

MÉTHODE RAPIDE DE DÉTERMINATION DE L'OMBRE PROPRE D'UNE PLAQUE OPAQUE

Reçu le 21/11/2008 – Accepté le 06/06/2009

Résumé

En dessin d'architecture, il existe deux méthodes de détermination de l'ombre propre d'une plaque opaque : celle dite des plans lumineux sécants, et celle dite des contours apparents des ombres portées de la plaque. Tout en conservant le principe opératoire de la seconde, une nouvelle méthode simple et rapide est proposée.

En effet, au lieu de tracer l'ombre portée de la plaque sur le plan horizontal de projection (dans un premier temps), ensuite sur le plan frontal (dans un second temps), en vue de déduire les sens de leurs contours apparents afin de les comparer avec les sens des contours apparents des projections horizontale et frontale de la plaque, pour pouvoir en fin de compte statuer si la plaque est obscure ou éclairée (ce que préconise la seconde méthode); en revanche, la nouvelle méthode suggère l'emploi du deuxième plan bissecteur comme support de l'ombre portée de la plaque en vue de comparer son sens en une seule fois et directement avec les sens des contours des projections horizontale et frontale de la plaque.

Les démonstrations, théoriques et graphiques, montrent que par la nouvelle méthode on obtient les mêmes résultats que ceux des deux premières. Cependant, la nouvelle méthode offre de nets avantages quant à la **simplicité** de déduction des résultats et à la **rapidité** de l'exécution des épures.

Mots clés: Géométrie Descriptive, Tracé des Ombres, Double Projection Orthogonale

Abstract

In architectural drawing, two methods are used in determining an opaque face own shadow. The first one is based on the luminous secant planes while the second one uses the visible outlines of the plate cast shadow. While keeping the operating principle of the second method, a simple and quick method is presented.

The old method goes through the following stages. The plate cast shadow is first drawn on the horizontal plane then in the frontal plane in order to deduce its visible outlines and to compare them with the horizontal and frontal projection of the plate visible outlines. This allows deciding whether or not the plate is dark or enlightened.

The proposed method suggests the use of the second bisecting plane as the plate cast shadow support in order to compare it once and directly with the plate outline horizontal and frontal projections.

Theoretical and graphic demonstrations show that the new method gives the same results compared with the old ones. However, it offers clear advantages regarding simplicity and quickness in carrying out working-drawings.

Keywords: Descriptive Geometry, Shadow Tracing, Orthogonal Double Projection.

El Hadi TEBIB

Département d'Architecture et d'Urbanisme
Faculté des Sciences de la Terre, de Géographie et de l'Aménagement du Territoire
Université Mentouri de Constantine, Algérie.

ملخص

في الرسم البياني الخاص بالهندسة المعمارية، يوجد طريقتين لتعيين الظل الذاتي لصفحة غير شفافة: الطريقة المسماة بالمستويات الضوئية القاطعة والطريقة المسماة بالمحيط الظاهر للظل المحمول للصفحة. بالمحافظة على المبدأ العملي للطريقة الثانية تقترح طريقة جديدة سهلة وسريعة. فعلا، عوض أن يرسم الظل المحمول للصفحة في مرحلة أولى على المستوي للإسقاط الأول ثم في مرحلة ثانية على المستوي للإسقاط الثاني حتى يستنتج اتجاه محيط الظاهر لظليهما المحمولين على الترتيب في المسقط الأفقي والمسقط الجبهي وهذا لكي يقارن باتجاه المحيط الظاهر لمسقطيهما الأفقي والجبهي حتى يتمكن في آخر أمر أخذ القرار إذا الصفحة هي مظللة أو مضيئة في المسقطين. أما الطريقة الجديدة تقترح استعمال المستوي المنصف الثاني كحامل للظل المحمول للصفحة لكي يقارن اتجاهه في مرحلة واحدة ومباشرة باتجاه المحيطين الظاهرين للصفحة على المستوي الأول للإسقاط والمستوي الثاني للإسقاط. البرهانين النظري والبياني يبينان أن الطريقة الجديدة تمكن الحصول على نفس النتائج المتحصل عليها باستعمال الطريقتين الأوليتين مع توفير فوائد واضحة في ما يخص التسهيلات عند تعيين الظل الذاتي وفي ما يخص سرعة التنفيذ عند الرسم البياني.

: هندسة وصفية، رسم الظل، الإسقاطين المتعامدين الكلمات المفتاحية

I – PROBLÉMATIQUE

En géométrie descriptive, plus précisément dans le système de représentation graphique dit “Double Projection Orthogonale” (DPO), le tracé des ombres constitue une tâche à double préoccupation.

En effet, le dessinateur adopte plutôt la méthode lui permettant de déduire les résultats avec simplicité, et d'exécuter l'épure avec rapidité.

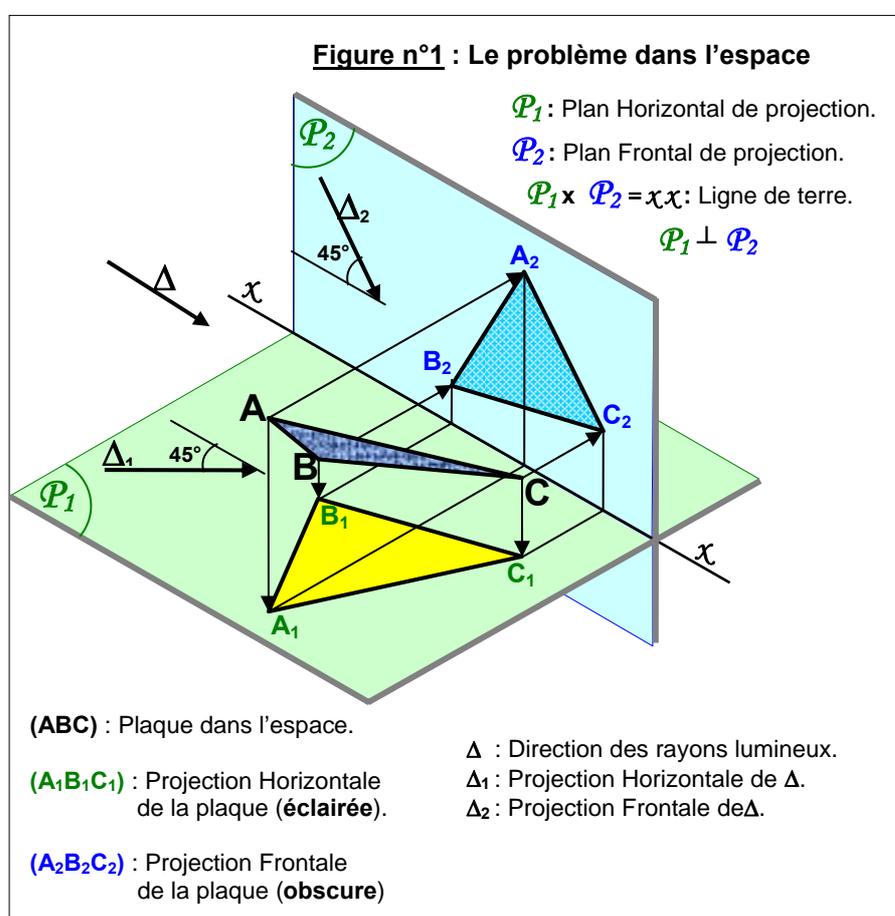
Pour déterminer l'ombre propre d'une plaque opaque (une fois sous la lumière), deux méthodes sont à la disposition du dessinateur : celle dite des *plans lumineux sécants* ⁽²⁾; et celle qui consiste à *comparer les sens* des contours apparents des deux projections (Horizontale et Frontale) de la plaque avec respectivement les sens des contours apparents des ombres portées de la plaque sur chacun des deux plans de projection.

