

Simulation de la couche limite hypersonique autour d'un corps émoussé du type sphère-cylindre

Allaoua Boulahia¹, Mohammed Afrid² et Malki Belkhiri¹

¹⁾ Département de Génie Mécanique, Institut des Sciences technologiques, Centre Universitaire Larbi Ben M'Hidi, Oum El Bouaghi 04000, Algerie.

²⁾ Laboratoire de physique Energétique, Université Frères Mentouri, Constantine 25000, Algerie.

Accepté le 28/02/2010

ملخص

إن إحدى القيود الرئيسية لتصميم أبعاد الحماية الحرارية للمركبات الفضائية (Hypersonic) ترتبط أساساً بالتزايد المفرط في تسخين جدرانها. الأسباب المختلفة التي أدت إلى هذه الزيادة في التسخين هي وجود الموجات الصدمية القوية في قلب الجريان، التبدد اللزج بطبقات الحد و المؤثرات الحرارية الكيميائية. يعتبر الفرق الكبير في درجة الحرارة بين جدران المركبة والجريان مصدر تدفق لتسخين داخلي الذي يرسل جزئياً عبر الطبقة الحدية إلى حيطان المركبة. تتبثق إحدى التقنيات الرياضية العددية التي تسمح مثل هذا التنبؤ و المحاكاة العددية لكامل طبقة الموجة الصدمية من طرق الحل للطبقات الحدية (Hypersonic) التي تستند على صنف المخططات الذي يملك خاصية التغير الكلي المتناقص (TVD). يتعلق هذا البحث بالمحاكاة العددية لتدفق جريان لزج و تفاعلي (Hypersonic) حول إحدى تصاميم الهندسية الخاصة بالقذائف والصواريخ والتي عادة تكون على شكل كروي – أسطواني، حيث الهدف هو دراسة التغيرات في التدفق الحراري، الضغط، الإجهاد وتركيز بعض مكونات التدفق الهوائي و التحقق في حساسية الطبقة الحدية الناتجة عن الجريان (Hypersonic) و ذلك بالنسبة إلى درجة حرارة الجدار، النماذج المختلفة للتمثيلات المتعلقة بالديناميكا الحرارية و التفاعلات الكيميائية.

الكلمات المفتاحية: سائل حركي؛ جريان تفاعلي؛ موجات الصدمة؛ حرار وكيميائية.

Résumé

Une des contraintes majeures intervenant dans la conception de la protection thermique d'engin spatial hypersonique est liée à l'échauffement de la paroi. Elle est due principalement à la présence de chocs forts au sein de l'écoulement, à la dissipation visqueuse dans les couches limites et aux effets de thermo-chimie. L'importance de la différence de température entre la paroi et l'écoulement est source de flux de chaleur internes, transmis en partie à la paroi à travers la couche limite. Un des outils numériques qui permet une telle prédiction et simule la couche de choc complète est constitué par les méthodes de résolution des couches limites hypersoniques à la base des schémas à propriété TVD. Cette recherche concerne la simulation numérique d'écoulements hypersoniques visqueux et réactifs autour de configuration du type sphère – cylindre. Le but est d'étudier les variations du flux de chaleur, de la pression, des contraintes et des concentrations de certaines espèces ; et d'analyser la sensibilité de la couche limite hypersonique à la température de la paroi, aux différents modèles thermodynamiques et chimiques.

Mots clés : fluide dynamique; écoulement réactif hypersonique; ondes de choc; thermo-chimie.

Abstract

One of the major constraints to conceive thermal protection of hypersonic space vehicles is the wall overheating. Sources of this overheating are mainly due to: the presence of strong shocks within the flow, viscous dissipation in the boundary layer and thermo-chemistry effects. The large temperature gap between the wall and the flow is source of internal heating flux which is partially transmitted across the boundary layer to the vehicle's walls. One of the numerical tools that permit such prediction and simulate the entire shock layer is made up from hypersonic boundary layers solving methods, based on TVD property. This research concerns the numerical simulation of viscous and reactive hypersonic flows over sphere – cylinder configuration body. The purpose is to investigate on changes of the flux of the heat, the pressure, constraints and concentrations of some air species; and to analyze the sensibility of the hypersonic boundary layer with respect to the wall temperature, various thermodynamic and chemical reactions models.

Key words: fluid dynamics; hypersonic reactive flows; shock waves; thermo-chemistry.

Auteur correspondant: all_boulahia@yahoo.fr (Allaoua Boulahia)

1. INTRODUCTION

Le développement des grands projets de véhicules spatiaux a entraîné un regain d'intérêt pour le domaine hypersonique. Une des contraintes majeure intervenant dans la conception d'un véhicule hypersonique est liée à l'échauffement de la paroi. Différentes causes sont à l'origine de cet échauffement, parmi lesquelles nous pouvons citer : la dissipation visqueuse dans les couches limites, le rayonnement thermique, la présence d'ondes de chocs fortes, la transition vers la turbulence et les instabilités (Görtler) sur les parois courbées et les effets de thermochimie dont une attention particulière leur a été portée dans cette étude. Au cours d'une rentrée atmosphérique, une onde de choc forte, détachée entoure l'appareil. A travers cette onde de choc, l'air est brusquement ralenti et une grande part de l'énergie cinétique se transforme en énergie thermique. Et de ce fait, la température régnant dans l'écoulement devient très élevée. Les conséquences de hauts niveaux de température sont multiples ; on peut relever en particulier :

1. Une modification des propriétés thermodynamiques de l'air due à l'excitation des degrés de liberté internes des particules (l'air ne peut plus être assimilé à un gaz idéal). L'énergie interne ou enthalpie ne sont plus simplement proportionnelle à la température, Il faut prendre en compte les différents modes de stockage d'énergie d'une molécule (translation, rotation, excitation électronique et vibration).

2. L'apparition de réactions chimiques entre les différents composants de l'air (dissociation et ionisation). Le retour à l'état d'équilibre (thermodynamique ou chimique) s'effectue par l'intermédiaire des collisions entre particules. On peut d'ores et déjà souligner que l'écoulement peut

être localement en déséquilibre chimique et thermodynamique. En effet, compte tenu des vitesses et des températures mises en jeu, l'ajustement vers l'état d'équilibre des propriétés thermodynamiques ou de la composition chimique, peut demander un temps similaire au temps de déplacement du fluide dans une zone donnée de l'écoulement. D'autre part, pour des nombres de Mach hypersoniques, la couche de choc (zone comprise entre l'onde de choc et la paroi de l'appareil) est mince, l'onde de choc est collée à la paroi. Dans la région du nez, la courbure de l'onde est très intense et conduit à la présence d'une couche entropique, siège de forts gradients d'entropie qui affecte le développement de la couche limite. Une autre conséquence des valeurs élevées du nombre de Mach, liée également aux valeurs faibles ou modérées des nombres de Reynolds des écoulements considérés, est l'existence de zones de forte interaction visqueuse due à l'épaississement de la couche limite et à la faible épaisseur de la couche de choc. Un autre effet important de l'écoulement d'un mélange gazeux est la participation de la paroi aux réactions chimiques du mélange gazeux. Le pouvoir catalytique de la paroi influe sur le flux de chaleur pariétal car la composition du mélange est localement modifiée à la paroi. D'une part, l'état énergétique du mélange gazeux, d'autre part, les gradients de concentrations donc le transport par diffusion des espèces est changé. Dans le cadre des limitations résumées précédemment, on a donc développé des méthodes de simulation de calcul de couche limite hypersonique avec effet de gaz réel, générées par des écoulements avec flux de chaleur pariétaux autour de corps émoussés. On a porté l'attention plus particulièrement sur l'influence des modèles utilisés pour décrire les effets de gaz réel, à savoir les modèles de réactions chimiques, de

thermodynamique et de coefficients de transport.

