

- [3] E.W. Kimbark, "Direct current transmission", Wiley-interscience publication 1971.
- [4] D.L. Carlson, E. Mohamed, S. Morand "Absorption of harmonics. Harmonic filters. Non-characteristic harmonics. Telephone Interference". International conference on harmonics in power systems Juillet 1986.
- [5] K. Sadek, N. Cristl "Impact of system parameters on non-characteristic harmonics of H.V.D.C transmissions", Cigré symposium 09-87 Boston 1987.
- [6] J. Reeve, P.C.S. Krishnayya "Unusual current harmonics arising from H.V.D.C transmission", IEEE Trans, Pas-87, mars 1968.
- [7] P. Adam, V. Colletbillono, M. Gailly, J.P. Taisne "Conception, performances et particularités des filtres d'harmoniques en HT et THT" R.G.E N°6 Juin 1988.
- [8] G.A. Guenrikch, V.V. Michine, G.I. Denissenko "Régimes particuliers du fonctionnement des convertisseurs statiques puissants des installations de la fusion du givre sur les lignes de transport et Ecole supérieure LVOV 1988.
- [9] A. Ayad, "Contribution à l'étude des perturbations harmoniques des redresseurs à thyristors en divers régimes de fonctionnement", Thèse de doctorat INPL Nancy 1994.
- [10] A. Ayad, B. Mazari, S. Saadate, R. Le Doeuff "Numerical and experimental analysis of uncharacteristic current harmonics generated by unbalanced converters", Electrical drives and power Electronics KOSICE Slovak Federal Republic 1992.

(* *Groupe de Recherches en Electrotechnique et Électronique de Nancy I.N.P.L - G.R.E.E.N - CNRS URA D1438 2, Avenue de la Forêt de Haye, 54516 Vandoeuvre-lès-Nancy cedex France*

et Université de Annaba, Institut d'Electrotechnique BP N°12 Sidi Ammar 23000 Algérie

(** *Groupe de Recherches en Électrotechnique et Electronique de Nancy I.N.P.L - G.R.E.E.N - CNRS URA D1438*

2, Avenue de la Forêt de Haye, 54516 Vandoeuvre-lès-Nancy cedex France

(*** *ESA IGELEC Ecole Supérieure Atlantique d'ingénieurs en Génie électrique France*

Classification par feed-back des systèmes quadratiques

H. TEBBIKH (*)

Résumé

Dans cet article, on étudie le problème de classification par feed-back des systèmes quadratiques de R^n , à m entrées. On montre le lien entre les feed-back invariants et les singularités de l'application entrée-sortie. Des formes canoniques sont calculées dans le cas où $n=3$ et $m=2$. Les autres cas sont étudiés dans [7].

1 - Introduction

Un système quadratique de R^n est un système de la forme :

$$x(t) = Q(x(t)) + B.u(t) \quad (1)$$

Où $x \in R^n$, $u \in R^m$, Q est une application de R^n dans R^n dont chaque composante est une forme quadratique et B est une matrice $n \times m$, constante.

On retrouve de tels systèmes dans les problèmes de

contrôle de certains systèmes mécaniques et réacteurs chimiques. Notre étude a été motivée par deux raisons principales. En premier lieu, le problème de contrôle d'attitude d'un satellite rigide, gouverné par des rétrofusées, où les équations décrivant le système s'écrivent dans un repère mobile par :

$$\dot{g}(t) = S(\omega(t)) g(t) \quad (2)$$

$$\dot{\omega}(t) = Q(\omega(t)) + B.u(t) \quad (3)$$

Où $g \in SO(3)$ décrit la position (ou attitude) du satellite, le vecteur $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \mathbb{R}^3$ est le vecteur vitesse angulaire et B est une matrice $3 \times m$, constante, décrivant la position des rétrofusées.

$Q(\omega) = (a_1 \omega_2 \omega_3, a_2 \omega_1 \omega_3, a_3 \omega_1 \omega_2)^T$ $a_1, a_3 \geq 0$, $a_2 \leq 0$ et $S = (S_{ij})$ est la matrice antisymétrique telle que : $S_{ii} = 0$, $-S_{12} = S_{21} = \omega_3$, $S_{13} = -S_{31} = \omega_2$, $-S_{23} = S_{32} = \omega_1$.

