

MODELISATION DU COMPORTEMENT NON LINEAIRE DES STRUCTURES EN BETON ARME

Reçu le 05/05/2002 – Accepté le 14/07/2003

Résumé

Une contribution d'analyse bidimensionnelle par éléments finis du comportement non linéaire des structures en béton armé sous un chargement monotone est présentée. La non-linéarité matérielle est décrite par plusieurs phénomènes tels que: la non-linéarité physique des matériaux béton et acier, le comportement du béton fissuré et l'effet d'interaction entre les matériaux représenté par l'option tension-stiffening et le transfert de cisaillement à travers les fissures. Ces paramètres sont pris en considération dans l'élaboration d'un programme numérique d'analyse du comportement non linéaire des structures pour examiner la réponse des poutres en béton armé.

Les résultats numériques obtenus par les modèles utilisés, élastoplastique et élastique-endommageable, sont en concordance favorable avec ceux obtenus par l'expérience.

Mots clés: modélisation; comportement non linéaire; éléments finis; plasticité; fissuration; béton armé; interaction béton-acier; élastoplasticité; endommagement.

Abstract

A contribution of bi-dimensional finite elements analysis of non-linear behaviour of reinforced concrete structures under monotonic loading is presented. The nonlinearity material is described by several phenomena such as materials non-linearity of concrete and steel, the behaviour of cracked concrete and the interaction effect between materials by tension-stiffening option and shear transfer by cracks.

These parameters are taken into consideration to elaborate a finite element program for the analysis of the nonlinear behaviour of structures to investigate the response of RC beams.

The numerical results obtained with used models: elastoplastic and damaged elastic are in a good agreement with the available experimental data.

Keywords: modelling; non linear behaviour; finite elements; plasticity; cracking; reinforced concrete; interaction concrete-steel; elastoplasticity; damage.

S. KHALFALLAH

Centre universitaire
B.P 98 Ouled Aissa
18000 Jijel, Algérie

A. CHARIF

King Saud University
Riyadh
Arabie Saoudite

ملخص

يعرض هذا المقال تحليل السلوك غير خطي لهياكل الإسمنت المسلح باستعمال نظرية العناصر المتناهية. إن السلوك الغير خطي يوصف بواسطة عدة ظواهر منها: السلوك المادي الفيزيائي للمواد المستعملة، سلوك الإسمنت المتشقق، اثر الارتباط بين المواد ممثلا بواسطة الاختصاص (Tension-stiffening) وانتقال إجهادات القص المماسية.

هذه العوامل ذات السلوك الغير خطي اخذت بعين الاعتبار خلال إنجاز برنامج عددي خصص لتحليل السلوك الغير خطي للهياكل وذلك من خلال فحص سلوك عارضات بالإسمنت المسلح.

إن النتائج المحصل عليها بواسطة نموذج اللدانة ونموذج تقارن المرونة بالضرر تظهر التطابق الجيد مع نتائج الأعمال التجريبية.

الكلمات المفتاحية: نمذجة، سلوك لاخطي، عناصر منتهية، لدانة، تشقق، إسمنت المسلح، تباطؤ إسمنت- فولاذ التسليح، تصدع.

Les structures en béton armé, telles que : poutres, poteaux, dalles et murs sont les plus utilisées dans le domaine des constructions civiles et industrielles. La méthode des éléments finis [1] a connu un développement considérable dans l'analyse des structures complexes. Sa première utilisation, avec une approche linéaire, à l'analyse des poutres en béton armé revient à Ngo et Scordolis [2], alors que sa première utilisation dans l'analyse non linéaire, a été présentée par Nilson [3]. Depuis cette date, plusieurs recherches avancées dans le domaine d'analyse des structures par éléments finis des structures en béton armé ont été publiées [4,5,6].

L'analyse des structures en béton armé est une tâche très complexe. Plusieurs facteurs la compliquent, tenant compte du comportement non linéaire des matériaux, la modélisation du comportement du béton fissuré et sa contribution après sa fissuration, le problème de la modélisation de l'interaction béton-acier (adhérence) et l'effet d'écrouissage du béton et des aciers. Ces facteurs sont incorporés à l'élaboration d'un programme SCNL^(*) d'analyse des structures en béton armé.

Dans cette étude, on considère les modèles élastoplastique et élastique-endommageable, qui sont implantés dans le programme de calcul. En plus de la réponse non linéaire matérielle, la fissuration du béton est aussi un paramètre essentiel de la non-linéarité matérielle. Dans ce souci, le modèle de fissuration répartie est utilisé. Cette approche a été utilisée pour la première fois par Rashid [7], dans laquelle le béton fissuré est modélisé par le changement de la loi constitutive du béton [8].