2. MODELISATION

L'étude en vol, difficilement réalisable et l'existence dans le domaine de l'aéro-thermo-chimie de la diversité, de l'intensité des phénomènes mis en jeu ainsi que la complexité des géométries étudiées dans les écoulements hypersoniques, laisse présager de la difficulté à les reproduire par simulation numérique. La simulation au sol est toujours délicate mais largement utilisée du point de vue fondamental, elle est toujours tributaire de la validité des modèles utilisés, de l'efficacité et la précision des méthodes numériques employées.

Pour des applications hypersoniques de type rentrée atmosphérique, nous avons opté d'étudier la résolution numérique des équations de Navier – Stokes pour un écoulement bidimensionnel (plan et axisymétrique), laminaire, en déséquilibre chimique. Nous avons par ailleurs fait l'hypothèse d'un écoulement à l'équilibre vibrationnel pour simplifier notablement le problème et d'en limiter la taille. En contre partie, les températures juste derrière l'onde de choc sont plus élevées que dans le cas du déséquilibre thermique où la température de vibration reste figée à travers l'onde de choc. Les taux de production chimiques sont ainsi surestimés près de l'onde de choc, ce qui a augmenté la raideur des équations [1]. D'autre part, les phénomènes d'ionisation ont été négligés : pour des vitesses amont jusqu'à 6000 ms^{-1} , seul le monoxyde d'azote est concerné, le taux d'ionisation étant de l'ordre de 1% [2]. La présence d'électrons libres a peu d'influence sur l'écoulement mais peut conduire à des effets de «Black out» qui sont en dehors de ce travail. De même, le rayonnement ne devient important qu'à partir de 8000 ms^{-1} [3] et ne pourra être étudié ici. L'air est donc considéré comme un mélange de

cinq gaz parfaits (N_2 , O_2 , N , O , NO) en déséquilibre chimique. Enfin, les écoulements étudiés présentent une direction privilégiée (la direction longitudinale) selon laquelle les gradients intervenant dans les termes visqueux sont faibles devant les gradients transversaux et seront négligés : c'est l'hypothèse de la couche cisailée mince. Ainsi nous allons présenter les équations qui gouvernent l'écoulement, puis nous donnons la représentation thermodynamique du mélange. Chaque constituant suit en effet une loi d'état qui prend en compte les dérivations par rapport à un gaz idéal. ensuite notre intérêt sera dirigé vers les coefficients de transport dont l'expression a été modifiée pour tenir compte des hautes températures avant d'aborder la cinétique chimique et l'étude de certains modèles chimiques simplifiés tel que : GARDINER, NASA, PARK, STRAUB, etc. [4-6]. Le phénomène de catalyse est décrit car dans le cas d'écoulements réactifs, la paroi peut participer aux réactions chimiques. Enfin nous dressons le bilan récapitulant le jeu final d'équation à étudier les équations de l'aéro-thermo chimie sont souvent appelées et par souci de clarté équations de Navier Stokes étendues à des écoulements réactifs [7].

En définissant la vitesse moyenne et la masse volumique de l'écoulement

$$\begin{aligned} u &= \sum_{I=1}^{ns} \frac{\rho_I}{\rho} u_I, \\ v &= \sum_{I=1}^{ns} \frac{\rho_I}{\rho} v_I, \quad \rho = \sum_{I=1}^{ns} \rho_I \end{aligned} \quad (1)$$

L'équation de bilan s'écrit alors sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_I}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_I u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_I v)}{\partial y} \\ = - \frac{\partial(\rho_I u_{DI})}{\partial x} - \frac{\partial(\rho_I v_{DI})}{\partial y} + \omega_I \end{aligned} \quad (2)$$

Où ns est le nombre d'espèces, t représente la variable temporelle, x, y : les directions d'espace, ρ_I la masse volumique de l'espèce I , u_I, v_I et u_{DI}, v_{DI} respectivement les composantes de la vitesse et de la vitesse de diffusion et ω_I le taux de production par réaction chimique. La sommation de toutes les équations de bilan conduit à l'équation de conservation de la masse totale (du fait de la conservation de la masse on a $\sum_{I=1}^{ns} \omega_I = 0$) La sommation des équations de quantité de mouvement élémentaires conduit à :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 + P)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} \\ = -\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \\ \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2 + P)}{\partial y} \\ = -\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \end{aligned} \quad (3)$$

Où P est la pression totale de l'écoulement et τ le tenseur des contraintes visqueuses connu pour les équations de Navier –Stokes sous la formulation suivante :

$$\tau_{ij} = -\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \left(\sum_{k=1}^2 \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \right) \quad (4)$$

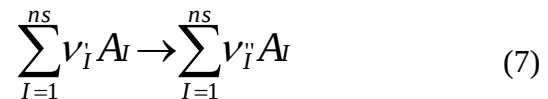
Tel que x_i ou u_j et u_i ou v_j sont respectivement la direction et la vitesse dans la direction. L'équation de conservation de l'énergie totale du mélange est obtenue de façon similaire, par sommation des équations pour chacune des énergies partielles :

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial[u(E+P)]}{\partial x} + \frac{\partial[v(E+P)]}{\partial y} \\ = -\frac{\partial \phi_x}{\partial x} - \frac{\partial \phi_y}{\partial y} - \frac{\partial(u\tau_{xx} + v\tau_{xy})}{\partial x} \\ - \frac{\partial(u\tau_{yx} + v\tau_{yy})}{\partial y} \end{aligned} \quad (5)$$

Où E est l'énergie totale du mélange et ϕ le flux de chaleur. On obtient ainsi un système fermé de $ns+3$ équations pour $ns+3$ inconnues ($\rho_1, \dots, \rho_{ns}, \rho u, \rho v, E$) ; à condition de modéliser les termes de diffusion par :

$$\vec{\phi} = -\frac{\mu}{Pr} \left(C_{Pf} \overrightarrow{gradT} + Le \sum_{I=1}^{ns} h_I \overrightarrow{gradC_I} \right) \quad (6)$$

Où Pr et Le représentent les nombres sans dimensions respectivement de Prandtl et Lewis, $C_{Pf} = \sum_{I=1}^{ns} C_I$ est la chaleur spécifique figée à pression constante, et h_I représente l'enthalpie partielle de l'espèce I . la viscosité du mélange μ se calcule selon la formule de Wilke [8]. Les termes de productions chimiques ω_I qui font appel à la fois à la cinétique chimique théorique (théorie des collisions) et aux résultats expérimentaux qu'on peut déterminer à partir des réactions du type :



Soit :

$$\omega_I = M_I \sum_r (\nu_I' - \nu_I'') \left[K_{ir} \prod_j n_j^{\nu_j'} - K_{dr} \prod_j n_j^{\nu_j''} \right] \quad (8)$$

Où :

