEM

où les exposants F, B et I représentent respectivement les liaisons avec les éléments finis, les éléments frontières et l'interface FEM/BEM.

Le problème original est rétabli par vérification des conditions de compatibilité des déplacements et d'équilibre des forces au niveau de l'interface commune, c'est-à-dire,

$$\mathbf{u}^{IF} = \mathbf{u}^{IB} \text{ et } \{\mathbf{F}^{IF}\} + [\mathbf{M}]\{\mathbf{t}^{IB}\} = 0 \quad \text{sur } \Gamma^{I} \quad (5)$$

où **M** est la matrice de conversion dépendant des fonctions de forme utilisées au niveau de l'interface.

2.3. Paramètre de relaxation

La convergence optimale de la méthode de couplage itérative est assurée par un paramètre de relaxation judicieusement choisi, ω, qui peut être donné comme une valeur constante pour chaque itération. Lin et al. [14] ont employé une procédure pour déterminer, de façon dynamique, une valeur optimale du paramètre de relaxation pour la méthode de couplage par décomposition du domaine de Dirichlet-Neumann. En exploitant cette idée, la procédure itérative peut être améliorée en admettant la modification dynamique du paramètre de relaxation pour chaque itération. Les tests numériques ont confirmé la nécessité d'utiliser la relaxation lors du transfert des données entre les portions FEM et BEM du modèle. La technique itérative appliquée dans la présente étude est basée sur l'expression suivante :

$$\{\mathbf{u}^{IB}\}_{n+1} = \omega\{\mathbf{u}^{IF}\}_{n} + (1-\omega)\{\mathbf{u}^{IB}\}_{n} \text{ sur } \Gamma^{I} \text{ pour } n \geq 1 \quad (6)$$

où n est le nombre d'itérations, $\{\mathbf{u}^{IF}\}_{n}$ est le vecteur des déplacements d'interface obtenu par la sous-région FEM, $\{\mathbf{u}^{IB}\}_{n}$ est le vecteur des déplacements utilisé dans l'itération précédente et ω est le paramètre de relaxation. Une description détaillée sur le développement mathématique pour la détermination de ce paramètre peut être trouvée dans les Refs. [14,15].

2.4. Algorithme

Les étapes de base de l'algorithme de couplage itératif peuvent être récapitulées comme suit :

1. *Assigner $\{\mathbf{u}^{IB}\}_{0} = \{\bar{\mathbf{u}}\}$ aux déplacements d'interface du sous-domaine BEM, où $\{\bar{\mathbf{u}}\}$ est un vecteur arbitraire connu.*
2. *Appeler le programme **BEMPE** pour calculer les tractions d'interface $\{\mathbf{t}^{IB}\}$, en utilisant l'Eq. (4).*
3. *Appeler le sous-programme **CONVER** pour calculer les forces nodales équivalentes $\{\mathbf{F}^{IB}\}$ le long de l'interface en utilisant l'Eq. (5).*
4. *Utiliser $\{\mathbf{F}^{IF}\} = -\{\mathbf{F}^{IB}\}$ comme conditions aux limites pour le sous-domaine FEM.*
5. *Appeler le programme **FEMFM** pour déterminer les déplacements d'interface en utilisant l'équation (3).*
6. *Vérifier si $\dfrac{\left\|\{\mathbf{u}^{IB}\}_{n+1} - \{\mathbf{u}^{IB}\}_{n}\right\|}{\left\|\{\mathbf{u}^{IB}\}_{n+1}\right\|} \leq \varepsilon$, où ε est une tolérance prédéfinie. Si la condition est vérifiée, stop, sinon, pour la série des itérations suivantes on utilise l'Eq. (6), où ω est un paramètre de relaxation, qui est calculé en utilisant le sous programme **RELAX**.*
7. *Passer à l'étape 2 et ainsi de suite, jusqu'à la convergence de la solution.*

Les fonctions des principaux sous-programmes appelés par le programme principal peuvent se résumer comme suit :

