Sciences & Technologie **A** – **N°22**, Décembre (2004), pp. 23-25.

INVERSION GENERALISEE D'OPERATEURS LINEAIRES ET APPROXIMATION DANS LES ESPACES DE BANACH

Reçu le 09/07/2002– Accepté le 22/08/2004

Résumé

Soient E et F deux espaces de Banach sur $\mathbb{C}$, A: $E \to F$ un opérateur linéaire borné. L'opérateur borné B: $E \to F$ est dit 1^k-inverse de A si $A(BA)^k = A$, $k \in \mathrm{N}^*$. Si de plus A est un 1^k-inverse de B, alors B est dit G_k-inverse de A. Dans cet article, on montre que l'existence de la meilleure approximation et de la meilleure approximation de norme minimale de l'équation $Ax = y_0$ sont liées à un choix préalable de l'inverse généralisé de A.

***Mots clés**: Opérateur linéaire borné, projection, 1^k – inverse, G_k -inverse..*

Abstract

Let E and F, be tow Banach spaces on the same field of complex numbers $\mathbb{C}$, A: $E \to F$ is a bounded linear operator. A bounded linear operator B: $E \to F$ is called 1^k - inverse of A, if $A(BA)^k = A$, $k \in \mathrm{N}^*$. If moreover A is 1^k-inverse of B, then B is called G_k-inverse of A. In this paper we show that the existence of the best approximation and the best approximation of minimal norm of the equation $Ax = y_0$, are related to suitable choices of generalized inverses of A.

***Keywords**: Bounded linear operator, projection, 1^k-inverse, G_k -inverse.*

AMS classification : 47 A 55 – 47 A 05.

S. GUEDJIBA
R. BENACER
Département de mathématiques
Faculté des Sciences
Université de Batna
05000 Batna (Algérie)

ملخص

ليكن E و $R(A) = R((AB)^k)$ فضائي بناخ على $\mathbb{C}$. نعتبر $F : E$ $\to$ A مؤثرا خطيا محدودا .ندعو 1^k- مقلوبا معمما المؤثر $B{:}F \to E$ الذى يحقق $(AB)^k A = A, k \in IN^*$ و في حالة كون A 1^k- مقلوبا معمما لـ B فإنه يدعى G_k- مقلوبا معمما. البحث يتناول المعادلة $Ax = y_0$ كما يقدم علاقة المقلوبات المعممة بوجود أحسن تقريبات و أحسن تقريبات دات نظبم اصغر.

***الكلمات المفتاحية:** مؤثر خطي، 1^k - مقلوبا معمم، G_k - مقلوب معمم، اسقاط.*

Introduction

Soient E et F deux espaces de Banach sur X, $A : E \to F$ un opérateur linéaire borné. $N(A)$ et $R(A)$ désignent respectivement le noyau et l'image de A. L'espace des opérateurs linéaires bornés de E dans F est noté $\beta(E,F)$. L'opérateur $B \in \beta(F,E)$ est dit 1^k-inverse de A, si $A(BA)^k = A$, $k \in \mathrm{N}^*$, ou un G_k-inverse de A si A est aussi un 1^k-inverse de B.

Considérons l'équation $Ax = y_0$. Dans le cas où cette équation ne possède pas de solution, on essaie de minimiser la quantité $\|Ax - y_0\|$. Les travaux déjà réalisés dans ce domaine affirment le lien entre la meilleure approximation de l'équation considérée et l'existence de projections contractives qui sont dans notre cas $(AB)^k$ et $I-(BA)^k$. On montre dans cet article que ce lien est aussi réduit à un choix préalable de B.

Proposition 1

Soient E, F deux espaces de Banach sur $\mathbb{C}$, B un 1^k-inverse de A, alors $(AB)^k$ et $I-(BA)^k$ sont des projections sur $R(A)$ et $N(A)$ respectivement , telles que $R((AB)^k) = R(A)$ et $N((BA)^k) = N(A)$.

Preuve

On vérifie bien que $(AB)^k$ et $I-(BA)^k$ sont des idempotents, et que $R(A) = R((AB)^k A) \subset R((AB)^k) \subset R(A)$, donc $R(A) = R((AB)^k)$.

De même $R(I-(BA)^k) = N(BA)^k)$.

On a $N(A) \subset N((BA)^k)$, et si x est tel que $(BA)^k x = 0$, alors $A((BA)^k)x = Ax = 0$.

Donc $N(BA)^k = N(A)$. La continuité de A et B montre que $(AB)^k$ et $I-(BA)^k$ sont des projections sur $R(A)$ et $N(A)$ respectivement.