A_I : les espèces chimiques

ν_I', ν_I'' : les coefficients stœchiométriques pour les réactifs (resp. produits)

n_I : nombre de moles par unité de volume

M_I : la masse molaire de l'espèce I

K_{ir}, K_{dr} : Constantes de réaction directe et inverse (Arrhenius 1889) et donner la représentation thermodynamique du système suivant un modèle polynomial qui tient compte de l'ensemble des contributions, et relie l'enthalpie, la température, les fractions massiques et l'énergie internes du mélange. quant à l'équation d'état sa formulation est donnée conformément à la loi de Dalton à

savoir : $P = \left(\sum_{I=1}^{ns} \rho_I R_I \right) T$. Pour traiter des

écoulements autour de forme arbitraire, il est plus approprié d'introduire un système de coordonnées curvilignes. De ce fait, nous allons établir le jeu final d'équations à discrétiser. Les équations de bilan sont données sous une forme vectorielle et commune aux écoulements bidimensionnels plans et axisymétriques, en introduisant le paramètre a ($a = 0$: cas plan et $a = 1$: cas axisymétrique). Lorsque le nombre de Reynolds est assez élevé, l'étude d'écoulement visqueux en présence d'une paroi nécessite une bonne représentation des termes visqueux dans une mince couche près de la paroi où les gradients normaux sont importants, les écoulements considérés présentent une direction privilégiée et l'hypothèse de couche de cisaillement mince est très appropriée. le système d'équation obtenu, appelé équations de Navier Stokes dans l'approximation de couche mince, reste de nature mixte hyperbolique parabolique en temps. Cette approximation, contrairement aux équations de couche limite, retient toutes les propriétés de l'écoulement non visqueux. Toute fois, l'approximation de couche mince impose que les maillages utilisés soient "du type couche limite". En négligeant donc dans les termes visqueux les dérivées selon ξ devant celle de η on obtient le jeu suivant d'équations :

$$\begin{aligned} \frac{1}{J} \frac{\partial(y^a U)}{\partial t} + \frac{\partial(y^a F)}{\partial \xi} + \frac{\partial(y^a G)}{\partial \eta} + \frac{a}{J} P = \\ = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial(y^a S_{v_1})}{\partial \eta} + \frac{a}{J} \frac{1}{\text{Re}} S_{v_3} + \frac{y^a}{J} S \end{aligned} \quad (9)$$

Où ξ et η ont deux directions d'espace, t la variable temporelle, J le Jacobien, U le vecteur des variables principales, F et G , les flux convectifs. P le terme supplémentaire en axisymétrie proportionnel à la pression, S_{v_1} et S_{v_3} la synthèse des flux diffusifs et S le vecteur des termes sources [voir annexe]. Nous faisons remarquer que ces vecteurs sont de dimension $(ns+3)$ où ns est le nombre total d'espèces. enfin le système d'équations si dessus constitue le jeu final d'équations à discrétiser.

3. CONDITIONS AUX LIMITES A LA PAROI

Lorsque le glissement n'est pas pris en compte (nombre de Knudsen $Kn < <$) la condition d'adhérence à la paroi se traduit par : $u=0, v=0$. par ailleurs, dans cette étude, les parois sont supposées adiabatiques et leurs températures sont considérées froides, [800 - 1500 °K]. On utilise dans ce cas la condition : $n \cdot \phi = 0$ où n est la direction normale au corps et ϕ le flux de chaleur. Les conditions précédentes imposent $(ns+2)$ relations à la paroi. La relation manquante est obtenue à partir de l'équation de quantité de mouvement selon la direction normale à la paroi. Par conséquent, L'équation devient :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{4}{3} \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (11)$$

A nombre de Re suffisamment élevé, la pression pouvait être extrapolée à partir de la condition de type couche

limite : $\partial P / \partial n = 0$. Les phénomènes de catalyse agissent essentiellement comme accélérateurs des réactions chimiques. Le catalyseur, qui peut aussi bien être dans une phase gazeuse que solide, agit comme partenaire supplémentaire dans la réaction. En favorisant les réactions de recombinaison à la paroi, il augmente les flux de chaleur pariétaux car ces réactions sont exothermiques. On cherche plutôt des matériaux faiblement catalytiques. La modélisation la plus simple de la catalyse considère le phénomène d'interaction qui engendre la capture des atomes incidents par la paroi. Ce phénomène d'adsorption peut nécessiter un temps suffisamment long pour la formation de molécule. L'effet catalytique de la surface est d'abaisser la barrière d'énergie potentielle, donc de modifier l'énergie d'activation et, par ce biais, de favoriser les réactions. Une fois la recombinaison effectuée, la molécule formée est absorbée par la surface, laissant le site libre pour un nouveau cycle. Pour déterminer le taux de catalyse ; on suppose que toute l'énergie libérée par la recombinaison atomique est transmise à la paroi et la formule associée au taux de recombinaison catalytique [7,8] est donnée par :

$$K_{Pa} = \frac{2\gamma_a}{\gamma_a - 1} \sqrt{\frac{kT}{2\pi m_a}} \quad (12)$$

Où K_{Pa} est une constante associée aux taux de recombinaison catalytique, γ_a représente le nombre d'atomes incidents entrant en collision avec la surface et se recombinant et qui dépend de l'espèce atomique, du matériau de surface et de la température. Pour une paroi catalytique. On a $\gamma_a = 0$ soit $K_{Pa} = 0$. La composante normale à la paroi du flux de diffusion massique est alors nulle. Pour une paroi totalement catalytique, on a $\gamma_a \rightarrow 1$ d'où $K_{Pa} \rightarrow \infty$. Il en résulte que la concentration à la paroi est nulle $C_{aP} = 0$ et le gaz se trouve à l'équilibre chimique à la paroi. Par conséquent, dans ce travail, nous

avons adopté les conditions aux limites suivantes :

- Pour une paroi non catalytique, compte tenu de la loi de Fick [9], [10] pour le flux de diffusion massique : $\partial C_I / \partial n = 0$
- Pour une paroi totalement catalytique $C_I = C_{Ieq}$ où l'indice *eq* indique les grandeurs à l'équilibre chimique.

4. FORMULATION NUMERIQUE

La méthode des volumes finis a été retenue pour résoudre numériquement le système. Le choix d'un traitement totalement implicite et complètement couplé des contributions non visqueuses, visqueuses, et les termes sources a engendré une résolution qui prend en compte toutes les équations simultanément et implicitement. La procédure couplée est préférable pour les applications en fluides visqueux où les problèmes de convergence sont les plus marqués [11]. La discrétisation des termes de diffusion a été réalisée selon un schéma centré. En effet, il faut que dans le cas limite où le nombre de Reynolds tende vers zéro, les termes visqueux sont prépondérants dans l'équation et celle-ci devient de nature parabolique. Le terme Sv_1 est discrétisé à l'interface de même les vecteurs Sv_3 , S (taux de production chimiques des espèces) et enfin le terme source supplémentaire P apparaissant en axisymétrie ont tous été évalués au nœud. Nous avons abordé dans ce contexte la discrétisation explicite en temps d'une équation scalaire hyperbolique (problème de Cauchy) et après quelques réflexions sur les schémas numériques existants [12-17], la classe de schémas à propriété TVD (Total Variation Diminishing) a été retenue pour la discrétisation des termes convectifs retenue [15,18] car ils sont bien adaptés au calcul d'écoulements hypersoniques où existent des ondes de chocs fortes. Ils permettent en effet de capturer les ondes de chocs sans introduire d'oscillation

parasites tout en assurant une bonne précision de la solution [19]. Une forme implicite linéarisée a été obtenue à partir du système implicite non linéarisé déjà préétabli. L'approche conservative a été utilisée pour les termes convectifs. Pour les autres contributions, la linéarisation a été effectuée en écrivant un développement de Taylor.