1. **BEMPE** Il permet l'analyse par éléments frontières du sous-domaine BEM. Pour la première itération, il prend comme conditions aux limites à l'interface, les valeurs initiales des déplacements. Pour les itérations suivantes, ces conditions aux limites seront les déplacements calculés par le sous-programme **RELAX** en utilisant la méthode de relaxation.
2. **CONVER** Calcule les forces nodales équivalentes aux tractions à l'interface.
3. **FEMFM** Consiste à déterminer les différentes variables à tous les points nodaux du sous-domaine FEM et à l'évaluation du facteur d'intensité de contrainte.
4. **LOADPE** Ajoute les contributions des forces nodales à l'interface à celle du sous-domaine FEM.

3. Application en mécanique de la rupture

L'existence de fissures, comme des défauts, ne peuvent être omises dans les appareils sous pression et tuyauteries. Par conséquence, la pluridisciplinaires liée aux composants sous pression est d'une importance considérable dans de nombreux secteurs de l'industrie, tels que : l'énergie, la pétrochimie, les processus de transformation, le transport, l'aérospatiale, etc. Afin d'assurer un service dans des conditions sécurisées, il est important de procéder à une évaluation des mécanismes de la mécanique de la rupture. Parmi les modes de cette dernière (I, II et III), le mode I de *paramètre* K_I est le plus important. En effet, K_I caractérise le champ de contrainte au voisinage du fond de fissure quand cette dernière est sollicitée en traction.

Pour des configurations simples de fissuration, des expressions analytiques pour la détermination de K_I sont disponibles dans la littérature. Toutefois, pour des fissures avec des configurations géométriques plus complexes, il n'existe pas des méthodes analytiques. Dans ce cas, le facteur d'intensité de contrainte peut être obtenu par des voies expérimentales, cependant, une telle procédure est coûteuse et nécessite des efforts énormes. Par conséquent, l'utilisation des méthodes numériques pour la détermination *de* K_I s'avère un outil plus économique et plus souple. Dans ce contexte, plusieurs travaux ont été réalisés pour développer des techniques spéciales pour la détermination du facteur d'intensité de contrainte avec plus de précision en utilisant la méthode des éléments finis [16-17].

D'un autre coté, l'examination de la méthode de couplage FEM-BEM pour ce type de problème, présentant une concentration de contrainte dans une zone bien déterminée, parait très intéressante. Dans ce cas, la zone au voisinage de la fissure qui peut avoir un comportement non linéaire est facile à modéliser par la FEM alors que pour le reste du domaine, qui est linéaire, peut être facilement modélisé par les éléments frontières. Il est à noter que, les éléments finis sont utilisés à proximité de la fissure parce que (i) les paramètres de fissuration peuvent être facilement calculés avec précision en utilisant la méthode des éléments finis, même avec un comportement non linéaire et (ii) la formulation des éléments frontière est bien établie pour le comportement linéaire et permet une réduction considérable de la taille du système final d'équations. Dans ce travail on s'intéresse à l'application des techniques les plus couramment utilisés dans la méthode des éléments finis, à savoir les éléments spéciaux QP (quarter-point) et l'intégrales J [18,19].

3.1. Technique d'extrapolation des déplacements (TED)

Le problème de modélisation des singularités en tête de fissure peut être contourné en utilisant des éléments spéciaux au voisinage du fond de fissure qui servent à modéliser directement la singularité $1/\sqrt{r}$, où r est la distance d'un point matériel par rapport à la tête de fissure. Selon Barsoum [16], cette singularité est convenablement introduite dans un élément quadratique isoparamétrique en déplaçant les nœuds médians d'un quart de la longueur de l'élément vers le fond de fissure (Fig. 2).

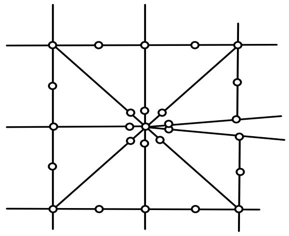


Fig. 2. Illustration des éléments QP pour la modélisation de la singularité.