Dans la modélisation du béton fissuré, le problème de la prise en compte de l'effet d'interaction entre le béton endommagé et les armatures est posé en introduisant un facteur de transfert de cisaillement. Cervenka [9], Suzuki et Chen [10] et Leibengood *et al.* [11] ont négligé sa valeur tandis que Lin et Scordolis [12] ont attribué à ce facteur une valeur unitaire à l'analyse des dalles et coques. Une valeur intermédiaire a été adoptée par Suidan et Schnobrich [13], Reynouard [14], Lemaire [15] et Gilbert et Warner [16]. D'autres chercheurs ont pris des valeurs décroissantes, linéaires ou hyperboliques, en fonction de la déformation normale à la fissure, exprimant la dégradation progressive de l'engrènement [17, 18,19].

Enfin, les phénomènes tels que les lois non linéaires des matériaux, la tension-stiffening, le béton fissuré, l'écroutissement du béton et de l'acier, ont été pris en compte dans l'élaboration de notre programme, conduisant à une bonne concordance des résultats numériques obtenus avec les exemples testés en [20, 21].

1. MODELISATION DES MATERIAUX

1.1. Modélisation du béton

Le comportement mécanique considéré du béton (modèle constitutif) est élastoplastique en compression biaxiale et en traction-compression; il est supposé linéaire en traction biaxiale (Fig. 1).

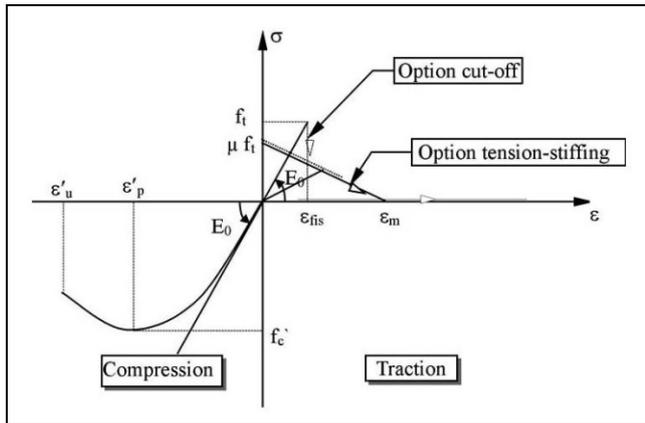


Figure 1: Modèle constitutif du béton.

Les paramètres de la figure 1 sont définis de la façon suivante : f_t, f_c' : résistance du béton respectivement à la traction et à la compression simple. $\varepsilon_{fis}, \varepsilon_m$: respectivement déformation de fissuration et déformation correspondant à $\sigma=0$. $\varepsilon_p', \varepsilon_u'$: respectivement les déformations maximale et ultime à la compression. E_0 : module d'élasticité initial. La loi de comportement citée (Fig.1) est insuffisante pour définir le modèle incrémental du béton ; il est donc nécessaire de présenter un critère de résistance ou de rupture. Ce critère est défini par une fonction F dans l'espace des contraintes. La surface limite (surface de charge initiale), correspondant à l'apparition des premières déformations permanentes, est définie par la fonction :

$$F(\sigma_{ij}) = 0 \quad (1)$$

Parmi les critères de rupture du béton présentés dans la littérature, citons Ottesen [22], Podgorski [23], Menetrey [24] et He *et al.* [25], dont la majorité sont des dérivés des critères classiques de Von Mises et Tresca développés pour les métaux.

Le critère de rupture utilisé est défini par l'expression linéaire suivante [27] :

$$\tau_{oct} + a \sigma_{oct} + b = 0 \quad (2)$$

où a, b sont des constantes qui dépendent de f_t, f_c' et f'_{cb} (f'_{cb} : résistance du béton à la compression biaxiale), τ_{oct}, σ_{oct} sont les contraintes tangentielle et normale octaédriques.

La loi incrémentale du béton, supposé isotrope, est élastique linéaire:

$$\Delta\sigma_{ij} = C_{ijkl} \Delta\varepsilon_{kl} \quad (3)$$

C_{ijkl} est la matrice d'élasticité, $\Delta\sigma_{ij}, \Delta\varepsilon_{kl}$ sont les vecteurs des incréments de contraintes et de déformations.

La charge appliquée est monotone, l'état de contraintes atteint la surface d'écoulement actuel. Le comportement du béton devient ainsi élastoplastique et des déformations permanentes apparaissent. Lorsque l'écroutissement isotrope se produit, la surface de charge (écoulement) change de position.

$$f(\sigma_{ij}, \varepsilon^p_{kl}, k) = 0. \quad (4)$$

k est un paramètre caractérisant l'écroutissement et ε^p_{kl} est la déformation plastique (permanente).

Puisque le matériau obéit à la loi de plasticité (plasticité associée), nous pouvons décomposer la déformation totale en une déformation élastique et une autre plastique:

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad (5)$$

L'accroissement de contraintes est lié à l'accroissement de déformations par :

$$\Delta\sigma = C^{ep} \Delta\varepsilon \quad (6)$$

$$\text{avec} \quad C^{ep} = C^e - \frac{C^e F' F'^T C^e}{-A + F'^T C^e F'} \quad (7)$$

où

$$F' = \left\{ \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right\}$$

A est un paramètre (module) d'écroutissement ; il est nul si le comportement est élastique ou parfaitement plastique; C^{ep} est la matrice élastoplastique du béton.