Dans l'espace, le problème est le suivant :

- d'abord et à l'aide de l'une des deux méthodes, de déterminer la couleur (éclairée ou obscure) de sa projection Horizontale sur P_1 (le Plan), et celle de sa projection Frontale sur P_2 (la Façade);
 - et ensuite de finaliser l'épure en visualisant les résultats
- Pour les deux méthodes, la détermination des couleurs respectives de chacune des deux projections s'obtient en deux étapes :

1 - Méthode des plans lumineux sécants

1^{ère} étape : Détermination de la couleur de la projection horizontale ($A_1B_1C_1$).



Dans le cas général, une plaque opaque (ABC) ⁽⁴⁾ sous une lumière de direction (Δ) bien déterminée (conventionnellement, l'angle de Δ avec P_1 et celui de Δ avec P_2 est égale à 45° ; il s'agit alors de l'ombre à 45°), une de ses deux faces est éclairée, l'autre face est par contre **obscuré** (c'est selon la position de la plaque dans l'espace) Dans le système de la double projection orthogonale, et après rabattement de P_1 sur P_2 , il s'agit :

Coupons la plaque par un plan lumineux vertical V (V_1 V_2) parallèle à la direction des rayons lumineux Δ (Δ_1 Δ_2) ; c'est-à-dire sur l'épure :

$V_1 // \Delta_1$ et $V_2 \perp x-x$. Le plan lumineux vertical V coupe la plaque (ABC) suivant la droite d (IJ) ; c'est cette droite d qui indique la position de la plaque par rapport aux rayons lumineux de direction Δ (Δ_1 Δ_2).

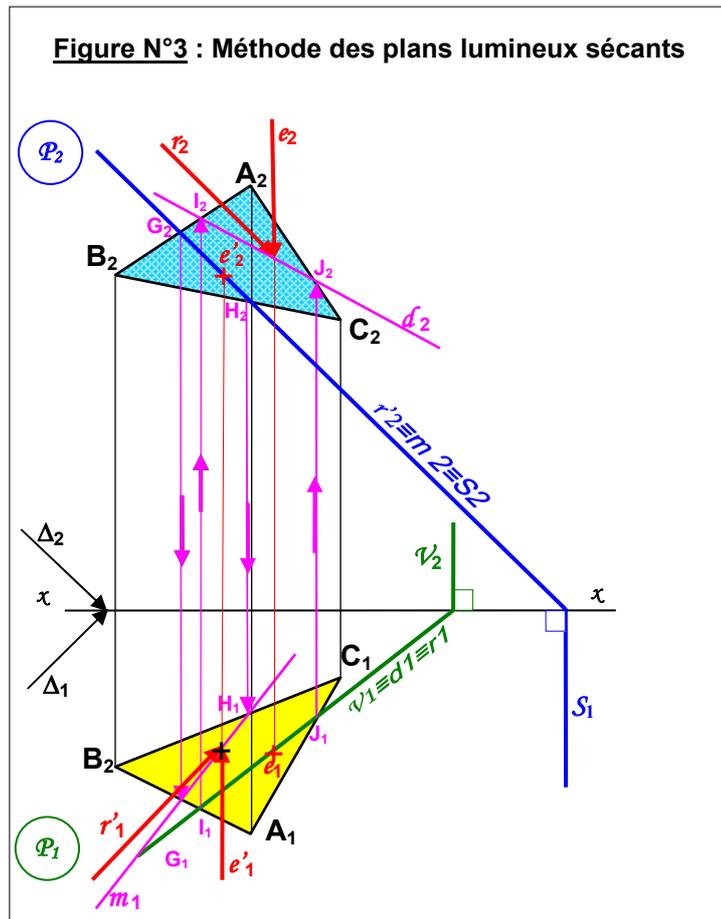
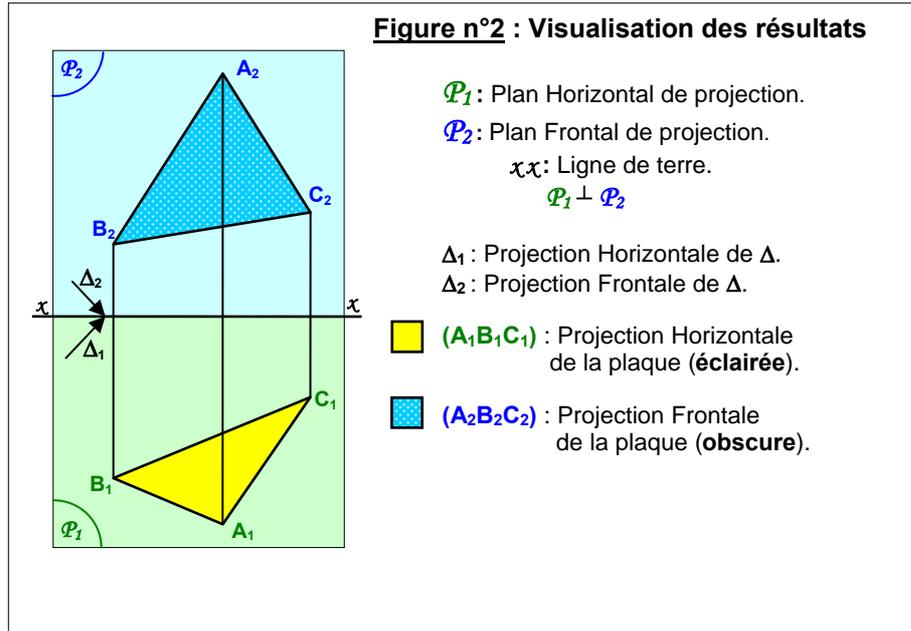
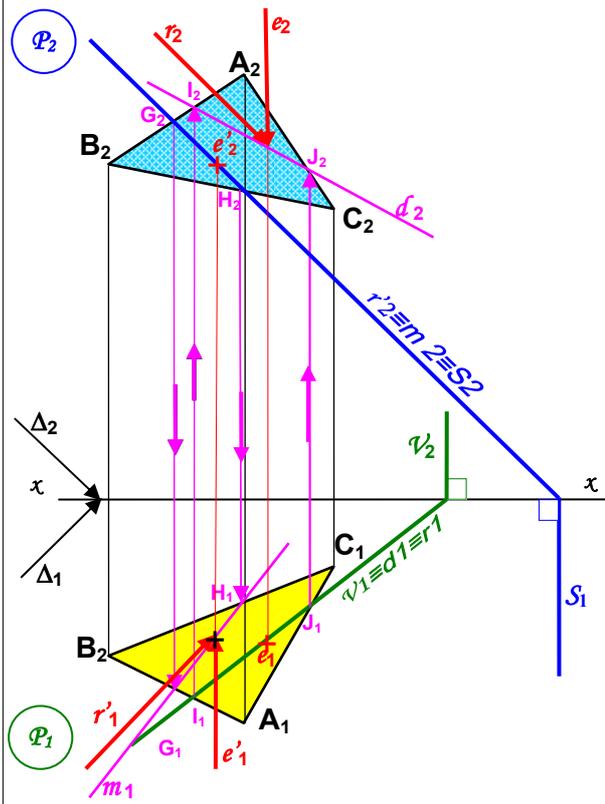