Dans ce cas, le facteur d'intensité de contrainte peut être déterminé par l'expression suivante [20]:

$$K_I \begin{Bmatrix} (2\kappa-1)\cos\frac{\theta}{2}-\cos\frac{3\theta}{2} \\ (2\kappa+1)\sin\frac{\theta}{2}-\sin\frac{3\theta}{2} \end{Bmatrix} = 4\mu\sqrt{\frac{2\pi}{r}} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (8)$$

dans laquelle, $\kappa=(3-\nu)/(1+\nu)$ en état de contrainte plane, $\kappa=3-4\nu$ en état de déformation plane, μ est le module de cisaillement, r est la distance d'un point quelconque de la structure par rapport au pointe de fissure, θ est l'angle polaire que fait r par rapport à l'axe de la pointe de fissure, u_1 et u_2 sont les composantes de déplacements.

3.2. Technique d'intégrale J (TIJ)

Le facteur d'intensité de contrainte est également lié à une intégrale, appelée intégrale J, indépendante du chemin d'intégration. Pour un contour qui enferme la tête de fissure avec des points initial et final sur les faces opposées de la fissure (Fig. 3), l'intégrale J de Rice [17] est donnée par:

$$J=\int_M\left(Wdy-t_i\frac{\partial u_i}{\partial x_i}d\Gamma\right) \quad (9)$$

où W est la densité d'énergie de déformation, u_i : le vecteur de déplacement et t_i : le vecteur de traction le long de l'arc élémentaire dΓ. L'intégrale J est directement liée au FIC par la relation suivante [20]:

$$K_I=\left(\frac{8\mu J}{1+\kappa}\right)^{1/2} \quad (10)$$

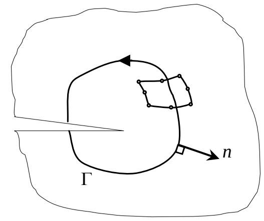


Fig. 3. Illustration du contour d'intégration.

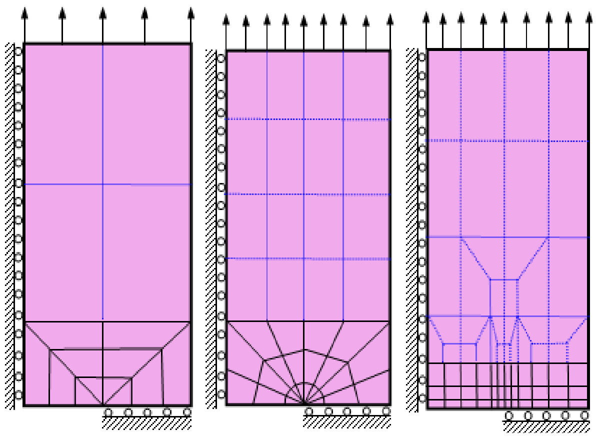
4. Résultats et discussion

Afin de mettre en évidence la fiabilité et l'efficacité de la méthode de couplage FEM-BEM développée, nous présenterons, dans ce qui suit, l'analyse de deux problèmes de la mécanique de la rupture. Le premier porte sur une plaque à fissure centrale (Fig.4a) et le second sur une plaque composée de deux fissures symétriques émanant d'un trou circulaire au centre (Fig.4b). Les deux plaques sont soumises à des charges uniaxiales uniformément réparties. Les propriétés mécaniques et les paramètres géométriques sont (en unités SI): la limite élastique σ_0=100, le module d'élasticité E=10000, le coefficient de Poisson ν=0,3, a=5, H=25, W=10, R=2,5 et l'épaisseur t=1,0.

Fig. 4. Problèmes de fissuration analysés: (a) fissure centrale, (b) fissures émanant d'un trou circulaire.

4.1. Plaque à fissure centrale

Afin de tester la convergence de la technique de couplage, pour l'évaluation des facteurs d'intensité de contrainte, trois différents maillages ont été utilisés comme le montre la figure 5. Le premier maillage (A) est composé de 12 éléments finis (FE) couplés avec 8 éléments frontières (BE), le second maillage (B) est composé de 24FE combinés avec 16BE et le troisième maillage (C) est composé de 36FE en combinaison avec 24BE.