Béton fissuré

Lorsque le critère de rupture atteint un état de contraintes de traction σ_{ij} , le béton se fissure perpendiculairement à la direction principale maximale de traction. Après fissuration, le béton ne transmet plus de contraintes dans la direction de la contrainte maximale de traction, et le comportement devient donc uniaxial. Suzuki et Chen [21] considèrent que le comportement du béton fissuré est élastique linéaire en compression simple dans la direction de la fissure, alors que Reynouard [25] et Lemaire [26] supposent plutôt une loi parabole rectangle. Dans un repère lié à la fissure, le comportement béton est supposé orthotrope:

$$\Delta\sigma = C_1 \Delta\varepsilon \quad (8)$$

$$\text{où} \quad [C_1] = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & E^* & 0 \\ 0 & 0 & \beta G \end{bmatrix} \quad (9)$$

E est le module d'élasticité liant les accroissements des contraintes et des déformations, E^* est le module d'élasticité du béton après fissuration suivant la direction de la contrainte maximale de traction, G est le module de l'élasticité transversal et β est le coefficient de transmission du cisaillement à travers les fissures.

Les deux types de comportement du béton fissuré (type cut-off et type tension-stiffening) sont considérés.

a. Option CUT-OFF

Le comportement du béton fissuré est de type cut-off si la contrainte maximale de traction chute à zéro dès que le critère de fissuration est atteint (Fig.2).

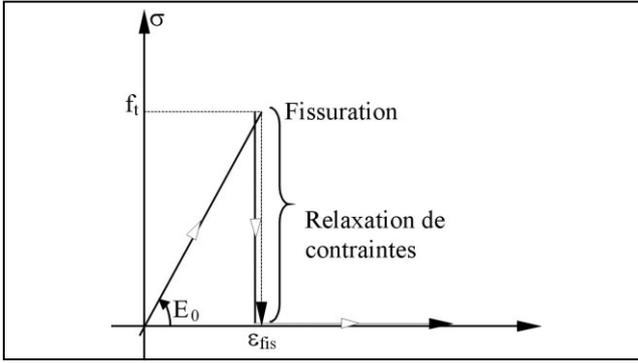


Figure 2: Comportement post fissuration de type cut-off.

La contrainte de fissuration se transforme en forces internes :

$$\{F_i\} = \int_v [B]^T \{\sigma_{fis}\} dv \quad (10)$$

où $\{\sigma_{fis}\}$ est le vecteur de contraintes qui provoque la fissuration et $\{F_i\}$ est le vecteur de forces internes. $[B]$ est la matrice géométrique liant le champ des déformations à celui des déplacements nodaux, dv est l'élément de volume. Après fissuration, on observe une variation subite des contraintes et des déplacements comme l'illustre la figure 3.

On suppose une fissuration suivant une direction (Fig.4); le béton fissuré ne transmet plus de contraintes dans la direction normale à la fissure et son comportement

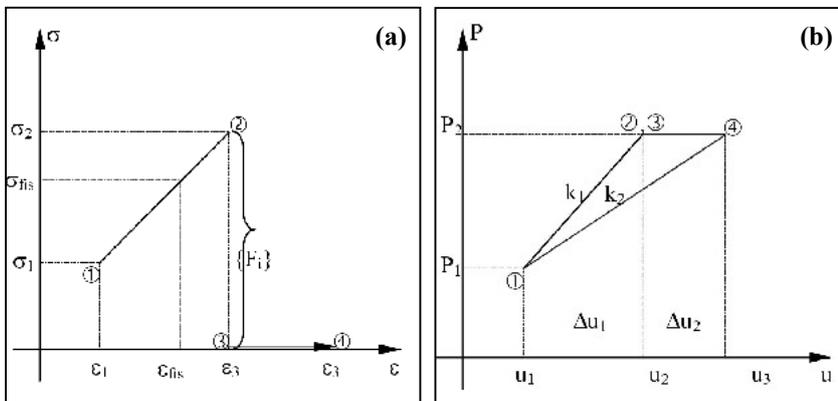


Figure 3: Formation des fissures. (a) Diagramme Contrainte-Déformation; (b) Diagramme Charge-Déplacement.

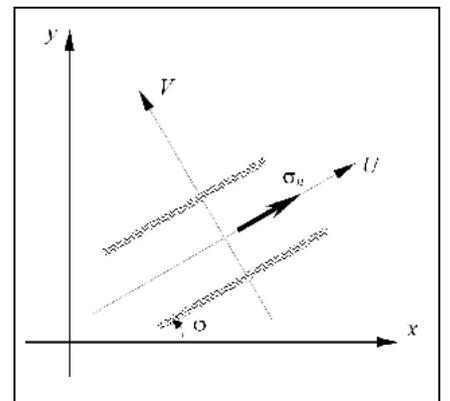


Figure 4: Fissuration suivant une direction.

devient uniaxial suivant la direction de la fissure.