Nous rappelons ici que le système formé des équations de Navier – Stokes instationnaires dans l'approximation de couche mince a été discrétisé de façon implicite en temps puis linéarisé. Et qu'à partir d'une solution initiale, la recherche de la solution stationnaire du problème s'effectue à l'aide d'une marche en temps, de pas Δt , et nécessite la résolution du système linéaire à chaque pas de temps. Enfin Pour résoudre le système linéaire on a opté pour l'emploi de la méthode de relaxation par ligne dans la direction ξ .

5. RESULTATS ET INTERPRETATIONS

Nous abordons maintenant la présentation des résultats en application des techniques mises en œuvre à différents cas tests mais qui ne font pas l'objet de cette communication ,où nous avons tout d'abord étudié l'influence du choix du schéma TVD (décentré upwind ou symétrique) [11,16] pour la simulation d'écoulements réactifs mono dimensionnel dans un tube à choc dont le but est de permettre une comparaison des différents schémas , en particulier du point de vue de leur précision pour le traitement de gaz inertes ou réactif .Les autres cas tests envisagés concernent des écoulements visqueux réactifs sur différentes géométries bidimensionnelles (double ellipse, sphère et plaque plane) et pour des conditions à l'infini amont variées.

Nous allons exposer au cours de ce travail uniquement l'étude de

l'écoulement autour d'une configuration combinées sphère – cylindre. Pour cette géométrie nous nous sommes intéressés à un cas test pour lequel une comparaison avec des résultats expérimentaux était possible. Ce cas concerne une sphère de 6.35 mm de rayon, prolongée par un cylindre, placée dans l'air à un nombre de Mach $M_\infty=15.3$. [20]. Des sphères ont été tirées dans l'air à grande vitesse. Les résultats se présentent sous forme de distance de détachement de l'onde de choc pour différentes conditions de vol. Des simulations numériques ont été effectuées par Candler [21] pour l'air faiblement ionisé en déséquilibre chimique et thermique et par Flament [22] pour de l'air non ionisé en déséquilibre chimique. Flament a considéré les deux hypothèses d'équilibre et de déséquilibre thermique. Nous présenterons sur ce cas test des résultats globaux sur toute la couche de choc. Les conditions de calcul sont données dans le tableau 1.

Tableau 1. Conditions de calcul pour la sphère à $M_\infty=15.3$

$M_\infty=15.3$	$Re/m = 2.3 \cdot 10^6$	$U_\infty=5280$ m/s
$P_\infty=664$ Pa	$T_\infty = 293$ °K	$H_\infty=1.41 \cdot 10^7$ J.Kg ⁻¹
$Le = 1.2$	$\mu : \square$ Wilke, Blottner	$\lambda : \square$ Wilke , Eucken
Rayon = 0.0065 m	$T_p = 1000$ °K	Paroi non catalytique

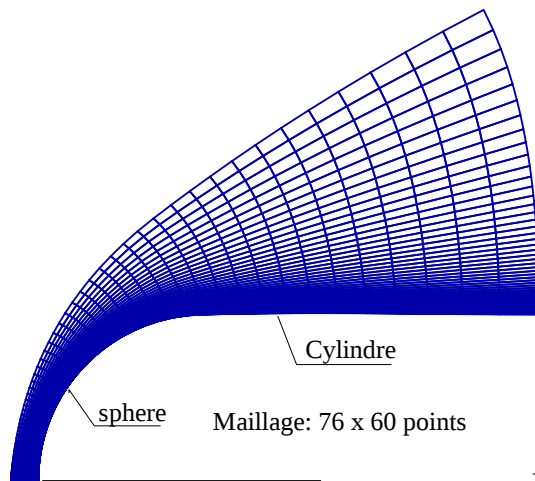
On obtient avec ces conditions un nombre de Knudsen rapporté au rayon de $1.5 \cdot 10^{-3}$. Les caractéristiques des maillages utilisés sont détaillées dans le tableau 2. La structure du maillage utilise est représentée sur la figure 1 où l'on n'a figuré qu'un point sur trois :

Tableau 2. Paramètres du maillage

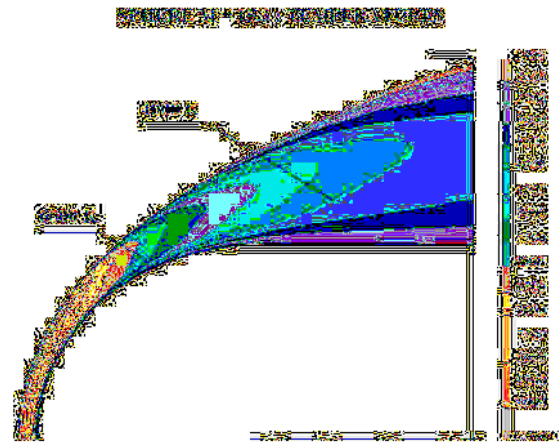
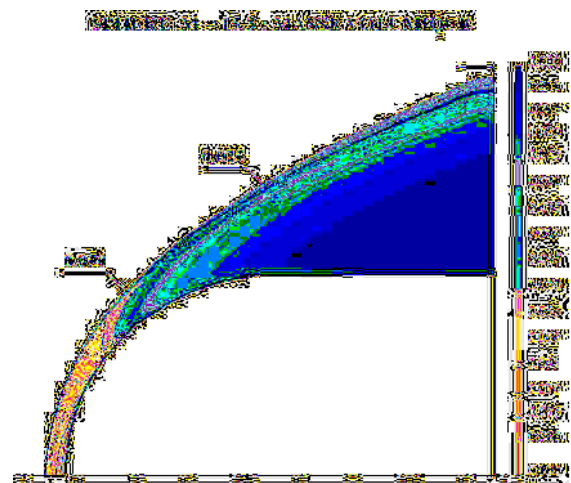
Grid	N_ξ	N_η	$\Delta\eta_l$ (m)	$\Delta\eta_{max}$ (m)	$\frac{\Delta\eta_l}{\Delta l_{max}}$	$\Delta\xi_l$ (m)	r
fine	76	60	$2.2 \cdot 10^{-6}$	$1.3 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-1}$	$1.5 \cdot 10^{-5}$	$1.8 \cdot 10^{-1}$

Tableau 03. Hypothèses des modèles utilisés

Auteur	Etat de l'air	Espèces diatomique	Taux production chimique
Flament	N_2, O_2, N, O, NO	Déséquilibre	Park
	NO^+, e	vibrationnel	Déséquilibre thermique
		Oui ou non	
Candler	N_2, O_2, N, O, NO	déséquilibre	Gardiner
		vibrationnel	

**Figure 1.** Structure du maillage (79x60 points)

Sur les figures 02 à 06 sont tracées les iso lignes pour la température, la masse volumique et les différentes fractions massiques. Ces résultats ont été obtenus avec la méthode de Gardiner [4] pour le calcul des taux de productions chimiques. La comparaison des résultats entre les trois simulations numériques doit tenir compte de la diversité des modèles utilisés. Pour rappel, nous présentons les hypothèses principales effectuées par Flament et Candler dans la table 03.

**Figure 2.** Lignes iso température autour de la sphère à $M_\infty=15.3$.**Figure 3.** Lignes iso masse volumique autour de la sphère à $M_\infty=15.3$.