Figure N°3 : Méthode des plans lumineux sécants



Comme le rayon lumineux r ($r_1 r_2$) et la droite d ($d_1 d_2$) appartiennent au même plan lumineux vertical V , leurs projections horizontales sont confondues avec la trace horizontale V_1 de V ; c'est-à-dire : $V_1 \equiv d_1 \equiv r_1$. À l'aide des lignes de rappel, rappelons I_1, J_1 et d_1 sur la projection frontale respectivement en I_2, J_2 et d_2 . Sachant que r_2 est parallèle à Δ_2 , et que le rayon visuel e est vertical; c'est-à-dire sur l'épure : e_1 est un point, $e_2 \perp x x$, nous pouvons constater que e_2 et r_2 sont situés du même côté de d_2 ; donc les rayons lumineux incidents sont réfléchis vers le côté de l'œil de l'observateur. D'où : $(A_1B_1C_1)$ représente la projection de la face éclairée de la plaque.

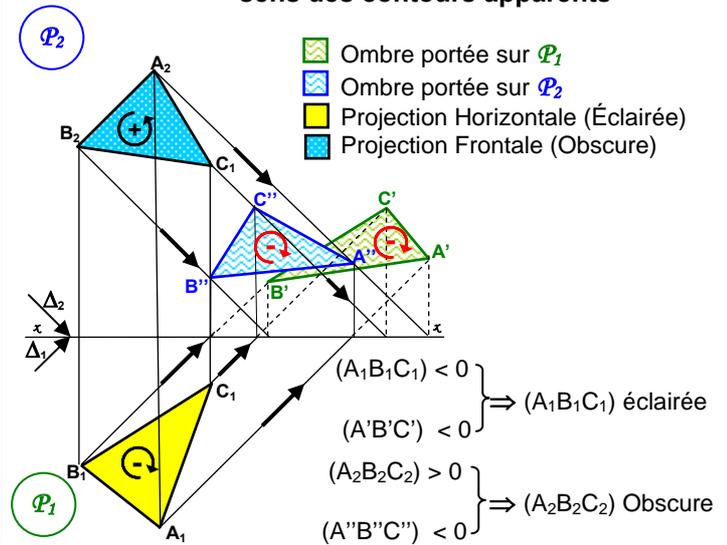
2^{ème} étape : Détermination de la couleur de la projection frontale ($A_2B_2C_2$).

Coupons la plaque par un plan lumineux de bout S ($S_1 S_2$) parallèle à la direction des rayons lumineux Δ ($\Delta_1 \Delta_2$). Sur l'épure : $S_2 // \Delta_2$ et $S_1 \perp x x$. Le plan lumineux de bout S ($S_1 S_2$) coupe la plaque (ABC) suivant la droite m ($m_1 m_2$); c'est cette droite m qui indique la position de la plaque par rapport aux rayons lumineux de direction Δ ($\Delta_1 \Delta_2$). Comme le rayon lumineux r' ($r'_1 r'_2$) et la droite m ($m_1 m_2$) appartiennent au même plan lumineux de bout S , leurs projections frontales sont confondues avec la trace frontale S_2 de S ; c'est-à-dire : $S_2 \equiv m_2 \equiv r'_2$. À l'aide des lignes de rappel, rappelons H_2, G_2 et m_2 sur la projection horizontale respectivement en H_1, G_1 et m_1 . Sachant que r'_1 est parallèle à Δ_1 , et que le rayon visuel e' est de bout; c'est-à-dire sur l'épure : $e'_1 \perp x x$, et e'_2 est un point, nous pouvons constater que e'_1 et r'_1 sont situés d'un côté et de l'autre de

m_1 ; donc les rayons lumineux incidents ne sont pas réfléchis vers le côté de l'œil de l'observateur. D'où : $(A_2B_2C_2)$ représente la projection de la face Obscure de la plaque.

2 - Méthode de la comparaison des sens des contours apparents

Figures n°4 : Méthode de la comparaison des sens des contours apparents



1^{ère} étape : Détermination de la couleur de la projection horizontale ($A_1B_1C_1$).

Traçons l'ombre portée ($A'B'C'$) de la plaque sur le plan de projection horizontale (P_1). Rappelons que l'ombre portée A' d'un point A sur le plan (P_1) est : l'intersection du rayon lumineux passant par A avec le plan (P_1).

Comparons le sens du contour apparent de ($A'B'C'$) avec celui de ($A_1B_1C_1$); nous constatons qu'ils sont de mêmes signes. D'où ($A_1B_1C_1$) est Éclairée⁽⁵⁾.

Remarque : le sens positif est le contraire de celui des aiguilles d'une montre.

2^{ème} étape : Détermination de la couleur de la projection horizontale ($A_2B_2C_2$).

Traçons l'ombre portée ($A''B''C''$) de la plaque sur le plan de projection frontale (P_2). Rappelons que l'ombre portée A'' d'un point A sur le plan (P_2) est : l'intersection du rayon lumineux passant par A avec le plan (P_2).