La matrice d'élasticité $[C_1]$ devient :

$$[C_1] = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta G \end{bmatrix} \quad (11)$$

L'accroissement de contraintes est :

$$\Delta\sigma = [L]^{-1} [C_1] [L]^{-1T} \Delta\varepsilon \quad (12)$$

La matrice de rotation est:

$$[L] = \begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \sin^2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & \sin 2\alpha \\ -\sin 2\alpha/2 & \sin 2\alpha/2 & \cos 2\alpha \end{bmatrix} \quad (13)$$

b. Option tension-stiffening

Le terme tension-stiffening est utilisé pour représenter l'effet d'interaction béton-acier à la formation de la première fissure. Cet effet, introduit en analyse par éléments finis par Scalan *et al.* [28], est illustré sur la figure 5. Nous introduisons dans la matrice $[C_1]$ un terme supplémentaire E_{ts} correspondant au module tangent après fissuration:

$$[C_1] = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & E_{ts} & 0 \\ 0 & 0 & \beta G \end{bmatrix} \quad (14)$$

et

$$\Delta\sigma = [L]^{-1} [C_1] [L]^{-1T} \Delta\varepsilon \quad (15)$$

E_{ts} est la pente de la droite proposée par Owen *et al.* [29].

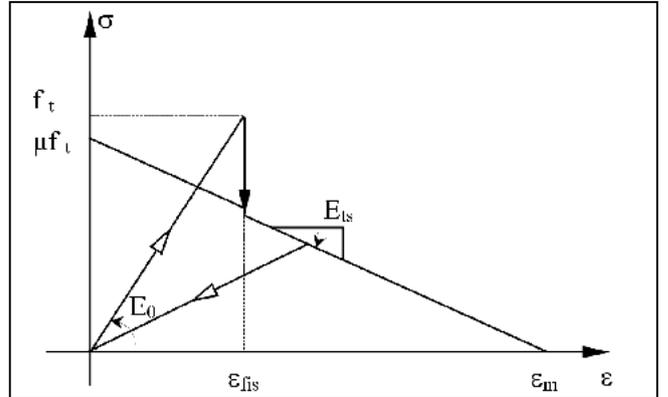


Figure 5: Comportement du béton post fissuration de type tension-stiffening

D'après [20], on a généralement: $\mu=0,80$ et $\varepsilon_m=0,001$.

Si le béton est complètement fissuré, la contrainte de cisaillement transférée par les fissures est nulle; on obtient :

$$\Delta\sigma = [L]^{-1} [C_1] [L]^{-1T} \Delta\varepsilon \quad (16)$$

Dans ce cas, la matrice $[C_1]$ devient :

$$[C_1] = \begin{bmatrix} E_{ts1} & 0 & 0 \\ 0 & E_{ts2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

1.2- Modélisation des armatures

La figure 6 montre la loi contrainte-déformation des armatures de renforcement. Ces armatures peuvent être représentées de manière répartie ou discrète. Dans la représentation discrète, la rigidité axiale est suivant la direction des éléments barres. Elle est orientée selon la direction des armatures qui traversent les éléments membranaires dans la représentation répartie. Les lois constitutives des aciers considérées sont élastoplastiques parfaites ou à écrouissage.

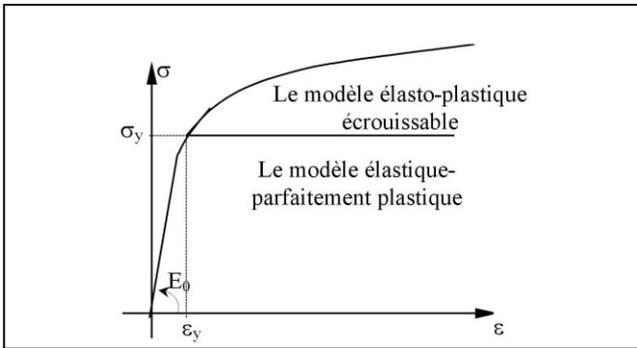


Figure 6: Modèles constitutifs des aciers.

La matrice de rigidité globale du matériau mixte est:

$$C = C_B + C_A \quad (18)$$

C_B , C_A : Matrices d'élasticité respectivement du béton et des aciers.