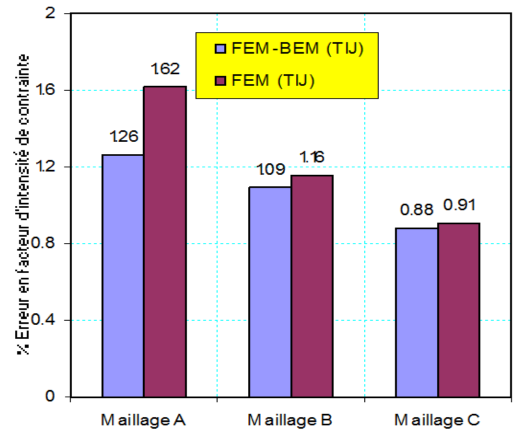
(a) Maillage A (b) Maillage B (c) Maillage C

Fig.5. Différents maillages de la plaque avec fissure centrale.

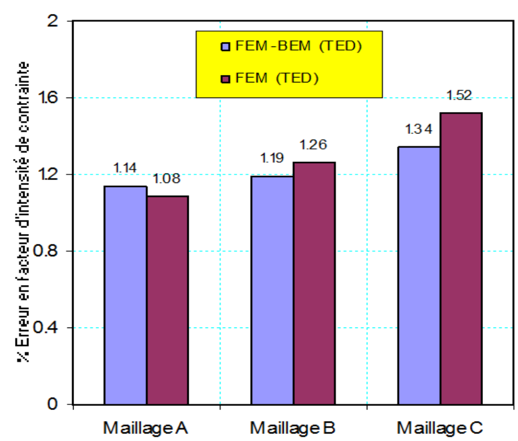
L'analyse par éléments finis a été également réalisée en utilisant trois maillages avec 16, 40 et 70 éléments quadratiques isoparamétriques comme illustre la figure 5. Notant qu'on a veillé à utiliser le même raffinement du maillage de telle sorte qu'on peut faire une comparaison. Les résultats obtenus en utilisant les deux techniques TED et TIJ sont présentés dans le tableau 1, alors que la figure 6 présente les erreurs relatives en % par rapport à la solution analytique donnée par Tada et al. [21]. On peut remarquer que pour les deux méthodes, FEM et FEM-BEM, les meilleurs résultats sont obtenus avec la technique d'intégrale J (TIJ), vue que la solution converge vers la solution exacte en raffinant le maillage. Alors que, dans le cas d'utilisation de la technique d'extrapolation des déplacements (TED) avec des éléments QP, les résultats obtenus semblent relativement instables, étant donné que le raffinement du maillage n'engendre pas forcement la convergence de la solution, en particulier pour ceux obtenus par la FEM en comparaison avec ceux du couplage FEM-BEM.

Evaluation de K_I	**Maillage A**	**Maillage B**	**Maillage C**
FEM-BEM (TED)	463,81	463,56	462,85
FEM (TED)	464,04	463,22	462.01
FEM-BEM (TIJ)	463,23	464,03	465,02
FEM (TIJ)	461,52	463,69	464.87
Sol. Analytique	469,14		

Tableau 1. Valeurs de K_I dans le cas d'une plaque à fissure centrale avec a/W=0.5 en utilisant FEM et FEM-BEM.



(a)

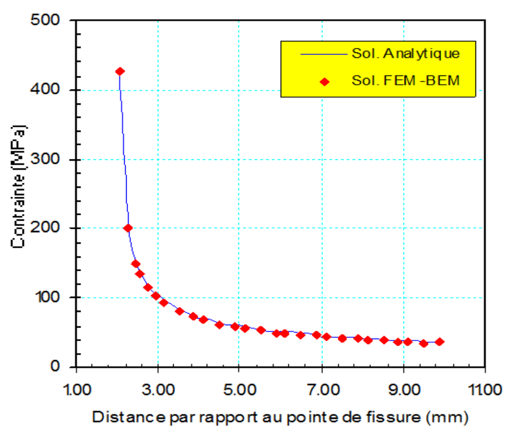


(b)