Comparons le sens du contour apparent de ($A''B''C''$) avec celui de ($A_2B_2C_2$); nous constatons qu'ils sont de signes contraires. D'où ($A_2B_2C_2$) est Obscure.

Les comparaisons des sens des contours apparents de l'ombre portée de la plaque avec, respectivement, ceux de ses deux projections semblent faciliter la tâche quant à la déduction des résultats. En revanche, le fait de tracer l'ombre portée ($A'B'C'$) de la plaque sur le plan horizontal

dans une première étape, et l'ombre portée de la plaque (A''B''C'') sur le plan frontal dans une seconde, nécessite au dessinateur un certain temps d'exécution de l'épure et génère un encombrement sur la feuille de dessin. C'est ce qui affecte cette méthode d'un inconvénient qu'il est souhaitable d'éliminer.

Pour ce faire, et tout en *conservant le principe de la comparaison* des sens des contours apparents, nous proposons une nouvelle façon d'opérer. En effet, au lieu de tracer l'ombre portée de la plaque d'abord sur le plan horizontal, ensuite sur le plan frontal, la **Nouvelle méthode** suggère d'opérer directement sur un seul plan : **Le deuxième plan bissecteur (2^{ème} Biss)** (6). En d'autres termes, il suffit de tracer l'ombre portée de la plaque en une seule fois sur le (2^{ème} Biss); c'est une opération très évidente quant au tracé sur l'épure (7). C'est ce qui permettra au dessinateur non seulement d'exécuter l'épure dans un temps record, mais aussi de l'exécuter sur une feuille de dessin moins encombrée par rapport aux deux autres méthodes ; les comparaisons des figures 6a, 7a, 8a et 9a avec respectivement les figures 6b, 7b, 8b et 9b montrent la clarté des épures d'indice (b) par rapport à celles d'indice (a).

II - DÉMONSTRATIONS.

1 - Démonstration Théorique

a - Hypothèses :

Soit une plaque opaque (ABC) ayant une position quelconque dans le système de la double projection orthogonale où :

- (P₁) : représente le plan Horizontal de projection ;
- (P₂) : représente le plan Frontal de projection ;
- (P₁) et (P₂) sont perpendiculaires et se coupent suivant x
- x : la ligne de terre

$(P_1) \times (P_2) = x \ x$, et $(P_1) \perp (P_2)$

- 2^{ème} Biss : représente le 2^{ème} plan bissecteur.
- S ∞ : Source de lumière à l'infini.
- (Δ) : la direction des rayons lumineux.
- (Δ_1) : Projection Horizontale de (Δ), et
- (Δ_2) : Projection Frontale de (Δ)

- (ABC) : **Plaque Opaque** ayant une position quelconque dans l'espace.

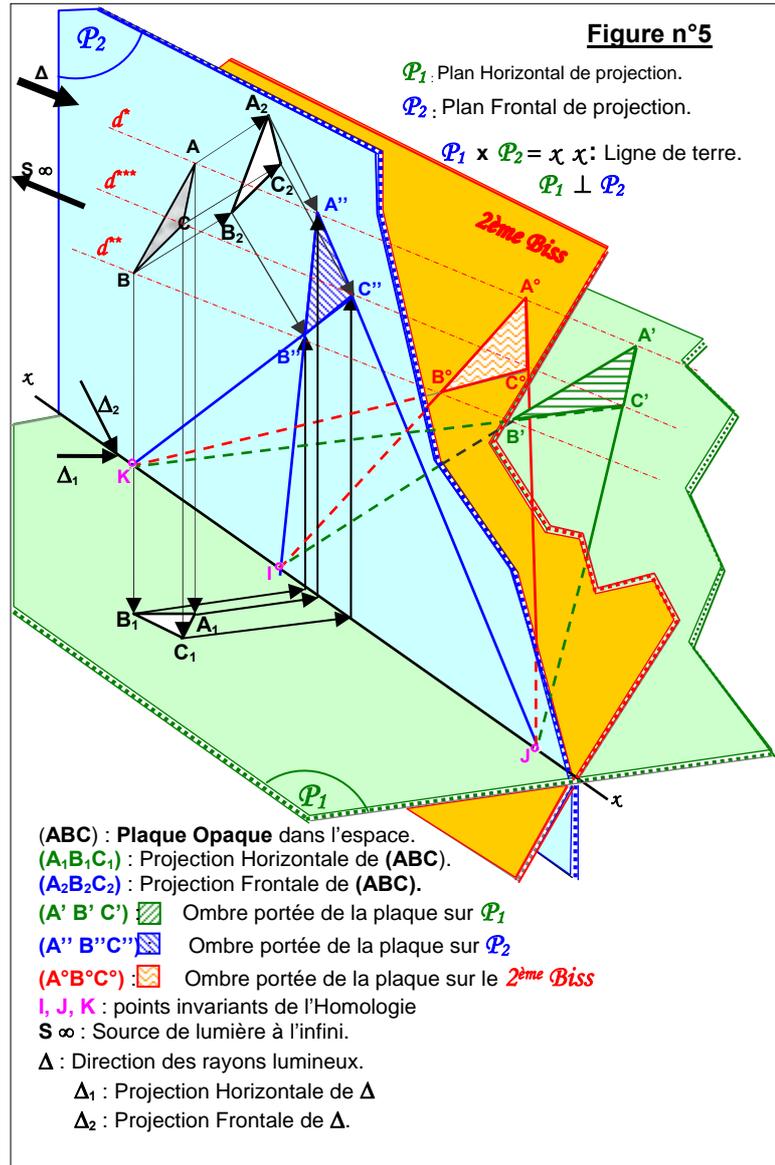
- (A₁B₁C₁) : Projection Horizontale de (ABC).
- (A₂B₂C₂) : Projection Frontale de (ABC).
- (A' B' C') : Ombre portée de la plaque sur P₁
- (A'' B'' C'') : Ombre portée de la plaque sur P₂
- (A°B°C°) : Ombre portée de la plaque sur le 2^{ème} Biss

b - Démonstration :

Prolongeons les côtés des triangles (A' B' C'), (A'' B'' C'') et (A°B°C°) vers x x.