Remarque

On a montré que si $A \in \beta(E,F)$ possède un 1^k-inverse, alors $N(A)$ et $R(A)$ sont fermés et admettent des supplémentaires topologiques dans E et F respectivement.

Proposition 2

Soient $A \in \beta(E,F)$, B un G_k-inverse de A, alors

$R(AB)^k = R(A)$

$R(BA)^k = R(B)$

$N(BA)^k = N(A)$

$N(AB)^k = N(B)$

et $E = N(A) \oplus R(B)$, $F = R(A) \oplus N(B)$

où $\oplus$ désigne la somme topologique directe.

Preuve

C'est une conséquence de la proposition précédente.

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. On remarque que $B = \begin{pmatrix} a & b \\ -1 & c \end{pmatrix}$, où a,b,c sont des nombres complexes, est un 1^2–inverse de A, tandis que $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ est un 1^2–inverse de A qui n'est pas un G_2-inverse.

Un G_2-inverse de A serait $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, compte tenu du fait que les matrices et leurs inverses généralisés possèdent ou non le même rang.

Proposition 3

Pour que $A \in \beta(E,F)$ possède un 1^k–inverse, il faut et il suffit que $N(A)$ et $R(A)$ possèdent des supplémentaires topologiques dans E et F respectivement.

Preuve

D'après la proposition (1) la condition est nécessaire. Soient $A: E \to F$, E_0 un supplémentaire de $N(A)$ dans E, $A_1 : E_0 \to R(A)$ la restriction de A à E_0, alors A_1 est une bijection; notons son inverse A_1^{-1}. D'après le théorème de l'isomorphisme de Banach, A_1^{-1} est borné. Considérons $S \in \beta(R(A))$ tel que $S^k = I_{R(A)}$ (Ces opérateurs sont des racines d'ordre k de l'identité). Soit F_0 un supplémentaire de $R(A)$ dans F. Définissons $B \in \beta(F,E)$ tel que $N(B) = F_0$ et $B = A_1^{-1}$ sur $R(A)$. Pour $x \in E$, $x = x_1 + x_2$ où $x_1 \in N(A), x_2 \in E_0$. On vérifie que $A(BA)^k x = Ax$, donc B est bien un 1^k–inverse de A.

Cette construction nous permet de montrer que B ainsi défini est aussi un G_k-inverse de A.

Proposition 4

Soient E et F deux espaces de Banach $A \in \beta(E,F)$, B un 1^k–inverse de A. Considérons l'équation $Ax = y_0$. Alors $x_0 = B(AB)^{k-1} y_0$ est une meilleure approximation pour l'équation précédente, si et seulement si $\left\| I-(AB)^k \right\| = 1$.

Preuve

Montrons d'abord que si $\left\| I-(AB)^k \right\| = 1$, on a alors $\left\| y_0 - (AB)^k y_0 \right\| \le \left\| (I-(AB)^k) y_0 \right\| + \left\| Ax' \right\|$, pour $x' \in E$ quelconque.

Pour cela, soit $Q = (AB)^k$; on a $Ax' \in N(I-Q)$.

Alors

$$\left\| (I-Q)y_0 \right\| = \left\| (I-Q)^2 y_0 + (I-Q)Ax' \right\| \le \left\| I-Q \right\| \times$$
$$\times \left\| (I-Q)y_0 + Ax' \right\|$$

C'est à dire, pour $x' = B(AB)^{k-1} y_0 - x$ où $x \in E$, on a

$$\left\| y_0 - Ax_0 \right\| = \left\| y_0 - (AB)^k y_0 \right\| \le$$
$$\left\| (I-(AB)^k) y_0 + A((B(AB)^{k-1} y_0 - x) \right\| = \left\| y_0 - Ax \right\|.$$

Réciproquement, si $x_0 = B(AB)^{k-1} y_0$ est une meilleure approximation, alors

$\left\| y_0 - Ax_0 \right\| = \left\| y_0 - Ax \right\|$ pour tout $x \in E$, donc

$\left\| y_0 - Ax_0 \right\| = \left\| (I-(AB)^k) y_0 \right\| \le \left\| y_0 \right\|$, d'où

$\left\| I-(AB)^k \right\| \le 1$ et puisque $I-(AB)^k$ est un projecteur, alors $\left\| I-(AB)^k \right\| = 1$.