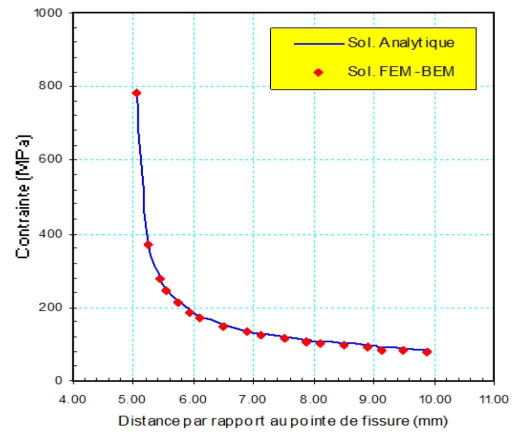
Fig.6. Evaluation de l'erreur dans les calculs du FIC avec (a) TIJ et (b) TED pour a/W = 0.5.

Pour illustrer la performance et mettre en évidence la souplesse de la méthode de couplage FEM-BEM pour l'analyse des problèmes de la mécanique de la rupture, nous avons étudié les distributions des contraintes le long de la distance radiales à (θ = 0) en fonction de la longueur de la fissure (Fig.7) et les variations des FIC (Fig.8) en utilisant la technique d'intégrale J. Pour faciliter la discrétisation du sous domaine FEM en fonction de la variation de la longueur de fissure, nous avons utilisé un maillage de type C (Fig.5c). Avec ces types de maillage, il suffit d'utiliser uniquement deux ou trois rangés d'éléments finis en couplage avec le reste du domaine discrétisé en éléments frontières. Cela représente un avantage indéniable par rapport à la méthode des éléments finis, qui nécessite un maillage suffisamment raffiné et qui conduit donc à une augmentation du nombre d'équations à résoudre. L'utilisation de cette méthode nous permet de raffiner le maillage localement au niveau de la fissure pour augmenter la précision sans toutefois alourdir les calculs, du fait que le raffinement ne concerne qu'une zone très limitée au voisinage de la fissure.

La figure 7 présente une comparaison des résultats obtenus par la technique de couplage FEM-BEM et les solutions analytiques données par Flemming et al. [20] pour deux différentes longueurs relatives de fissure (a/W = 0.2 et 0.5). On peut remarquer qu'il existe un bon accord entre les deux types de résultats.



(a) : a/W = 0,2



(b) : a/W = 0,5

Fig.7. Distributions des contraintes σ_{yy} au voisinage du bout de fissure pour (θ = 0 et r > 0) dans le cas : (a) a/W = 0.2, (b) a/W = 0.5.

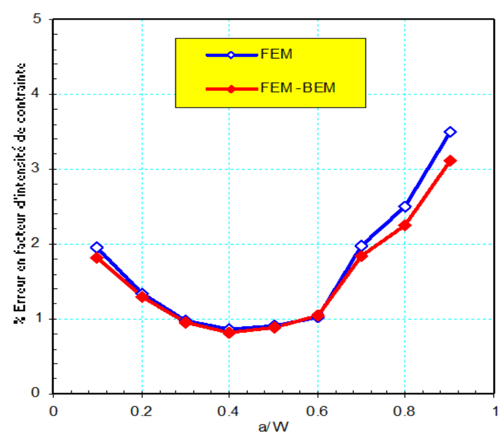
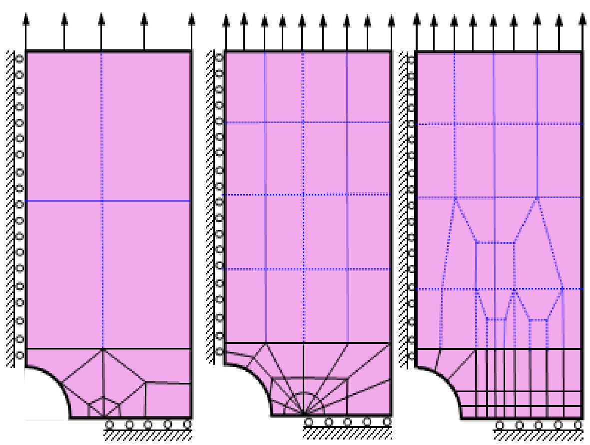


Fig.8. Evolution de l'erreur du FIC en fonction de la longueur de fissure a/W.