De l'équation 3 ou 7 : $C_B \equiv C^e \equiv C^{ep}$ (19)

$$C_A \equiv [C_A] = \begin{bmatrix} E_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

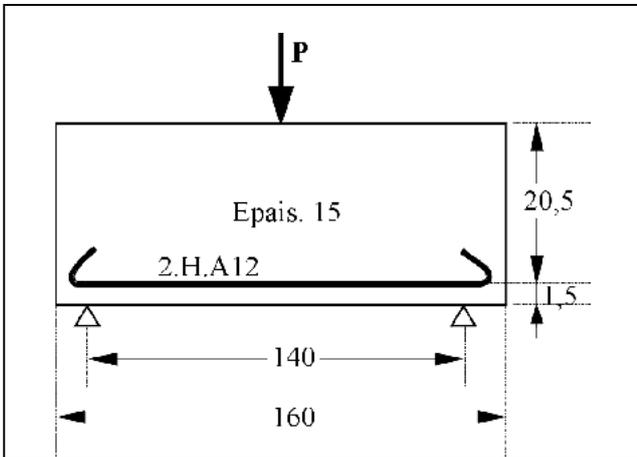


Figure 7: Poutre flexion 3 points.

2- EXEMPLES NUMERIQUES

La validité du programme d'analyse par éléments finis du comportement non linéaire des structures en béton armé, doit être confirmée par les résultats de tests expérimentaux. Dans ce cadre, nous illustrons la validation et les effets de certains paramètres sur les exemples suivants.

Le premier exemple (Fig.7) reprend les mêmes données d'une poutre en béton armé étudiée par Mazars [21].

2. 1- Données mécaniques et géométriques

Béton

- Module d'élasticité initial: 30000 MPa
- Coefficient de Poisson: 0,20
- Contrainte limite en compression : 32,50 MPa
- Contrainte limite en traction: 3,45 MPa (poutre armée) et 2,50 MPa (poutre non armée)

Armatures

- Module de Young : 210000 Mpa
- Limite d'élasticité conventionnelle: 348 MPa
- Le ferrailage: 2 barres de haute résistance de T12.

2.2. Maillage utilisé

Trois maillages (avec des éléments membranaires à 4 nœuds et barres à 2 nœuds) sont utilisés, et ce, pour mettre en évidence l'effet de la discrétisation de la structure sur le comportement global ($\lambda-U$) (Fig.8).

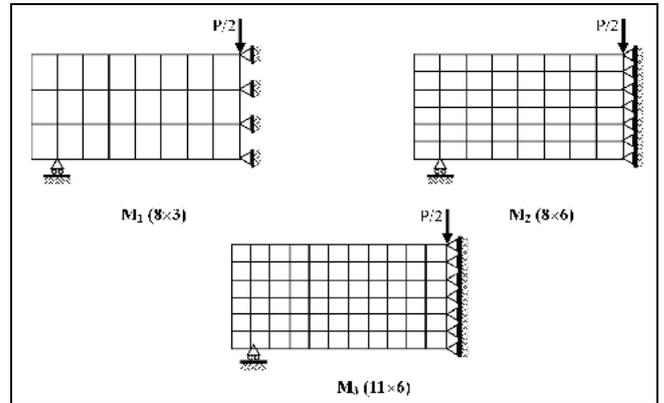


Figure 8: Maillages utilisés.

2.3- Résultats

2.3.1. Modèle élastique-endommageable

2.3.1.1. Influence de la discrétisation géométrique

Une bonne concordance entre les résultats numériques et expérimentaux est observée (Fig.9).

On constate que le nombre d'éléments utilisés n'a pas d'influence considérable [passage de M_1 (48 éléments) au M_3 (132 éléments)]. De plus, on ne constate pas de divergence des résultats avec des maillages fins.

2.3.1.2. Charge de fissuration

Les exemples expérimentaux [21] ont montré que la formation de la première fissure se produit à une charge égale environ à 17 kN et 9,80 kN respectivement pour une poutre armée et non armée. La valeur de la charge théorique obtenue pour les trois maillages est presque la même, de

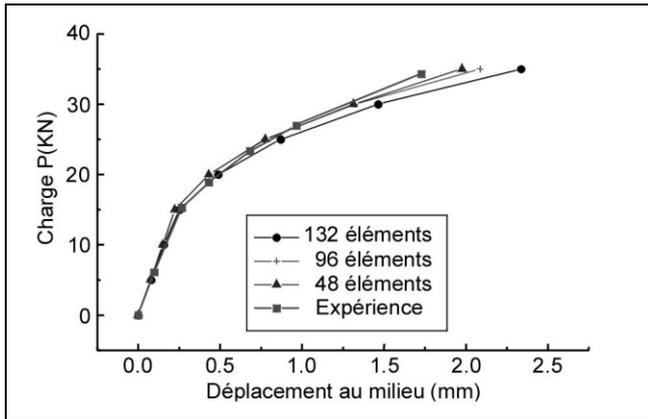


Figure 9: Effet de découpage de la structure.