Nous constatons que :

- A'B', A''B'' et A°B° se coupent en un seul point I appartenant à x x ;



- A'C', A''C'' et A°B° se coupent en un seul point J appartenant à x x ;
- B'C', B''C'' et B°C° se coupent en un seul point K appartenant à x x.

et sont les points d'intersections du rayon lumineux (d) avec respectivement les plans P₂, P₁ et 2^{ème} Biss ;

- A', A'' et A° sont les points d'intersections du rayon lumineux (d*) avec respectivement les plans P₂, P₁ et 2^{ème} Biss ;
- B', B'' et B° sont les points d'intersections du rayon lumineux (d**) avec respectivement les plans P₂, P₁ et 2^{ème} Biss ;
- C', C'' et C° sont les points d'intersections du rayon lumineux (d***) avec respectivement les plans P₂, P₁ et 2^{ème} Biss ;

En s'appuyant sur la réciproque du Théorème de Desargues (8) et sur les propriétés de l'Affinité et de l'Homologie (9), nous pouvons donc déduire et affirmer qu'il existe une

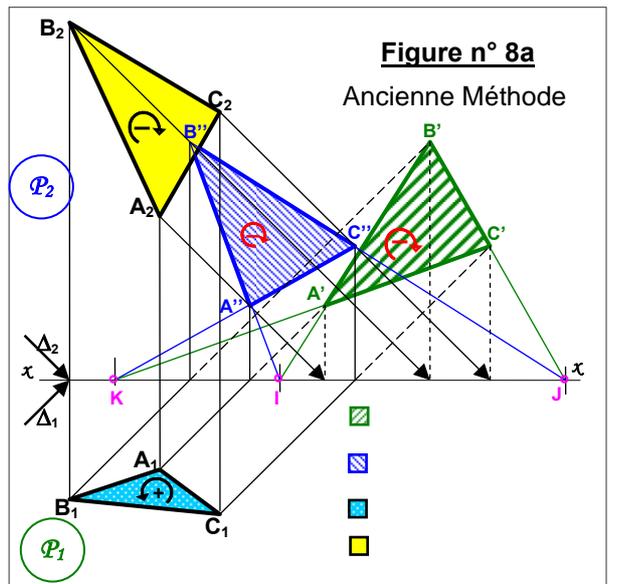
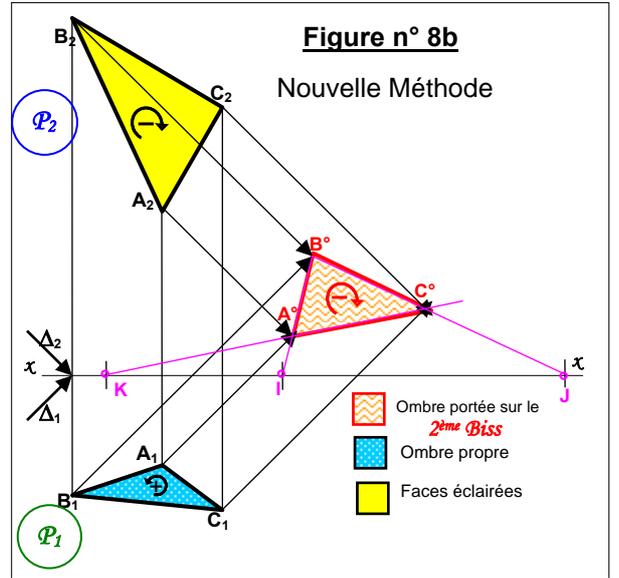
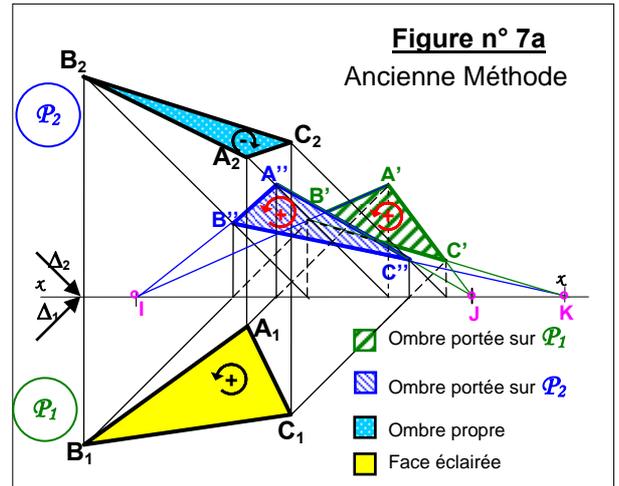
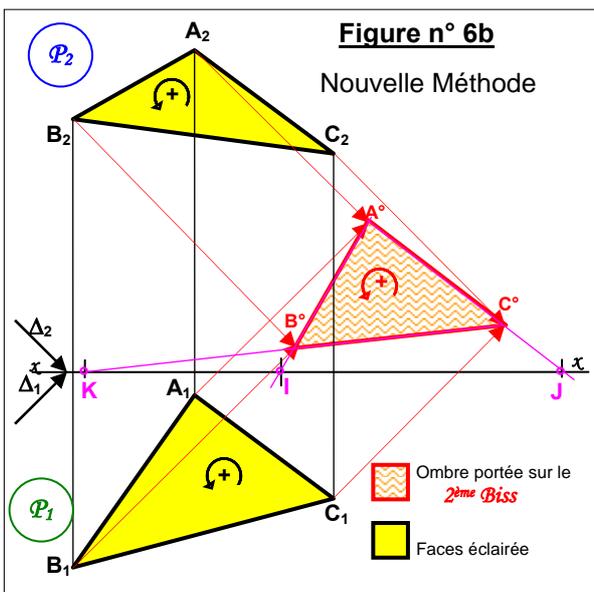
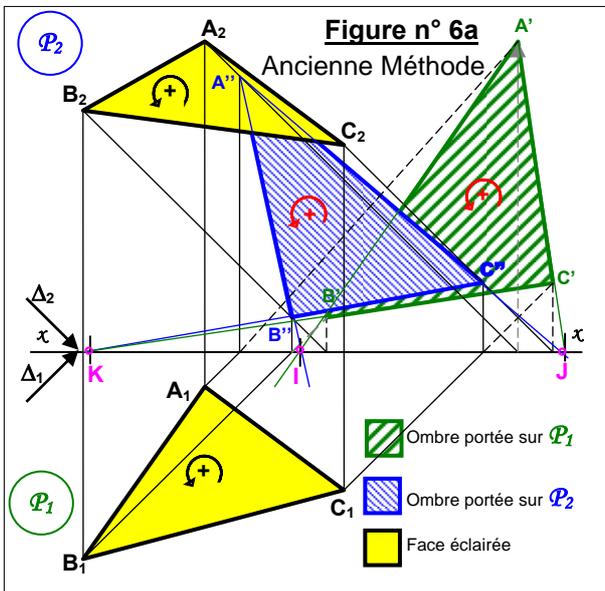
MÉTHODE RAPIDE DE DÉTERMINATION DE L'OMBRE PROPRE D'UNE PLAQUE OPAQUE