La deuxième raison est : les travaux de J. Baillieul [1] et [2] nous ont laissé supposer que l'on peut généraliser certaines propriétés des systèmes linéaires, à des systèmes de la forme (3) du fait qu'elles ne sont pas dues à leur structure linéaire mais à leur homogénéités.

Dans [3], nous avons résolu le problème de réalisation minimale pour le système (1), initialisé par $x(0) = 0$, observé par une fonction d'observation linéaire. Ceci en généralisant la théorie de la réalisation minimale pour les systèmes linéaires, à toute une famille de systèmes polynomiaux homogènes.

Dans cet article, on étudie le problème de classification des systèmes quadratiques, $C = \{(Q, B)\}$.

Deux systèmes quadratiques (Q, B) et (Q', B') de \mathbb{R}^n sont dits isomorphes s'il existe $P \in G_d = GL(n, \mathbb{R})$ tel que :

$$Q' = P * Q, B' = P * B \quad (4)$$

$$\text{Où } P * Q = P^{-1} \cdot Q \circ P, P * B = P^{-1} \cdot B,$$

Deux systèmes quadratiques (Q, B) et (Q', B') de \mathbb{R}^n sont dits feed-back équivalents s'il existe $P \in GL(n, \mathbb{R})$ et un feed-back $u = \alpha(x) + \beta.u'$, où α est une application de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m dont chaque composante est une forme quadratique et $\beta \in GL(m, \mathbb{R})$, tels que :

$$Q' = P^{-1} \cdot (Q + B \cdot \alpha) \circ P ; B' = P^{-1} \cdot (B \cdot \beta) \quad (5)$$

Cette action, induit sur les triplets (P, α, β) une structure de groupe de Lie notée G_f dont la multiplication est donnée par :

$$(P_2, \alpha_2, \beta_2) \cdot (P_1, \alpha_1, \beta_1) = (P_1, P_2, \alpha_1 + \beta_1 \cdot \alpha_2 \circ P_1^{-1}, \beta_1 \cdot \beta_2) \quad (6)$$

Cela revient à classifier les systèmes quadratiques par rapport à tous les difféomorphismes et tous les feed-back qui préservent la structure quadratique.

Rappelons la méthodologie utilisée pour résoudre le problème de feed-back équivalence pour les systèmes linéaires.

Dans une première étape, on les classifie par rapport à des changements de coordonnées linéaires [10]. Dans une seconde étape, on résout le problème d'équivalence (locale) par feed-back d'un système non linéaire avec un système linéaire [6].

On se propose d'appliquer la même démarche pour les systèmes quadratiques. L'objet de cet article étant d'étudier pour les systèmes quadratiques le problème de G_f -classification qui correspond à la première étape du cas linéaire.

En théorie des invariants [9], étudier un problème de classification consiste à résoudre les trois problèmes suivants :

- (i) Calcul des invariants
- (ii) Donner des formes canoniques
- (iii) Etudier la structure de l'espace des orbites.

Il est évident que les problèmes (i) et (ii) sont liés, les invariants étant par définition les fonctions définies sur C qui se projettent sur l'espace quotient. Le point (iii) revient à étudier les trajectoires singulières.

Le feed-back classification pour les systèmes quadratiques n'a rien de commun avec la classification par feed-back des systèmes linéaires. Au contraire, c'est un problème suffisamment général pour étudier le problème de classification par feed-back pour les systèmes non linéaires généraux. Par ailleurs, on montre que ce problème est lié à une classification linéaire d'une paire de tenseurs. Cette relation permet de calculer des invariants par feed-back.

Vu le manque de place, nous n'allons pas développer l'aspect théorique du problème de feed-back équivalence

pour les systèmes quadratiques qui est détaillé dans [7] mais se contenter de l'esquisser brièvement dans le paragraphe suivant.

2 - Le problème de feed-back équivalence dans $C = \{(Q, B)\}$

2.1 - Définitions

Soit E, F deux espaces vectoriels réels et G un groupe de Lie agissant linéairement sur E et F . Soit c un caractère homomorphisme de G dans $\mathbb{R} - \{0\}$. Un semi-invariant pour l'action de G sur E , de poids c est une application $l : E \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\forall g \in G, \forall x \in E,$

$$l(g.x) = c(g).l(x).$$

Si $c = 1$, on dit que l est un invariant. Un semi-covariant pour les actions de G sur E et f de poids c est une application

$$l : E \rightarrow F, \text{ telle que : } \forall g \in G, \forall x \in E,$$

$$l(g.x) = c(g).g.l(x).$$

C'est un covariant si $c = 1$.