Proposition 5

Soient E et F deux espaces de Banach, dont F est strictement convexe, $A \in \beta(E,F), B$ un G_k-inverse de A. Considérons l'équation $Ax = y_0$, alors $x_0 = B(AB)^{k-1} y_0$ est une meilleure approximation de norme minimale pour l'équation précédente, si et seulement si

$$\left\| (BA)^k \right\| = \left\| I-(AB)^k \right\| = 1.$$

Preuve

Remarquons d'abord que si F est strictement convexe et si x_0 est une meilleure approximation, alors les autres meilleures approximations sont données par $x = x_0 + N(A)$.

Comme B est G_k-inverse de A, alors $E = N(A) \oplus R(B)$. Pour x_0 meilleure approximation , il existe $b \in N(A)$ tel que $x_0 = b + B(AB)^{k-1} y_0$. Supposons x_0 de norme minimale:

$$\left\|(BA)^k x_0\right\| = \left\|(BA)^k (b + B(AB)^{k-1} y_0)\right\|$$
$$= \left\|B(AB)^{k-1} y_0\right\|$$
$$= \left\|B(AB)^{k-1} y_0 + b\right\| \leq \left\|x_0\right\|.$$

donc $\left\|(BA)^k\right\| = 1$.

Réciproquement, si $\left\|(BA)^k\right\| = 1$, alors

$$\left\|B(AB)^{k-1} y_0\right\| = \left\|(BA)^k x_0\right\| \leq \left\|x_0\right\| = \left\|B(AB)^{k-1} y_0 + b\right\|,$$

$b \in N(A)$; donc $x_0 = B(AB)^{k-1} y_0$ est une meilleure approximation de norme minimale.

Remarque

Comme les projections (non nulles) sont des opérateurs de norme ≥ 1, ainsi les projections de norme 1 sont des contractions; or, les conditions d'existence d'une meilleure approximation sont liées au fait que $I - (AB)^k$ soit une contraction et que $(BA)^k$ et $I - (AB)^k$ soient des contractions si l'on veut minimiser la norme de la meilleure approximation. Or, l'existence de ces contractions dans un espace de Banach n'est pas évidente, contrairement au fait que dans un espace de Hilbert, toute projection orthogonale est une contraction car elle est de norme 1.

Dans ce qui suit, on montre qu' un choix préalable de B peut faciliter la question.

Sous les conditions de la proposition 4, comme A et B sont bornés, BA l'est aussi, et par conséquent $\left\|(BA)^k\right\| \leq \left\|BA\right\|^k$. On peut donc remplacer $\left\|(BA)^k\right\| = 1$ par $\left\|BA\right\| \leq 1$, et en se servant de la relation

$$I - (AB)^k = (I - AB)(I + AB + ... + (AB)^{k-1}),$$

la proposition 4 peut s'énoncer comme suit :

Proposition 4 bis

Soient E et F deux espaces de Banach $A \in \beta(E,F)$, *B un* 1^k *–inverse de A. Soit* $r = \left\|AB\right\| \neq 1$. *L'équation* $Ax = y_0$ *possède une meilleure approximation* $x_0 = B(AB)^{k-1} y_0$, *si et seulement si* $\left\|I - (AB)\right\| \leq \dfrac{1-r}{1-r^k}$.

En tenant compte des remarques précédentes, on peut énoncer aussi

Proposition 5 bis

Soient E et F deux espaces de Banach $A \in \beta(E,F)$, *B un* G_k *-inverse de A, l'équation* $Ax = y_0$ *possède une meilleure approximation de norme minimale* $x_0 = B(AB)^{k-1} y_0$, *si et seulement si* $\left\|I - (AB)\right\| \leq \dfrac{1-r}{1-r^k}$, $r = \left\|AB\right\| \neq 1$ *et* $\left\|BA\right\| \leq 1$.

CONCLUSION

On conclue qu'il est possible de chercher une meilleure approximation (de norme minimale) de l'équation $Ax = y_0$ sans la contrainte imposée directement aux projections $I - (AB)^k$ et $(BA)^k$ d'être contractives en premier lieu, mais en choisissant directement l'inverse généralisé B d'une façon à satisfaire les conditions des proposition 4 bis et 5 bis.

REFERENCES

[1]- Ando T., "Operator theoretic methods for matrix inequalities", Sapporo, Japan (1998).

[2]- Ben-Israel A., "Generalized inverse of matrices, prospective of the work of Penrose", *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* (1986).

[3]- Bhatia R., Davis C., "A better bounded on the variance", The American Math. Monthly. (2000).

[4]- Campbell S.L., Meyer C.D., "Generalized inverses of linear transformations", Pitman edit. (1991).

[5]- Caradus S.R., "Generalized inverses and operator theory", Queen's papers in pure and applied math. (1978).

[6]- Penrose R., "A generalized inverse for matrices", *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, Vol.52, (1955). ☐