La figure 8 illustre la variation des erreurs sur le FIC en fonction de la longueur de fissure. Cette dernière montre que les solutions obtenues par la méthode de couplage FEM-BEM sont en bonne concordance avec celles obtenues par la FEM. On peut remarquer également que les deux méthodes sont en accord acceptable avec la solution analytique donnée par Tada et al. [21] vu que l'erreur maximale ne dépasse pas les 4%.

4.2. Fissures émanant d'un trou circulaire

Afin de confirmer les remarques précédemment évoquées concernant l'évolution des résultats obtenus par FEM et FEM-BEM, en utilisant les techniques TED et TIJ pour l'évaluation de K_I, trois maillages ont été exécutés pour tester la convergence (Fig. 9). Le premier maillage (A) est composé de 11FE en couplage avec 8BE, le second maillage (B) est composé de 25FE combinés avec 16BE et le troisième maillage (C) est composé de 29FE en combinaison avec 22BE. L'analyse par éléments finis a été également conduite en se basant sur des maillages similaires, en utilisant respectivement 15, 41 et 58 éléments quadratiques isoparamétriques comme le montre la figure 9. Les résultats des FICs obtenus sont présentés dans le tableau 2, tandis que les erreurs relatives en % par rapport à la solution donnée par Woo et al. [23] sont illustrées par la figure 10.

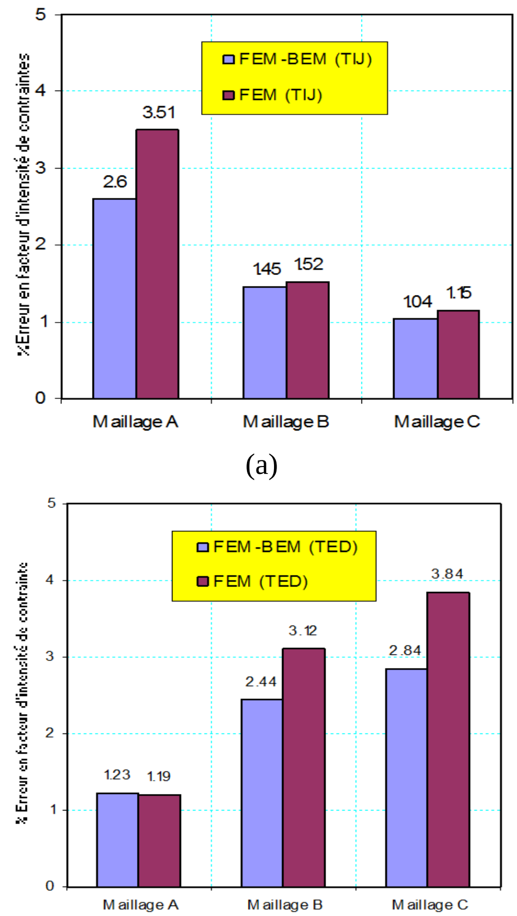


(a) Maillage A (b) Maillage B (c) Maillage C

Fig.9. Différents maillages utilisés pour l'analyse de la plaque avec des fissures émanant d'un trou circulaire au centre.

Evaluation de K_I	Maillage A	Maillage B	Maillage C
FEM-BEM (TED)	503,121	497,133	495,035
FEM (TED)	503,344	493,512	489,845
FEM-BEM (TIJ)	496,139	501,997	504,119
FEM (TIJ)	491,526	501,663	503,547
Ref. [25]	509,406		

Tableau 2. Valeurs de K_I dans le cas d'une plaque avec des fissures émanant d'un trou circulaire au centre (a/W=0.5).