Introduisons maintenant le concept de trajectoire singulière qui est nécessaire à la compréhension du problème de feed-back équivalence. Soit un système de \mathbb{R}^n , décrit par :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad (7)$$

Où f est une application C^1 de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ dans \mathbb{R}^n .

La classe des contrôles admissibles, U , est l'ensemble des applications mesurables bornées de $[0, T]$ dans \mathbb{R}^m . Munissons cet ensemble de la norme L^α , c'est à dire

si $u \in U, \|u\| = \sup |u(t)| \text{ } t \in [0, T]$. Soit u_0 un contrôle défini sur $[0, T]$ et notons $x(t, x_0, u_0)$ la réponse de l'équation (7) telle que $x(0) = x_0$.

Supposons que la trajectoire $x(t, x_0, u_0)$ est définie sur $[0, T]$. Fixons $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $T > 0$. L'application entrée-sortie $E^{x_0, T}$ est l'application : $u(\cdot) \rightarrow x(T, x_0, u_0)$. Elle est bien définie sur un voisinage V de u_0 .

2.3 - Proposition

Soit $p \in \mathbb{R}^n$ différent de 0 et notons H l'application de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n - \{0\} \times \mathbb{R}^m$ dans \mathbb{R} définie par :

$$H(x, p, u) = \langle p, f(x, u) \rangle, \quad (8)$$

Alors, la trajectoire $x(t, x_0, u)$, notée $x(t)$, est singulière sur $[0, T]$ si et seulement si il existe $p(t) \in \mathbb{R}^n$, différent de 0 tel que les équations suivantes sont satisfaites pour presque tout $t \in [0, T]$.

$$\dot{\bar{x}}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(\bar{x}(t), \bar{p}(t), \bar{u}(t)). \quad (9)$$

$$\dot{\bar{p}}(t) = - \frac{\partial H}{\partial x}(\bar{x}(t), \bar{p}(t), \bar{u}(t)). \quad (10)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u}(\bar{x}(t), \bar{p}(t), \bar{u}(t)) = 0 \quad (11)$$

2.4 - Définitions et notations

Une solution (x, p) de (9), (10), (11) s'appelle une *extrémale* et le contrôle associé est dit *extrémal*. La fonction H s'appelle le *Hamiltonien* et le vecteur p est le *vecteur adjoint*.

Le crochet de Lie de deux champs de vecteurs de \mathbb{R}^n , Z_1, Z_2 , étant calculé avec la convention :

$$[Z_1, Z_2](x) = \frac{\partial Z_2}{\partial x}(x).Z_1(x) - \frac{\partial Z_1}{\partial x}(x).Z_2(x), \quad (12)$$

Désignons par $b_i, i = 1, \dots, m$, les colonnes de B .

Notons A l'ensemble :

$$\{(x, p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \text{ tel que } \langle p, b_i \rangle = 0, \forall i = 1, \dots, m\},$$

A s'appelle la *surface de commutation* et soit A_1 le sous-ensemble de A défini par

$$\{(x, p), \langle p, b_i \rangle = \langle p, [Q, b_i](x) \rangle = 0, \forall i = 1, \dots, m\}.$$

Notons $L(x, p)$ la matrice $m \times 1$, (L_i) , où $L_i = \langle p, [Q, [Q, b_i]](x) \rangle$ et $O(x, p)$ la matrice symétrique $m \times m$, (O_{ij}) , où $O_{ij} = \langle p, [b_j, [Q, b_i]] \rangle$.

Désignons par S le sous-ensemble de \mathbb{R}^{2n} , tel que $\det O(x, p) = 0$ et $S_1 = A \cap S$. Soit \hat{u} l'application définie sur \mathbb{R}^{2n}/S par $\hat{u}(x, p) = -O^{-1}(x, p).L(x, p)$ et posons :

$$H = \langle p, Q + B.\hat{u} \rangle.$$

Soit (Q, B) un système quadratique. Une extrémale

d'ordre minimale est une extrémale contenue dans A_1/S_1 .