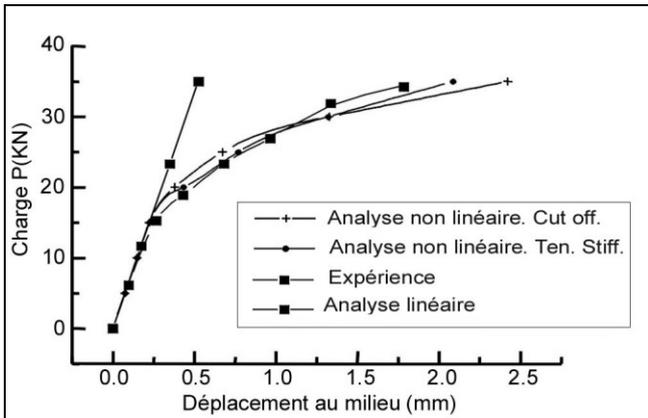


Figure 10: Effet de la non linéarité physique.

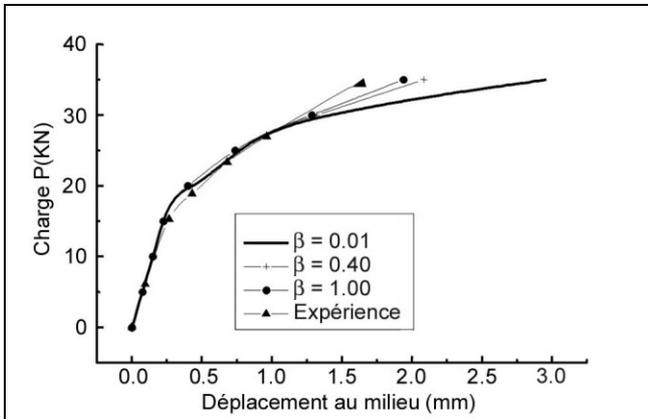


Figure 11: Effet du facteur de transfert de cisaillement.

l'ordre de 15,5 kN et 10,1 kN, en utilisant le modèle élastique-endommageable avec 2×2 points d'intégration de Gauss.

2.3.1.3. Influence des paramètres physiques et numériques

On a étudié l'influence des paramètres introduits dans le programme (SCNL), en utilisant le maillage M2 pris comme exemple de référence.

a. Effet de la non-linéarité matérielle

On constate aisément sur la figure 10 que l'analyse non linéaire reproduit fidèlement le comportement expérimental.

b. Influence du facteur de transfert de cisaillement

Nous voulons présenter l'effet du facteur de transfert de cisaillement β en considérant trois valeurs différentes :

$$\beta = 0.0, \beta = 0.4, \beta = 1.0.$$

Selon la figure 11, le paramètre β , lors d'une analyse statique, ne semble pas avoir une influence notable sur la réponse, conclusion également confirmée par d'autres chercheurs [20,31,32].

c. Comportement du béton fissuré; effet de tension-stiffening

Dans ce cadre, on a effectué deux calculs différents avec prise en compte de l'option tension-stiffening ou cut-off (Fig.12).

Il n'y a pas de différence appréciable entre les deux modèles (fig.12) modèle de tension-stiffening et celui de cut-off. Les résultats sont confirmés par [20, 31].

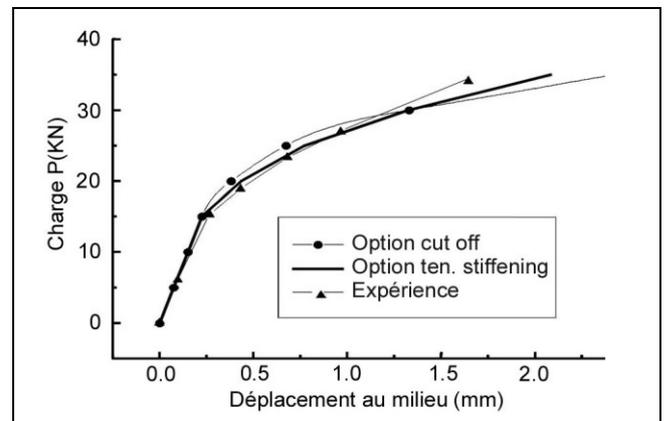


Figure 12: Effet du comportement du béton fissuré.

2.3.2. Modèle élastoplastique

Pour présenter la performance de l'algorithme du modèle élastoplastique, le comportement global des poutres en béton armé, testées par Pera et Tuset d'après Merabet [20] a été étudié. Le premier exemple est une poutre en béton sur-armée à fort pourcentage mécanique (6.35%) afin que le comportement des aciers reste dans le domaine élastique lorsque survient la ruine par épuisement du béton (Fig. 13-14).

Les résultats théoriques semblent en bon accord avec les données expérimentales. La valeur théorique de la charge de ruine ($P = 400$ KN), est 2.50 % plus bas que la valeur expérimentale évaluée à 410 KN. La rupture du béton est brutale et intervient par écrasement du béton comprimé au voisinage du point d'application de la charge extérieure.

Le deuxième exemple est une poutre sous-armée à faible pourcentage mécanique (1.79%) présentant un comportement élastoplastique des aciers. Dans ce cas, la rupture est moins brutale que la poutre sur-armée et les flèches maximales sont plus importantes (Fig.15).