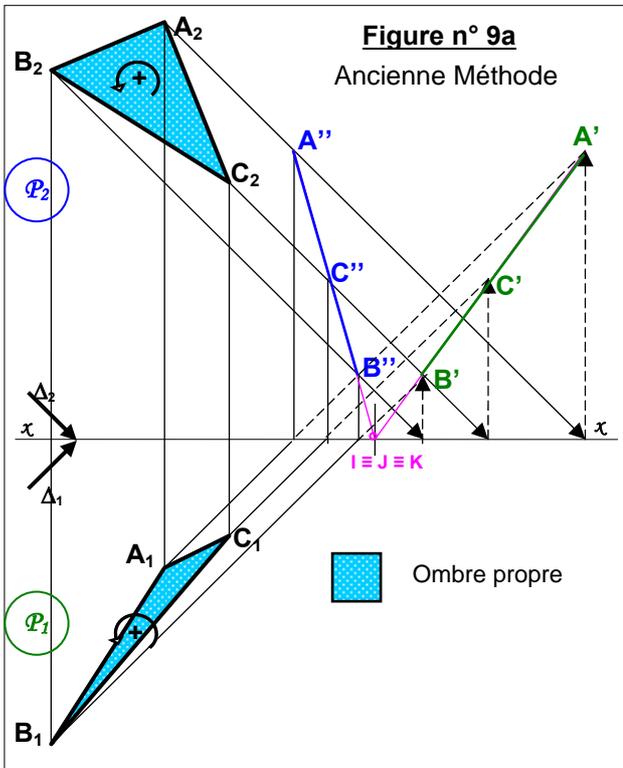
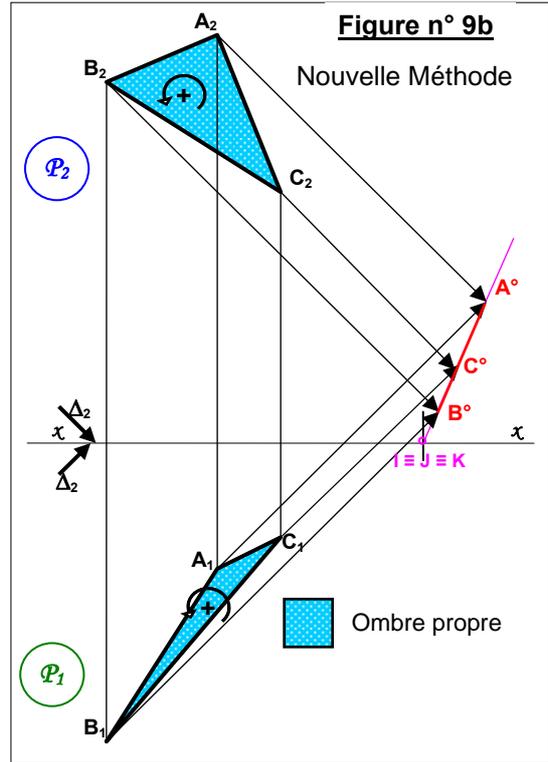
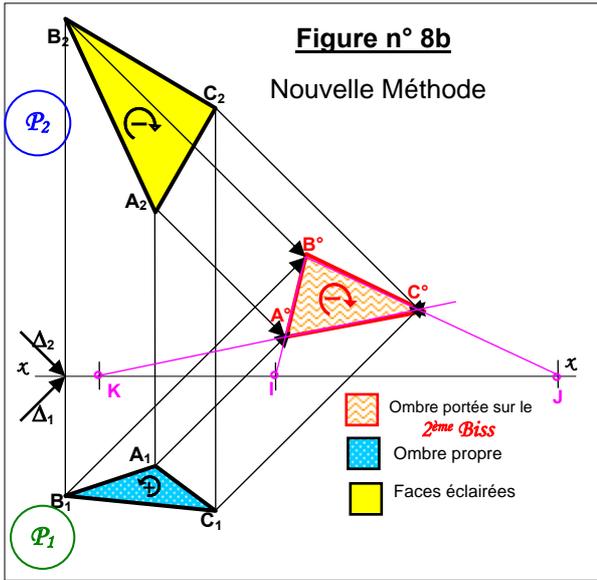
Affinité de direction Δ , d'axe x et d'éléments homologues les plans P_2, P_1 , et 2^{ème} Biss, où I, J et K sont justement les points invariants. Et comme les triangles $(A' B' C')$, $(A'' B'' C'')$ et $(A^{\circ} B^{\circ} C^{\circ})$ appartiennent respectivement aux plans homologues P_1, P_2 et 2^{ème} Biss, ils constituent donc eux aussi des éléments homologues dans la même *affinité*.

c - 1^{ère} Conclusion .

Les triangles $(A' B' C')$, $(A'' B'' C'')$ et $(A^{\circ} B^{\circ} C^{\circ})$ ont leurs contours apparents de même sens, et cela quelque soit la position de la plaque dans l'espace.

2 - Démonstration Graphique :





- 3^{ème} Cas (Figure n°8) : $(A_1B_1C_1)$ est **Obscure**, $(A_2B_2C_2)$ est **Éclairée**.
- 4^{ème} Cas (Figure n°9) : $(A_1B_1C_1)$ est **Obscure**, et $(A_2B_2C_2)$ est **Obscure**.

Dans les quatre cas de figures, l'utilisation de l'ancienne méthode est représentée sur les figures 6a, 7a, 8a, et 9a ; la nouvelle méthode est représentée respectivement dans les figures 6b, 7b, 8b et 9b. Pour chacun des cas, la plaque occupe la même position dans l'espace, que ce soit sur la figure indice (a) ou (b).

b - Résultats :

1 - Sens des contours apparents :

- Dans les trois premiers cas (figure n°6, figure n°7 et figure n°8) : $(A' B' C')$, $(A'' B''C'')$ et $(A^{\circ}B^{\circ}C^{\circ})$ sont des triangles de **même signe**.
- Dans le cas de la figure n° 9 : $(A' B' C')$, $(A'' B''C'')$ et $(A^{\circ}B^{\circ}C^{\circ})$ sont des droites ; cela signifie que les trois ombres de la plaque respectivement sur les trois plans sont des droites, par conséquent : le plan de la plaque est donc parallèle à la direction des rayons lumineux. D'où : la plaque est **obscur** sur ses deux faces.

a - Tracé des épures :

Quelque soit la position de la plaque dans l'espace, il ne peut y avoir que **quatre** (04) cas de figures possibles et imaginaires :

- 1^{er} Cas (Figure n°6) : $(A_1B_1C_1)$ est **Éclairée**, et $(A_2B_2C_2)$ est **Éclairée**.
- 2^{ème} Cas (Figure n°7) : $(A_1B_1C_1)$ est **Éclairée**, et $(A_2B_2C_2)$ est **Obscure**.