2.5 - Proposition

Les extrémales d'ordre minimal, $x(t)$, $p(t)$, $t \in [0, T]$ sont les solutions de :

$$x'(t) = \frac{\partial H}{\partial p} ; \quad p'(t) = - \frac{\partial H}{\partial x} , \quad (x, p) \in \Sigma_1/S_1 ; \quad (13).$$

2.6 - Définitions

Notons C_m l'ensemble des systèmes quadratiques sur R^n , à m entrées, identifié avec l'e.v. $R^{n \cdot n(n+1)/2} \times R^{m \cdot n}$.

Soit C_m^n le sous-ensemble de C_m tel que : $\text{rang}(B) = m$ et la restriction de O à A_1 n'est pas identiquement nulle.

Soit X_H le champ de vecteurs sur A_1/S défini par (13). Notons B la distribution plate de R^n associée à B , c'est à dire l'application : $x \rightarrow \{b_1, \dots, b_m\}$ e.v.

Soit λ l'application définie sur C_m^n par : $(Q, B) \rightarrow (X_H, B)$ et C l'image de C_m^n par λ .

Définissons l'action du groupe feed-back G_f sur (X_H, B) . Soit $P \in GL(n, R)$, relevons P en un changement de coordonnées symplectique, sur R^{2n} , défini par :

$$(y, q) \in \bar{R}^{2n} \rightarrow (x, p) \in R^{2n}, \quad \text{où } x = P \cdot y, \quad p = q \cdot P^{-1}$$

(p et q sont des vecteurs lignes).

Observons que X_H est la restriction à A_1/S_1 d'une équation différentielle Hamiltonienne sur R^{2n} de l'Hamiltonien H .

L'action de P sur H est définie par : $P \cdot H = H \circ P^{-1}$.

Par ailleurs P agit sur la distribution B par la règle : $B \rightarrow P \cdot B = \{P^{-1} \cdot B\}$ e.v.

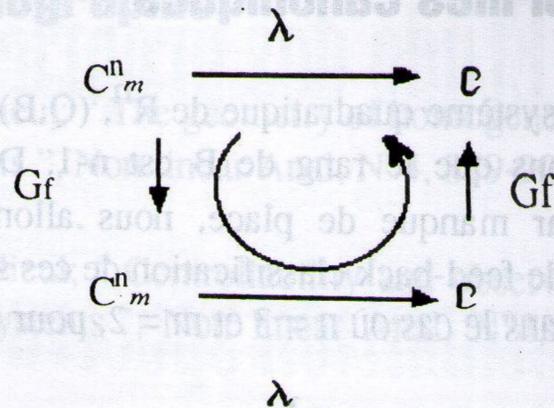
Soit (I_n, α, β) un feed-back, définissons son action sur EC par : $(I_n, \alpha, \beta) \cdot (X_H, B) = (X_H, B)$.

Puisque G_f est engendrée par des éléments de la forme (P, O, I_m) et (I_n, α, β) l'action de G_f sur C est bien définie.

L'action de (P, α, β) est réduite à un changement linéaire de coordonnée induit par P sur la paire de tenseurs (X_H, B) .

2.7 - Théorème

Le diagramme suivant est commutatif :



En d'autres termes, λ est un covariant pour les actions respectives de G_f sur C_m^n et C .

2.8 - Définitions

Soit G_d^B le sous-groupe de $G_d = GL(n, R)$ défini par : $P \in G_d^B$ s'il existe $\beta \in GL(m, R)$ tel que $P \cdot B = B \cdot \beta$. En d'autres termes, P laisse la distribution B invariante.

Deux systèmes (Q, B) et (Q', B') sont dits B -reliés si :

- (i) $B = B'$
- (ii) $\exists P \in G_d^B$ tel que $Q' = P * Q \pmod{B}$, i.e. $\forall x \in R^n, (Q' - P * Q)(x) \in B$.

2.9 - Théorème

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) (Q, B) et (Q', B') sont feed-back équivalents
- (ii) Il existe $P \in GL(n, R)$ tel que :
 - a) $P \cdot B = B'$
 - b) $(P * Q, P * B)$ et (Q', B') sont B' -reliés.

2.10 - Conclusion

Nous avons maintenant les outils théoriques pour étudier le problème de feed-back équivalence pour les systèmes quadratiques.