D'une manière générale, la réponse globale d'une poutre à faible pourcentage mécanique est correctement simulée. La charge de ruine est évaluée à 240 KN, soit environ 1.69 % plus élevé que la charge expérimentale estimée à 236 KN.

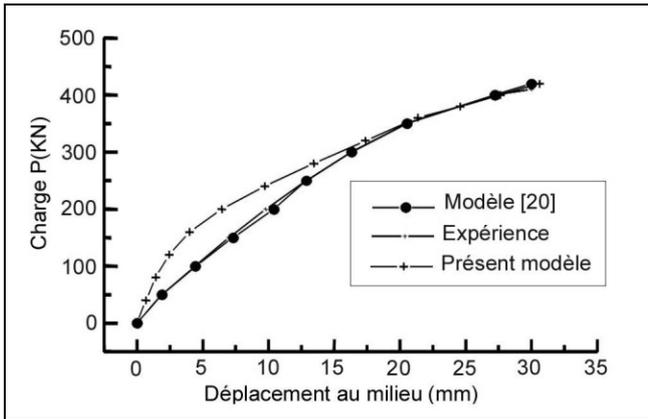


Figure 13: Poutre à section sur-armée; modèle cut-off.

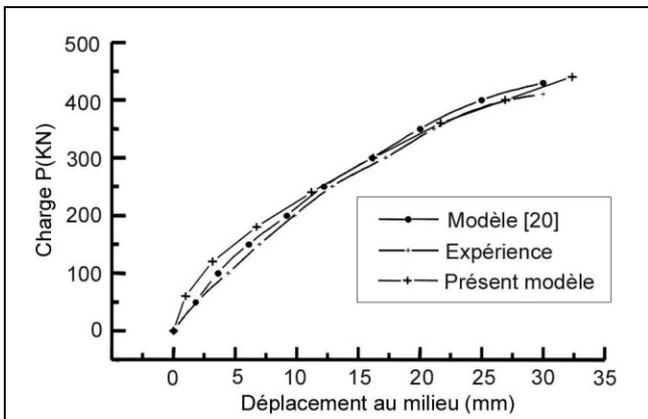


Figure 14: Poutre à section sur-armée; modèle tension-stiffening.

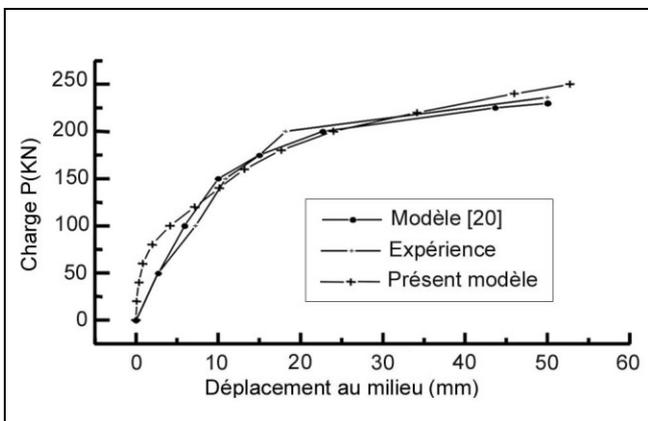


Figure 15: Poutre à section sous-armée.

CONCLUSION

La modélisation du comportement non linéaire des structures en béton armé est présentée. Deux modèles, élastoplastique et élastique-endommageable, sont pris en considération. Ils sont implantés dans l'élaboration d'un programme d'analyse des structures en béton armé sous un chargement monotone. Plusieurs paramètres physiques et numériques sont étudiés. L'analyse non linéaire reflète fidèlement le comportement expérimental. Dans l'analyse des poutres, le facteur de transfert de cisaillement a une faible influence. De même, le comportement du béton

fissuré selon les deux représentations citées, types cut-off et tension-stiffening, n'a pas de différence appréciable. Les courbes numériques obtenues lors du changement des paramètres mécaniques sont en bonne concordance avec les données expérimentales et avec d'autres modèles numériques. Finalement, les résultats obtenus par les deux modèles concordent avec les résultats expérimentaux, et les exemples traités ont illustré leur importance.