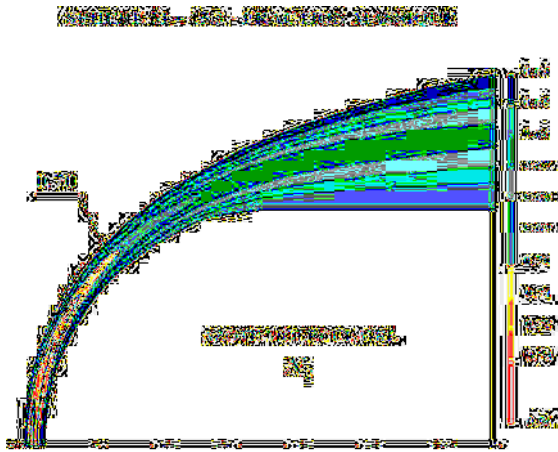


Figure 4. Lignes iso fraction massique d'azote autour de la sphère à $M_\infty=15.3$.

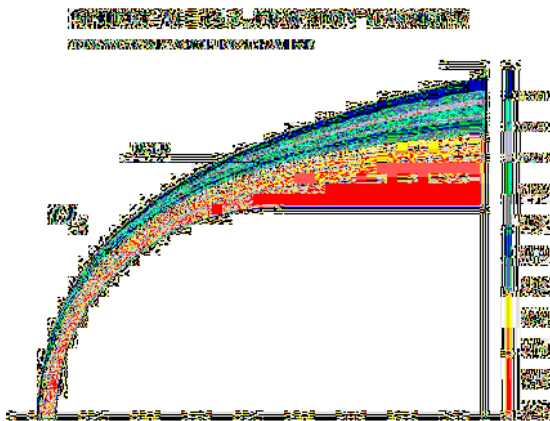


Figure 5. Lignes iso fraction massique d'oxygène autour de la sphère à $M_\infty=15.3$.

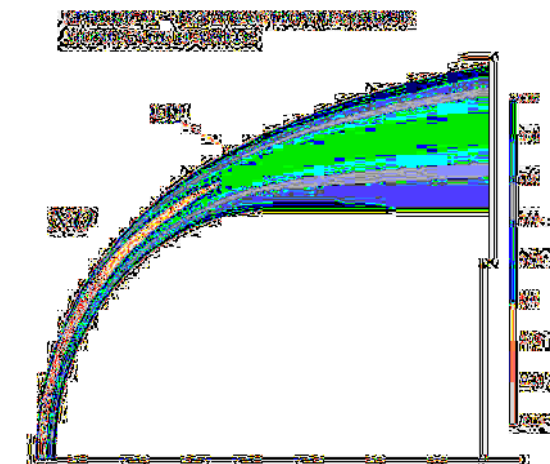


Figure 6. Ligne iso fraction massique de monoxyde d'azote autour de la sphère à $M_\infty=15.3$.

En gardant à l'esprit l'effet du déséquilibre thermique et de l'ionisation, l'équilibre thermique entraîne évidemment une distribution de température différente. La température intervenant dans le calcul des taux de productions chimiques étant alors élevée, les réactions chimiques sont déclenchées plus rapidement ce qui augmente la masse volumique et diminue par conséquent l'épaisseur de la couche de choc.

Cet effet est mis en évidence sur la figure 07 où se trouvent comparées les positions de l'onde de choc détachée obtenues d'après la présente méthode, par Candler et Flament en déséquilibre thermique ainsi que par l'expérience [19]. La distance de l'onde de choc a été repérée par le maximum de gradient de masse volumique par analogie avec la méthode utilisée généralement en strioscopie. Les résultats expérimentaux donnent la distance de détachement à 5 à 10 % près. On peut noter sur la figure 07 l'accord entre les différents résultats numériques et les résultats expérimentaux, avec dans le cas de l'équilibre thermique, une onde de choc légèrement plus proche de la paroi.

La figure 08 donne le profil de température le long de l'axe et la figure 09 les profils des fractions massiques.

Nous avons porté sur ces figures les résultats obtenus par Flament sous l'hypothèse d'équilibre chimique. La comparaison des résultats est bonne, avec néanmoins quelques différences au voisinage de l'onde de choc détachée. Ces différences peuvent raisonnablement être attribuées aux différences entre les maillages utilisés

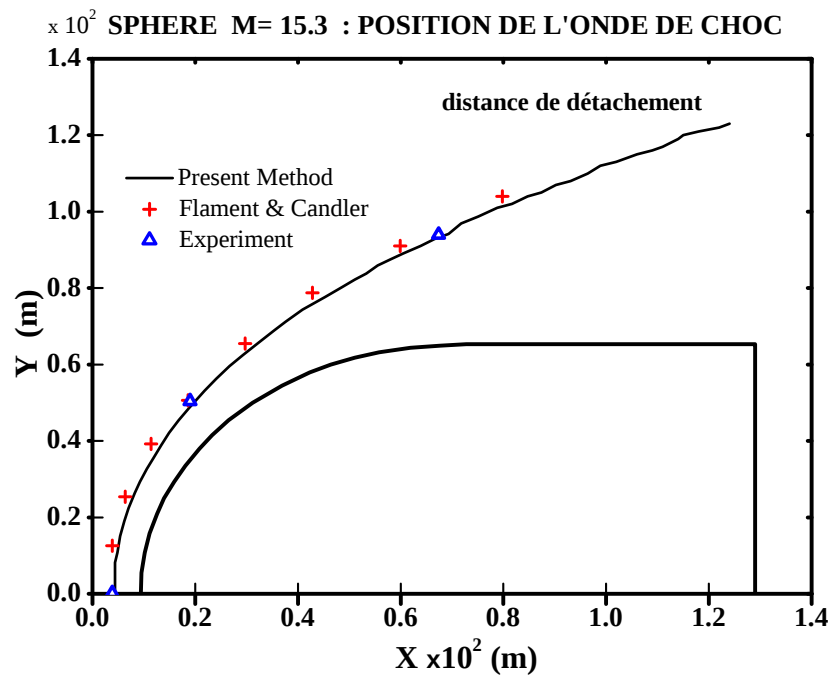


Figure 7. Distance de détachement.

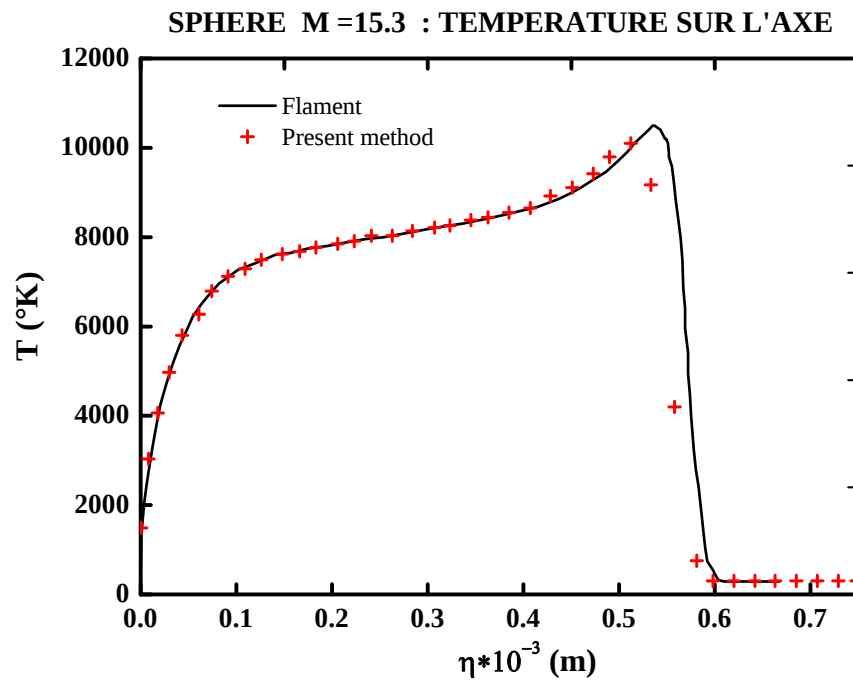


Figure 8. Profil de température le long de l'axe de la sphère à $M_\infty=15.3$.