(a)

(b)

Fig. 10. Estimation des erreurs dans les calculs de FIC avec les techniques (a) TIJ et (b) TED pour a/W = 0,5.

On peut remarquer que, les résultats obtenus par la méthode de couplage FEM-BEM en utilisant la technique d'extrapolation des déplacements avec les éléments QP restent toujours instables étant donné que le raffinement du maillage n'engendre pas forcement la convergence de la solution comme dans le cas d'utilisation des éléments standards. De plus, on peut également noter que cette erreur est minimale pour la méthode de couplage FEM-BEM en comparaison avec la FEM. Cette remarque a été même soulevée dans le cas de l'analyse par éléments finis par Portela et Aliabadi [18], Owen et Fawkes [19] et Nguyen et al. [24]. Ces auteurs ont remarqué que la taille de l'élément QP affecte la valeur du facteur d'intensité de contrainte. Les raisons de cette dépendance de dimension sont liées à la nécessité simultanée de reproduire la singularité et les termes de contraintes finies dans un problème donné comme l'a expliqué Harrop [22]. Une technique alternative pour contourner le problème de convergence de l'élément QP est proposée par Nguyen et al. [24] et Gray et al. [25]. Des études plus récentes (Lee et al. [26]) ont proposé de modéliser la zone au voisinage du fond de fissure par des éléments QP en superposition avec le nuage d'éléments finis au fond de fissure (méthode XFEM). Dans le cas du couplage FEM-BEM, cet effet a été limité grâce à l'utilisation d'un maillage très réduit d'éléments finis au voisinage de la fissure, et par suite, son effet sur les résultats obtenus a été également réduit en comparaison avec le FEM.

5. Conclusion

Le couplage FEM-BEM a fait l'objet de nombreuses investigations et plusieurs approches ont été proposées dans la littérature. L'originalité de ce travail repose sur le développement d'une technique itérative facile à manipuler et permettant un couplage rapide et efficace entre la FEM et la BEM. Cette technique est basée sur le principe de relaxation dynamique qui nous permet d'accélérer la convergence à l'interface commune des deux sous domaine FEM et BEM. L'intérêt majeur de cette procédure est que tous les programmes d'éléments finis et d'éléments frontières peuvent être facilement couplés sans faire appel à aucune modification dans les programmes sources. La robustesse de cette méthode de couplage a été confirmée par le traitement de deux problèmes de mécanique de la rupture. Les résultats obtenus par la technique de couplage FEM-BEM sont en très bon accord avec ceux de la FEM. Enfin, on peut conclure que la méthode de couplage FEM-BEM proposée est une approche extrêmement puissante et souple pour l'analyse d'une grande variété de problèmes de la mécanique des milieux continus, vu qu'elle conserve les avantages des deux méthodes et réduire simultanément leurs inconvénients.

Références

[1] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, The finite element method, 4th Ed. McGraw-Hill, London 1991.

[2] T. Krishnamurthy, I.S. Raju, R. Sistla, Coupling finite and boundary element methods for 2-D elasticity problems, The 34th Struct. Dyn. Mater. Conf., Lajolla, April 19-22, USA, 1993.

[3] C.A. Brebbia, J. Dominguez, Boundary elements: An introductory course, 2nd Ed. Computational Mechanics Publications, John Wiley & Sons, 1992.

[4] O.C. Zienkiewicz, D.W. Kelly, P. Battes, The coupling of the finite element method and boundary solutions procedures, Int. J. Numer. Meth. Eng. 11, (1977) 355-375.

[5] C.A. Brebbia, P.Georgiou, Combination of boundary and finite elements in elastostatics, Appl. Math. Model. 3 (1979) 212-220.

[6] H.B. Li, G.M. Han, H.A. Mang, P. Torzicky, A new method for the coupling of finite element and boundary element discretized subdomains of elastic bodies, Comput. Meth. Appl. Mech.Eng. 54 (1986) 161-185.