REFERENCES

- [1]- Zienkiewicz O.C., "The finite element method", McGraw-Hill, (1991).
- [2]- Ngo D., Scordelis A.C., "Finite element analysis of reinforced concrete", *A.C.I journal*, N°64-14, (1967), pp.152- 163.
- [3]- Nilson A.H., "Non-linear analysis of reinforced concrete by finite element method", *A.C.I journal*, N°65-55, (1968), pp. 757- 766.
- [4]- ASCE : Committee of concrete and masonry structures, State of the art report on the finite element analysis of Reinforced concrete, special publication ASCE (1982).
- [5]- CEB, "Application of the finite element method to two dimensional reinforced concrete structures", *Bull. d'Inf.*, 159, (1983).
- [6]- Isenberg J., "Finite element analysis of reinforced concrete structures II", ASCE, ed. (1993), New York.
- [7]- Rashid Y.R., "Ultimate strength of prestressed concrete, pressure vessels", *Nuclear Engineering and Design*, V.7, (1968), pp. 334-344.
- [8]- ASCE-A.C.I, "Finite element analysis of fracture in concrete structures", State of the art, ACI, (1997), 33 p.
- [9]- Cervenka V., "Inelastic finite element analysis of reinforced concrete panels under uniaxial loads", Ph.D thesis, University of Colorado, (1970), 241 p.
- [10]- Suzuki H., Chen W.F., "Elastic-plastic fracture analysis of concrete of structures", *Computers and Structures*, vol. 16, N° 6, (1983), pp. 697-705.
- [11]- Leinbengood L.D., Darwin D., Dodds R.H., "Parameters affecting finite element analysis of concrete structures", *J. of Struct Eng.*, vol. 112, N°2, (1986), pp. 326-341.
- [12]- Lin C.S., Scordelis A.C., "Nonlinear analysis of RC shells of general form", *J. struct. Div. ASCE*, vol. 101, (1975), pp. 523-538.
- [13]- Swidan M., Schonobrich W., "Finite element analysis of reinforced concrete", *J. Eng. M. Div. ASCE*, vol. 99, (1973), pp. 2109-2122.
- [14]- Reynouard J.M., "Structures planes en béton armé", Thèse Docteur-ingénieur, INSA Lyon, (1974), 187 p.
- [15]- Lemaire M., "Etude des structures dans le domaine de génie civil", Thèse de Doctorat es sciences physiques, INSA Lyon, (1975), 338 p.
- [16]- Gilbert R.H., Warner, R.F., "Tension stiffening in reinforced concrete slabs", *J. Eng. M. Div. ASCE*, vol. 104, (1978), pp. 1885-1900.
- [17]- Al Mahaidi R.S.H., "Nonlinear finite element analysis of reinforced concrete deep members", Thesis Ph.D Cornell University, (1979).
- [18]- Cedolin L., Dei Poli S., "Finite element studies of shear-critical R/C beams", *J. Eng. M. Div. ASCE*, vol. 103, (1977), pp. 395-410.
- [19]- Cervera M., Hinton E., Hassan O., "Nonlinear analysis of reinforced concrete plate and shell structures using 20-noded isoparametric brick elements", *Computer and structures*, vol.

- 25, (1987), pp. 845-869.
- [20]- Merabet O., "Modélisation des structures planes en béton armé sous chargement monotone et cyclique, construction et validation d'un modèle numérique", Thèse de Doctorat, INSA Lyon, (1990), 267 p.
- [21]- Lemaitre L., Mazars, J., "Application de la théorie de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure", *Annale ITBTP*, N°401, (1982), pp. 114-138.
- [22]- Ottesen N.S., "A failure criterion for concrete", *J. Eng. Mech. Div., ASCE*, 103(4), (1977), pp. 527-535.
- [23]- Podgorski J., "General failure criterion for isotropic media", *J. Eng. Mech., ASCE*, 111(2), (1985), pp. 188-201.
- [24]- Menetrey Ph. & Willam K.J., "Triaxial failure criterion for concrete and its generalization", *ACI. Struct. J.*, 92(3), (1995), pp. 311-318.
- [25]- He X.G., Kwan A.K., Chan H.C., "Limiting tensile strain failure criterion for concrete", *Proc. Int. Sym. on Strength Theory*, Science Press, Beijing and New York, (1998), pp. 387-392.
- [26]- Kupfer H.B., Hilsdorf H.K., Rush H., "Behaviour of concrete under compressive loading", *J. Eng. M. Div. ASCE*, vol 95, (1969), pp. 2543-2563.
- [27]- AFPC, sous la direction Prat M., et le concours de : Bisch P., Millard A., Mestat P., Pijaudier-Cabot G. "Calcul des ouvrages généraux de construction", Hermes, Paris (1997).
- [28]- Scalan A., Murray D.W., "An analysis to determine the effects of cracking in reinforced concrete slabs", *Proc. Of the specialty conference on finite element in civil engineering* McGill, Uni. Montreal, (1972), pp. 841- 847.
- [29]- Owen DR.J., Figueiras J.A., Damjanic F., "Finite element analysis of reinforced concrete structure including thermal loading ", *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Vol.41, N°3, (1983), pp. 323-366.
- [30]- Manae R., "Prediction of shear strength of reinforced concrete beams by finite element method ", Master thesis, Glasgow University, April (1989), 208 p.
- [31]- Chang T.Y., Taniguchi H., Chen W.F., "Non linear finite element analysis of reinforced concrete panels", *J.S. Eng. div. ASCE*, vol. 113, (1987), pp. 122-139.
- [32]- Hu H.T., Liang J.I., "Ultimate analysis of BWR mark III reinforced concrete containment subject to internal pressure", *Nuclear Engineering and Design*, 195, (2000), pp.1-11. □