MÉTHODE RAPIDE DE DÉTERMINATION DE L'OMBRE PROPRE D'UNE PLAQUE OPAQUE

2 - Points invariants.

Dans les quatre cas de figures, nous constatons que non seulement :

- $A'B'$, $A''B''$ et $A^{\circ}B^{\circ}$ se coupent en un seul point **I** appartenant à $x x$;
- $A'C'$, $A''C''$ et $A^{\circ}C^{\circ}$ se coupent en un seul point **J** appartenant à $x x$;
- $B'C'$, $B''C''$ et $B^{\circ}C^{\circ}$ se coupent en un seul point **K** appartenant à $x x$;

mais aussi que : les points **I**, **J** et **K** ont respectivement la même abscisse aussi bien sur la figure indice **(a)** que sur la figure indice **(b)**. La superposition des figures indice **(a)** respectivement sur les figures indice **(b)** confirme ce résultat (La figure n°5 le montre bien dans l'espace).

c - 2^{ème} Conclusion.

Ces résultats graphiques montrent qu'il s'agit bel et bien d'une Affinité d'axe $x x$ où :

- $(A' B' C')$, $(A'' B'' C'')$ et $(A^{\circ}B^{\circ}C^{\circ})$ sont les éléments homologues ;
- et où les points **I**, **J**, et **K** sont les points invariants de cette affinité.

D'où : les triangles $(A' B' C')$, $(A'' B'' C'')$ et $(A^{\circ}B^{\circ}C^{\circ})$ ont leurs contours apparents de même sens, et cela quelque soit la position de la plaque dans l'espace.

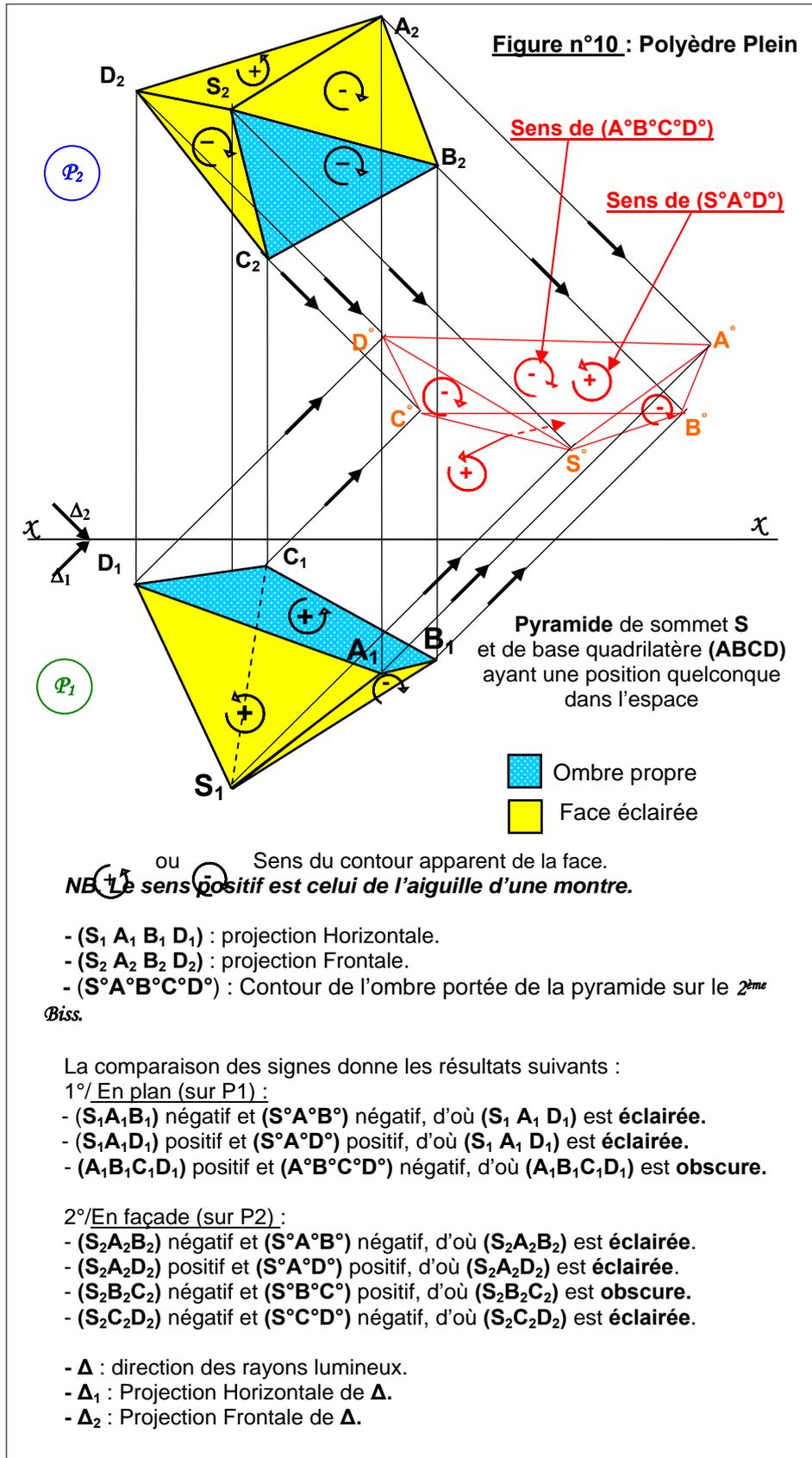
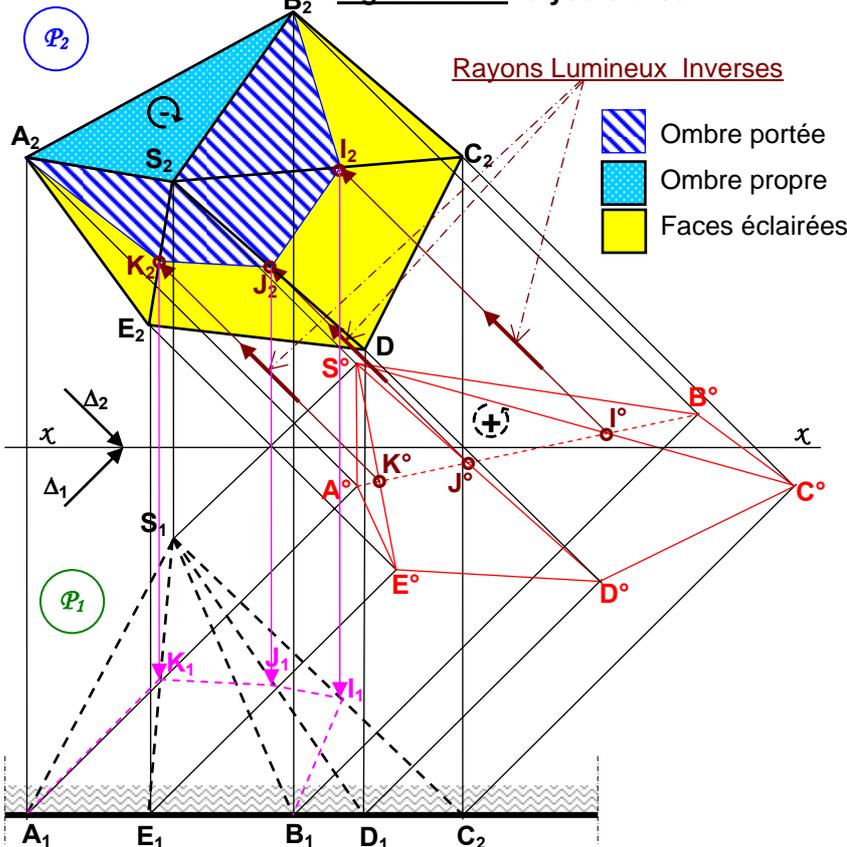