[7] R.A. Bialecki, Z. Ostrowski, A.J. Kassab, Q. Yin, E. Scuibba, Coupling BEM-FEM and analytic solutions in steady-state potential problems, Eng. Anal. Bound. Elem. 26 (2002), 597-611.

[8] S. Ganguly, J.B. Layton, C. Balakrishna, A coupling of multi-zone curved Galerkin BEM with finite elements for independently modelled sub-domains with non-matching nodes in elasticity, Int. J. Numer. Meth. Eng. 59 (2004) 1021-1038.

[9] B. Aour, O. Rahmani, M. Nait-Abdelaziz, A coupled FEM/BEM approach and its accuracy for solving crack problems in fracture mechanics. Int. J. Solids Struct. 44 (2007) 2523-2539.

[10] A. Zaghdani, C. Daveau, On the coupling of LDG-FEM and BEM methods for the three dimensional magnetostatic problem, App. Math. Comput. 217 (2010) 1791-1810.

[11] A. Seghir, A. Tahakourt, G. Bonnet, Coupling FEM and symmetric BEM for dynamic interaction of dam-reservoir systems. Eng. Anal. Bound. Elem. 33 (2009) 1201-1210.

[12] G.N. Gatica, A. Marquez, S. Meddahi, Analysis of the coupling of BEM, FEM and mixed-FEM for two-dimensional fluid-solid interaction problem. Appl. Numer. Math. 59 (2009) 2735-2750.

[13] W.M. Elleithy, R. Grzibovskis, An adaptative domain decomposition coupled finite element - boundary element method for solving problems in elasto-plasticity, Int. J. Num. Meth. Eng. 79 (2009), 1019-1040.

[14] C.C. Lin, E.C. Lawton, J.A. Caliendo, An iterative finite element-boundary element algorithm, Comput. Struct. 59 (1996) 899-909.
[15] B. Aour, Investigation of ECAE process of semicrystalline polymers by a finite element and a coupled boundary element-finite element approach, Doctorate thesis, UST Oran, 2007.
[16] R.S. Barsoum, On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics, Int. J. Num. Meth. Engng. 10 (1976) 25-37.
[17] J.R. Rice, A path-independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks, Trans. ASME J. Appl. Mech. 35 (1974) 485-502.
[18] A. Portela, M.H. Aliabadi, On the accuracy of boundary and finite element techniques for crack problems in fracture mechanics, Advances in Boundary Elements, Vol.1: Computations and Fundamentals, Editors: C.A. Brebbia and J.J. Connor, Computational Mechanics Publications, Southampton, 1989.
[19] D.R.J. Owen, A.J. Fawkes, Engineering fracture mechanics, Pineridge Press LTD Swansea,1983.
[20] M. Fleming, Y. Chu, B. Moran, T. Belytschko, Enriched element-free Galerkin methods for crack tip fields, Int. J. Num. Meth. Engng., 40 (1997) 1484-1504.
[21] H. Tada, P.C. Paris, G.R. Irwin, Stress analysis of cracks handbook, Del Research Corporation, Hellertown, USA, 1973.
[22] L.P. Harrop, The optimum size of quarter-point crack tip elements, Int. J. Num. Meth. Engng. (1982) 1101-1103.
[23] C. Woo, Y. Wang, Y. Cheung, The mixed mode problems for the cracks emanating from a circular hole in finite plate, Eng. Fract. Mech. 32 (1989) 279-288.
[24] D.H. Nguyen, G.D. Saxce, C.H. Kang, The computation of 2-D stress intensity factors using hybrid mongrel displacement finite elements, Eng. Fract. Mech. 38 (1991) 197-205.
[25] L.J. Gray, A.V. Phan, G.H. Paulino, T. Kaplan, Improved quater-point crack tip element, Eng. Frac. Mec. 70 (2003) 269-283.
[26] S.H. Lee, J.H. Song, Y.C. Yoon, G. Zi, T. Belytschko, Combined extended and superimposed finite element method for cracks, Int. J. Num. Meth. Engng. 59, (2004) 119-1136.