Le théorème 2.7 permet de calculer des feed-back invariants comme des invariants pour la classification linéaire du champ de vecteurs X_H . C'est un problème classique de classification de tenseurs et on peut utiliser tous les algorithmes existants [6].

Le théorème 2.9 permet de calculer des formes canoniques, c'est un problème de représentation du groupe G_d^B .

3 - Formes canoniques

Soit le système quadratique de \mathbb{R}^n , (Q, B) , à m entrées et supposons que le rang de B est $n-1$. Dans ce paragraphe, par manque de place, nous allons étudier le problème de feed-back classification de ces systèmes uniquement dans le cas où $n = 3$ et $m = 2$, pour les autres cas voir [7].

Soit donc le système \mathbb{R}^3 :

$$v'(t) = Q(v(t)) + u_1 \cdot b_1 + u_2 \cdot b_2 \quad (14)$$

Où $v \in \mathbb{R}^3$, $b_1, b_2 \in \mathbb{R}^3$ indépendants.

Introduisons l'espace vectoriel :

$$L = \bigcap \{v \in \mathbb{R}^3, \det(b_1, b_2, [Q, b_i](v)) = 0\} \quad i=1,2$$

D'après 2.4, les trajectoires singulières sont entièrement contenues dans L .

Désignons par (x, y, z) les coordonnées de v et notons : $Q(v) = v^t \cdot A \cdot v$, où $A = (a_{ij})$; $i, j = 1, 2, 3$, $d = \det(A)$, $d_k = \det(A_k)$ où $A_k = (a_{ij})$ avec $i, j > k$.

3.1 - Proposition

(Q, b_1, b_2) est équivalent à (Q', b'_1, b'_2) , avec :

$Q' = (Q'_1, 0, 0)$, $b'_1 = (0, 1, 0)$, $b'_2 = (0, 0, 1)$ où Q'_1 a

l'une des formes normales présentées dans le tableau suivant.

Les semi-invariants algébriques pour l'action du groupe G_d^B suivants caractérisent entièrement les orbites du système :

a) d, d_1, a_{11}, T et $N =$ ou \neq de 0.

b) Signe de $d_1, (a_{11}, d)$ et (a_{11}, d_2) .

Formes canoniques + invariant alg

$d_1 \neq 0$

a) $d \neq 0 \Leftrightarrow$ Orbites ouvertes :

(i) $d_1 > 0$

a1) $Q'_1 = x^2 + \varepsilon \cdot (y^2 + z^2)$.

($\varepsilon =$ signe de $a_{11} \cdot d = \pm 1$)

(ii) $d_1 < 0$

a2) $Q'_1 = x^2 + y^2 - z^2$

b) $d = 0$

(i) $d_1 > 0$

b1) $Q'_1 = y^2 + z^2$

(ii) $d_1 < 0$

b2) $Q'_1 = y^2 - z^2$

$d_1 = 0$ et $T \neq 0$

(i) $N \neq 0$

c1) $Q'_1 = x \cdot y + z^2$.

(ii) $N = 0$

Si $a_{11} \neq 0$ d1) $Q'_1 = x^2 + \varepsilon \cdot z^2$.

($\varepsilon =$ signe de $a_{11} \cdot d_2 = \pm 1$)

Si $a_{11} = 0$ d2) $Q'_1 = z^2, \varepsilon = 0$

$d_1 = 0$ et $T = 0$

(i) $N \neq 0$

e1) $Q'_1 = x \cdot y$

(ii) $N = 0$

Si $a_{11} \neq 0$ f1) $Q'_1 = x^2$

Si $a_{11} = 0$ f1) $Q'_1 = 0$

Interprétation Géométrique

Cas où $\dim(L \cap B) = 0$

$\dim L = 1, \mathbb{R}^3 = L \oplus B$

Flût singulier (sur L) :



Statut d'optimalité des trajectoires singulières

(problème du temps minimal) :

a1) $\varepsilon = -1, +1 \Leftrightarrow$ rapide, lente (resp.).

a2) = localement contrôlable.

$\dim L = 1, \mathbb{R}^3 = L \oplus B$

Flût singulier (sur L) :



0

Pour b2)

chaque trajectoire est localement contrôlable

Cas dégénérés avec $\dim(L \cap B) = 1$

$\dim L = 1, B \supset L$.

Flût singulier : $y' = u_1, x' = z' = 0$.