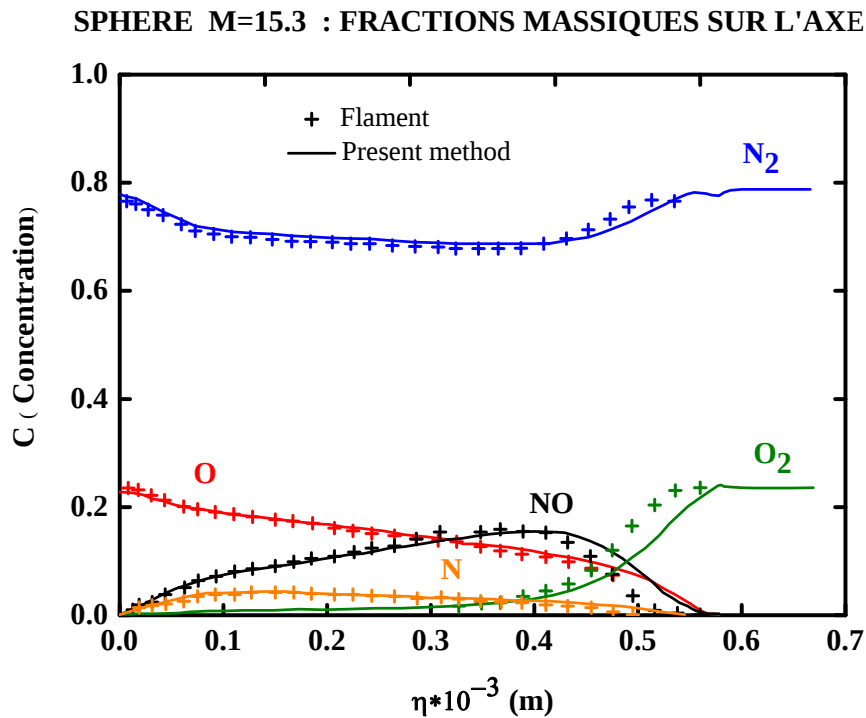


Figure 9. Ligne des fractions massiques le long de l'axe de la sphère à $M_\infty=15.3$.

Les résultats obtenus par Candler pour les profils ne sont pas indiqués car la modélisation est trop différente de celle choisie ici. En effet, par la prise en compte du déséquilibre thermique et de l'ionisation, l'onde de choc est plus éloignée de la paroi. Ceci affecte les variables dans une grande partie de la couche de choc, les résultats ne devenant similaires qu'au voisinage de la paroi.

Nous avons tracé sur les figures 10 à 12

les profils des températures et des fractions massiques selon un rayon faisant un angle θ égale à 30° et 45° avec l'axe. La température maximale atteinte derrière l'onde de choc décroît et l'intensité des phénomènes de dissociation s'affaiblit lorsqu'on s'éloigne du point d'arrêt. L'oxygène reste cependant toujours complètement dissocié à la paroi tandis que la dissociation de l'azote est moindre.

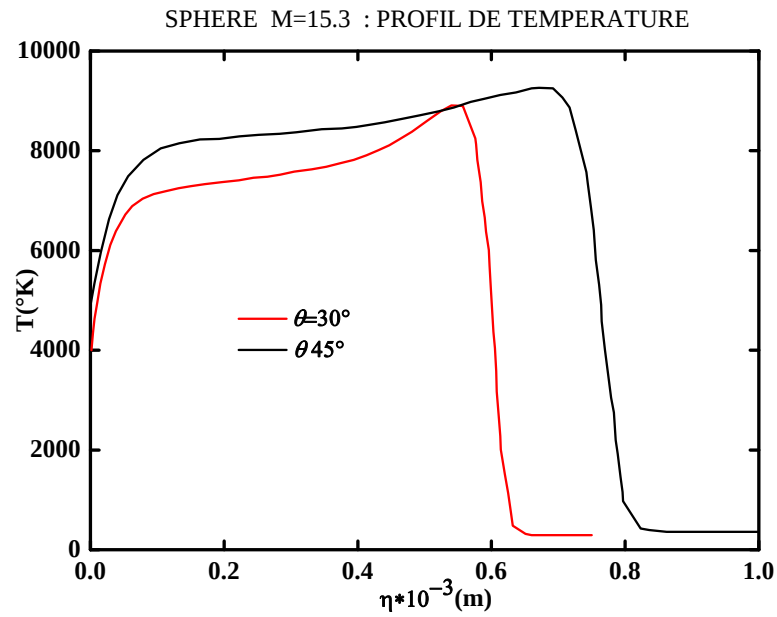


Figure 10. Profil de température à $\theta = 30$ et 40 , $M_{\infty}=15.3$.

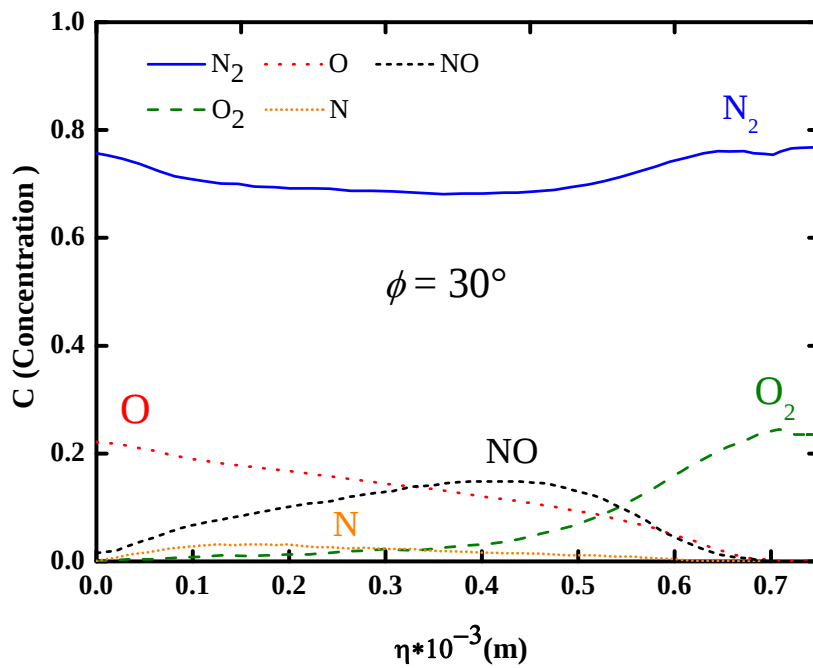


Figure 11. Profil des fractions massiques à $\theta= 30^{\circ}$, $M_{\infty}=15.3$.