Figure n°11 : Polyèdre Creux



Creux de sommet S et de base pentagonale $(ABCDE)$ dans un mur.

$(S_1A_1B_1C_1D_1E_1)$: Projection Horizontale du creux.

$(S_2A_2B_2C_2D_2E_2)$: Projection Frontale du creux.

$(S^{\circ}A^{\circ}B^{\circ}C^{\circ}D^{\circ}E^{\circ})$: Contour de l'ombre portée du creux sur le 2^{ème} Biss.

La comparaison des signes en façade donne les résultats suivants :

- $(S_2A_2B_2)$ négative et $S^{\circ}A^{\circ}B^{\circ}$ positive, donc la face $(S_2A_2B_2)$ est **Obscure**.
- Les 4 autres faces sont de mêmes signes, elles sont donc toutes **Éclairées**.

À partir de l'ombre portée sur le 2^{ème} plan bissecteur, on constate que :

- $A^{\circ}B^{\circ}$ coupe $S^{\circ}C^{\circ}$, $S^{\circ}D^{\circ}$ et $S^{\circ}E^{\circ}$ respectivement en I° , J° et K° .
- Les rayons lumineux inverses issus des points I° , J° et K° coupent S_2C_2 , S_2D_2 et S_2E_2 respectivement aux points I_2 , J_2 et K_2 .
- D'où l'ombre portée de l'arrêt AB sur les 4 faces éclairées se brise donc justement aux points I_2 , J_2 et K_2 .

Les 4 faces éclairées sont partiellement ombrées par l'ombre portée de la face **SAB** qui est obscure.

CONCLUSION

Nous venons de démontrer théoriquement et graphiquement que quelque soit la position de la plaque dans l'espace, les contours apparents des ombres portées respectivement sur les plans P_1 , P_2 et 2^{ème} Biss sont de même sens.

D'où : lors de la comparaison des sens, il suffit de ne prendre en considération qu'un seul. Dans la pratique, c'est le tracé de l'ombre portée sur le 2^{ème} Biss qui offre le plus d'avantage, dans la mesure où :

1 - L'ombre portée sur le 2^{ème} Biss est déterminée de manière très évidente : à titre d'exemple, pour le point A , il suffit de déterminer l'intersection de la projection horizontale du rayon lumineux passant par A avec sa projection frontale ; pour cela, il suffit de tracer la parallèle à Δ_1 menée à partir de A_1 , et la parallèle à Δ_2 menée à partir de A_2 , et ensuite déterminer leur intersection. Ce qui représente un gain substantiel de temps ;

2 - L'épure s'exécute sur une feuille de dessin moins encombrée ; la comparaison des figures indice (a) avec celles d'indice (b) affiche des résultats incontestables.

Cependant, l'emploi de cette nouvelle méthode est encore très efficace quant à la détermination de l'ombre propre dans le cas des polyèdres pleins (figure n° 10), et la détermination des ombres portées et propres dans le cas des polyèdres creux.

RÉFÉRENCES

[1] - MONGE G. : Géométrie Descriptive. J. Klosterman ; Paris 1981.

[2] - AUBERT J. : Cours de dessin d'architecture à partir de la géométrie descriptive. Ed. La Villette, Paris 1982.

[3] - DINH DIEN N. : Géométrie descriptive (Tomes 1 et 2). Ed. Enseignement Supérieur ; Hanoï 1984.

- VAN THAN H. : Cours de Géométrie Descriptive et Perspective. Institut d'Architecture de Biskra. Biskra 1987.

[4] - Le choix d'une plaque de forme triangulaire est fondé sur le fait qu'il suffit de trois points pour déterminer un plan.

MÉTHODE RAPIDE DE DÉTERMINATION DE L'OMBRE PROPRE D'UNE PLAQUE OPAQUE

[5] - Selon les règles de cette méthode : Si les contours apparents sont de même sens, la plaque est éclairée sur la projection en question ; en revanche, si ils sont de sens contraires, la plaque est alors obscure sur cette même projection.

[6] - Le deuxième plan bissecteur est le plan qui divise en deux parties égales le 2^{ème} quadrant et le 4^{ème} quadrant qui structurent le système de la double projection orthogonale.

[7] - Dans le système de la Double Projection Orthogonale, tout élément *est* et *doit être* représenté par deux projections qui, dans le cas général et après rabattement des deux plans de projections, sont séparées par la ligne de terre **xx**. La projection horizontale et la projection frontale de tout élément appartenant au 2^{ème} plan bissecteur se confondent après rabattement. C'est justement l'avantage qu'offre le 2^{ème} plan bissecteur.

[8] - ÉFIMOV N. : Géométrie Supérieure. 2^{ème} Partie : Éléments de Géométrie projective, Chapitre 2 : Théorème de Girard DESARGUES ; pages 249.

Coll. Traduit du Russe, série : Mathématiques
Ed. Mir ; 2^{ème} Ed. Moscou 1985.

Se référer également à :

FLOCON A. & TATON R. : La Perspective. Coll. Que sais-je ? N° 1050, 4^{ème} éd. ; Ed. PUF, Paris 1985.

[9] - DIMITROV G. : Transformations Géométriques, Homologie et Affinité. Séminaire de perfectionnement en Géométrie Descriptive et Perspective. EPAU, Alger du 13 au 25 Mai 1989.

[10] - La projection d'un plan (sur un autre plan de projection) suivant une direction de projection qui lui est parallèle **est une droite**. Ainsi, les rayons lumineux parallèles à une surface plane ne l'éclairent pas car il n'y a pas d'incidence, et donc il n'y a pas de réflexion de la lumière. Ce qui implique que les deux faces de plaque sont obscures.