$\dim L = 2, \mathbb{R}^3 = L + B$

Flût singulier : $x' = \varepsilon \cdot x^2, y' = u_1, z' = 0$.

Orbites séparées par :

Nature du flût singulier

et statut d'optimalité pour les 2 orbites d_1).

Cas dégénérés avec $\dim(L \cap B) = 2$

$\dim L = 2 (L = B)$

Flût singulier : $x' = 0, y' = u_1, z' = u_2$

$\dim L = 3 (L = \mathbb{R}^3)$

Flût singulier : f1) $x' = x^2, y' = u_1, z' = u_2$

f2) $x' = 0, y' = u_1, z' = u_2$.

Preuve Voir [7]

3.2 - Commentaires

Génériquement L est de dimension 1. C'est précisément cette direction singulière qui est choisie pour compléter B et former une base pour notre forme canonique.

Le flût singulier sur L n'est pas assez riche pour séparer les orbites. Les autres invariants sont associés au statut d'optimalité des trajectoires singulières pour le problème du temps minimal.

Les cas non faiblement contrôlable correspondent à la situation où la dimension de l'algèbre de Lie engendrée par $\{Q, b_1, b_2\}$, évaluée en 0 est 2 voir [7] pour les détails complémentaires.

3.3 - Exemple

Considérons le problème de contrôle de la vitesse angulaire d'un satellite rigide, gouverné par deux couples de rétrofusées.

Le système s'écrit, après un changement de coordonnées :

$$\begin{aligned} x' &= y.z + u_1.b_1^1 + u_2.b_2^1 \\ y' &= -x.z + u_1.b_1^2 + u_2.b_2^2 \\ z' &= x.y + u_1.b_1^3 + u_2.b_2^3 \end{aligned}$$

Le système est faiblement contrôlable si et seulement si $\{b_1, b_2\}$ e.v. est différent des plans : $x = \pm z$ (voir [7]).

Dans ce cas, les calculs montrent que selon le choix de $\{b_1, b_2\}$ les seules formes canoniques possibles sont les suivantes :

$$Q' = x^2 + y^2 - z^2 \quad \text{ou} \quad Q' = y^2 - z^2.$$

qui correspondent toutes les deux à des systèmes contrôlés.

4 - Conclusion

Nous avons donc résolu le problème de calcul des formes canoniques génériques, dans le cas $m = n - 1$.

Les autres cas sont étudiés dans [7]. On note que les cas où $1 < m < n - 1$, sont plus compliqués et on est confronté à des problèmes de recherche de solutions réelles d'une famille d'équations algébriques.

5 - Bibliographie

[1] J. Baillieul; "The geometry of homogeneous polynomial systems", Non linear Anal, N°4, 879-900, 1990.

[2] J. Baillieul; "Controllability and observability of polynomial systems", Non linear Anal, N°4, 543-552, 1981.

[3] B. Bonnard et H. Tebbikh; "Réalizations polynômiales Homogènes". R.A.I.R.O. APII, vol. 24, n°4, 1990.

[4] P.E. Crouch, "Spacecraft attitude control and stabilisation. Applications of geometric control theory to rigid body models", I.E.E.E Trans. Aut. Control, 29, 4, 321-331, 1984.

[5] J.H. Grace and A. Young; "The algebra of invariants". Chelsea Pub. Company, 1903.

[6] B. Jakubczyck and W. Respondek; "On linearisation of control systems", Bull. Ac. pol. Sciences, vol XXVIII, N°9 - 10, 517 - 522, 1980.

[7] H. Tebbikh; "Structure et commande des systèmes polynômiaux Homogènes", Thèse I.N.P.G soutenue le 13 octobre 1989, L.A. Grenoble.

[8] H. Tebbikh; "Un survey sur le problème de commande d'attitude d'un satellite", Rapport de D.E.A., I.N.P.G. 1885, L.A. Grenoble.

[9] H. Weyl; "Classical groups", Princeton University Press 1939.

[10] W.M. Wonham; "Linear Multivariable Control : a geometric approach", Appl. of Maths, N°10, Springer Verlag; 1979.

[11] W.I. Vulve and K.S. Sibirskii; "Geometric classification of quadratic differential equations", Differential 'ny Uravneniya, 13, 5, 803-814, 1977.

(* Centre universitaire de Guelma
BP 401, 24000 Guelma, Algérie