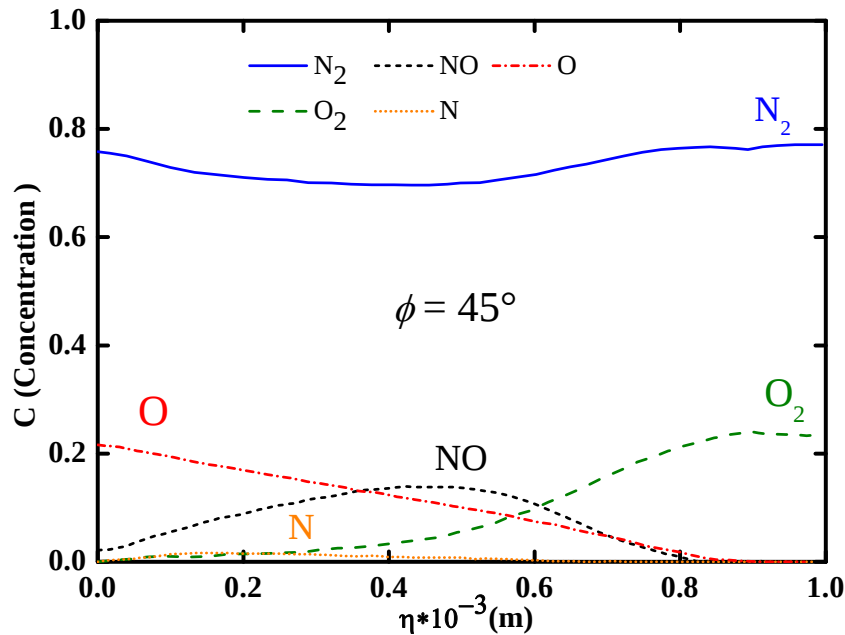


Figure 12. Profil des fractions massiques à $\theta = 45^\circ$, $M_\infty = 15.3$.

6. CONCLUSION

Les travaux effectués dans cette étude concernent les écoulements hypersoniques rencontrés pendant la phase de rentrée atmosphérique des fusées et des véhicules spatiaux à nez arrondi. Un code de calcul a été développé pour simuler dans un premier temps des écoulements complexes bidimensionnels sur des géométries variées (plans ou axisymétriques). Une série de cas tests a permis la validation de la méthode et l'étude de phénomènes physiques dus au fort déséquilibre chimique des écoulements. Une confrontation des résultats test obtenus sur la géométrie d'une sphère allongée d'un cylindre avec d'autres résultats numériques a été l'objectif de ce travail. Une comparaison approfondie de ces résultats s'est avérée satisfaisante et prometteuse pour l'application de cette présente méthode pour l'analyse de la couche limite hypersonique dans des écoulements visqueux réactifs.

NOMENCLATURE

A	Composant chimique
C	Concentration (fraction massique) $C_i = \rho_i / \rho$
E	Energie totale d'un mélange gazeux $J.m^{-3}$
F, G	flux convectifs
h	enthalpie J/kg^{-1}
J	Jacobien
K	Constant de réaction
K_{Pa}	Constante associée aux taux de recombinaison catalytique,
M	mass Molaire kg/mol^{-1}
n	Nombre de mole
ns	Nombre d'espèces
P	Pression Pa
R	Rayon de la sphere m
r	Longueur de la première maille
S	vector termes Sources
S_v	Synthèses du flux diffusive
t	temps s
T	Temperature K
U	vecteur de la variable principale

N	Nombre de maille
u, v	Composants vitesses $m.s^{-1}$
x, y	Coordonnées spatiales m

Symboles Grecques

θ	Angle que fait le rayon avec l'axe de la sphère
τ	Tenseur des contraintes visqueuses
∞	Valeurs à l'infini (écoulement libre)
ϕ	flux de chaleur
γ	Nombre d'atomes Incidents
ν	coefficient Stoechiométrique
λ	Coefficient de Conductibilité thermique
μ	Coefficient de viscosité
ρ	Masse volumique (densité) $kg.m^{-3}$
ω	Taux de production par réaction chimique
ξ, η	directions Curvilignes

Indices inférieurs et supérieurs

i, j	Index of Grid point Direction
DI	diffusion
dr	directe
eq	équilibre
I	espèces
iv	Inverse

Nombres non dimensionnels

Le	Lewis [Diffusion / Conduction]
M	Mach [frottement / Diffusion]
Pr	Prandtl
Re	Reynolds [$\nu D / \gamma$]

Références

- [1] W. Kordulla. *Numerical Simulation of Three Dimensional Hypersonic Viscous Flows*. In the second Joints Europe/US Short Course in Hypersonic, Colorado Springs, CO, 1989
- [2] S.D. Williams, *The first five flights entry heating data series*, Vol 3: The lower

windward surface centerline. NASA-CR-171665, 1983.

[3] S. Chapman and T.G. Cowling, *Mathematical theory of non uniform gases*, Cambridge University Press

[4] Jr. W.C. Gardiner, *Combustion chemistry*, Springer Verlag, 1984.

[5] C. Park, *Nonequilibrium Hypersonic Aero thermo dynamics* John Wiley & sons, 1990.

[6] D. Straub, *Stationäre laminare hyperschalligen schichten und ein rotations hyperbolabec thermochischem gleishgewild der left*, DLR FB, 1972, p. 72-16.

[7] C.D. Scott, *Wall Boundary Equations with slip and Catalysis for Multicomponent Gas Flows*, Technical Report TM-X-58111, NASA, 1973.

[8] C.R. Wilke, *A Viscosity Equation for Gas Mixtures*, The third Joint of Chemical Physics, 1950, Vol.18, issu.4.

[9] J.L. Shin, J.N. Moss, A.L. Simmonds, *Viscous shock layer heating analysis for the shuttle windward plane with surface finite catalytic recombination rates*, AIAA, 1982, 82-0842.

[10] J.A. Fay, F.R. Riddell, *Theory of stagnation point heat transfer in dissociated air*, Journal of Aeronautical Sciences, 1958, Vol. 25, issu.2.

[11] H.C. Yee, M. Vinokur, M.J. Djomehri, *Entropy splitting and numerical dissipation*, J. Comput. Phys, 2000, Vol. 162, p.33-81.

[12] E. Godlewski, P.A. Raviard, *Hyperbolic systems of conservation laws*. Ellipses, Paris, 1991

- [13] S.Godunov, *A differencescheme for numerical computation of discontinuous solutions of equation of fluid dynamics* . Mat. Sb, 47(89):271-306 . 1959
- [14] P.Lax, *Hyperbolic systems of conservation laws II*. Comm.Pure Appl. Math., 10:537-566, 1957
- [15] S.Osher, P.K.Sweby, *Recent developments in the numerical solution of nolinear conservations laws*, 1990
- [16] H.C.Yee, R.F.Warming, and A.Harten, *Implicit total variation diminishing TVD schemes for steady state calculations* ,Journal of Comp. Physics, 57(3):327-360, 1985
- [17] E.F.Toro .*Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics.Practical Introduction* .Spring Verlag , 1997
- [18] A.Harten,P.Lax and B.Van Leer, *On Upstream Differencing and Godunov-Type Schemes for Hyperbolic Conservatio laws*. SIAM Review, Vol.25 ,35-61, 1983
- [19] H.C. Yee. *A Class of High Resolution Explicit and Implicit Shock capturing Methods* .In VKI.L.S1989.
- [20] R.K Lobb. *Experimental measurement of shock detachment distance on spheres fired in air et hypervelocities*. In the High Temperature Aspects of Hypersonic Flows.Pergammon Press. Mac Millan Co,New York, 1964
- [21] G.Candler. *The Computation of Weakly Ionized Hypersonic Flows in thermo-chemical Non –equilibrium*. PhD thesis. Stanford Univ, June 1988
- [22] C.Flament. *Ecoulements de fluide visqueux en déséquilibre chimique et vibrationnel : Modélisation, application internes et externes*. Thèse de l'Université de Paris VI, Novembre 1990.
- [23] A.Lafon ,*calcul de la couche de choc* ,Rapport technique 34/5005.32, CERT-DERAT , 1990
- [24] A.Lafon and F.Perrel, *Contribution to test cases VI*. In workshop on Hypersonic Flows, Part II , Antibes, France 1991
- [25] Anderson D.A, Tannhill J.C, Pletcher R.H. ‘ *Computational fluid mechanics and heat transfer* ‘ Mac Grawhill, 1984
- [26] B. Perthame, C. Simeoni, *Convergence of the upwind interface source method for hyperbolic conservation laws*, Proc. Of Hyp2002, T. Hou and E. Tadmor Editors, Springer, 2003
- [27] D. Serre, *Systems of conservation laws. Hyperbolicity, entropies, shock waves*, Translated from the 1996 French original by I. N. Sneddon, Cambridge
- [28] C. Eldem. *Couches limites hypersoniques avec effets de dissociation*. Thèse ENSAE, Toulouse, France, 1987
- [29] D.R.Chapman and R.W.MacCormack ,*Improved Computations Fluid Dynamics for Continuum Hypersonic Flow*. Technical report , Stanford university , 1990
- [30] F.Bouchut, *Nonlinear stability of Finite volume methods for hyperbolic conservation laws and well-balanced schemes for sources* Birkhäouser Verlag 2004
- [31] Hirschfelder J.O , Curtiss C.F. ,Bird R.B. *Molecular theory of gases and liquids*, J.W&S,1987.

- [32] L. Montagné , H.C Yee, G.H.Klopfer and M.Vinokur .*Hypersonic Blunt Body Computations including Real gas Effects* .T.R-TM 100074 NASA, 1988.
- [33] J.Wang, H.Wen, T. Zhou, *On large time step Godunov scheme for hyperbolic conservation laws*, preprint, 2004.
- [34] John D. Anderson, Jr . *Hypersonic and high temperature gas dynamics* Mac Graw – Hill , 1989
- [35] L. Gosse, *A well-balanced scheme using non-conservative products designed for hyperbolic systems of conservation laws with source terms*, Math. Mod. Meth. Appl. Sci. **11** 2001 , p: 339-365.
- [36] M.Vetter, H.Olivier, and H.Gröning. *Flow over double ellipsoid and sphere – experimental results*. In Workshop on hypersonic flows , Part II .Antibes , France , April 1991
- [37] P. Baarbante, D. Vanden Abeele, B. Bottin, G. Degrez , *Numerical Simulation of High – Temperature Non – Equilibrium Flows at the Von Karman Institute* . First Joint French – German Symposium on Simulation of Atmospheric Entries by Means of GroundTest Facilities; Stuttgart; Germany, November 1999
- [38] P.G. LeFloch, *Hyperbolic systems of conservation laws, the theory of classical and nonclassical shock waves*, ETH Lecture Notes Series, Birkhauser, 2002.
- [39] R.J. LeVeque, *Finite volume methods for hyperbolic problems*, Cambridge Univ. Press, 2002.
- [40] R.J. LeVeque, M. Pelanti, *A class of approximate Riemann solvers and their relation to relaxation schemes*, J. Comput. Phys. **172** ,2001, 572-591
- [41] Sawley and Wüthrich .*Non equilibrium hypersonic flows simulation using a coupled Euler/boundary layer method* .In First European Symposium on Aerothermodynamics for space Vehicles ESA 1991
- [42] Sawley and Wüthrich .*Non equilibrium hypersonic flows simulation using a coupled Euler/boundary layer equations* .Computer Methods in applied Mechanics and Engineering .1991
- [43] I.G. Brykina, B.V. Rogov and G.A. Tirskiy *Continuum models of rarefied gas flows in problems of hypersonic aerothermodynamics*, Journal of Applied Mathematics and Mechanics, Volume 70, Issue 6, 2006, p: 888-911
- [44] Alfred Kluwick ,*Theory of Shock Waves: 3.4 Rarefaction Shocks* Handbook of Shock Waves, 2001, Pages 339-411
- [45] M. Borrel, J.-L. Montagne, J. Diet, Ph. Guillen and J. Lordon, *Calculs d'écoulements supersoniques autour de missiles tactiques à l'aide d'un schéma décentré*. La Recherche Aérospatiale , 1988.
- [46] F. Grasso and M. Marini, *Solutions of hypersonic viscous flows with total variation diminishing multigrid techniques*. Computers and Fluids **23** 5 ,1995 , p: 571–592.
- [47] M. C. Ciccoli, L. Fezoui and J. A. Désidéri, *Efficient methods for inviscid non-equilibrium hypersonic flow fields*. La Recherche Aérospatiale. 1992-1, p; 37–52.

ANNEXES

TRAITEMENT DES EQUATIONS

A.1 Equations sans dimension

A.1.1 Equation d'état

1. Pour une équation en exponentielle

L'équation d'état conserve la même forme :

$$\begin{aligned} \rho e &= \sum_{I=1}^{ns} \rho_I e_I \\ &= \sum_{\text{atomes}} 3/2 R_I \rho_I T \\ &+ \sum_{\text{molécules}} \rho_I \left(5/2 R_I T + \frac{R_I \theta_{VI}}{\exp(\theta_{VI}/T) - 1} \right) \\ &+ \sum_{I=1}^{ns} \rho_I e_I^0 \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

En prenant pour $I=I$, ns :

$$\theta_{VI} = \theta_{VI}^* / T_{ref}^*, \quad e_I^0 = e_I^{0*} / (u_\infty^*)^2 \quad (\text{A.2})$$

$$R_I = R_I^* / (u_\infty^{*2} / T_{ref}^*)$$

2. Pour une équation polynomiale

Les coefficients des polynômes doivent être rendus sans dimension par la formule suivante :

$$a_{k,I} = a_{k,I}^* / (T_{ref}^*)^{k-1}, \quad k = 1, 5 \quad (\text{A.3})$$

$$a_{6,I} = a_{6,I}^* / T_{ref}^*$$

Pour la pression

On conserve la relation suivante :

$$P = \left(\sum_{I=1}^{ns} \rho_I R_I \right) T. \quad (\text{A.4})$$

A.1.2 Termes de diffusion

Le flux de diffusion massique et le flux de chaleur conservant la même forme mais les coefficients de transport doivent faire l'objet d'une étude assez soignée. En ce qui concerne la viscosité, la loi de Sutherland devient :

$$\mu = \mu_0^* \sqrt{\frac{T}{T_0^*}} \frac{1 + S^*/T_0^*}{1 + S^*/T} \quad (\text{A.5})$$

$$\text{avec } \mu_0^s = \mu_0^* / \mu_{ref}^*,$$

$$T_0^s = T_0^* / T_{ref}^*,$$

$$\text{et } S^s = S^* / T_{ref}^*$$

La relation de Blottner s'écrit maintenant :

$$\mu_I = D^\mu \exp \left[(A_I^\mu \log T + B_I^\mu) \log T + C_I^{\mu*} \right] \quad (\text{A.6})$$

Avec

$$A_I^\mu = A_I^{\mu*}$$

$$B_I^\mu = 2A_I^{\mu*} \log T_{ref}^* + B_I^{\mu*}$$

$$C_I^\mu = A_I^{\mu*} (\log T_{ref}^*)^2 + B_I^{\mu*} \log T_{ref}^* + C_I^{\mu*}$$

$$D^\mu = 0.1 / \mu_{ref}^*$$

Ce qui conduit à l'écriture suivante de la formule de Wilke pour le mélange :

$$\mu = \sum_{I=1}^{ns} \mu_I \frac{C_I}{M_I} \frac{1}{\sum_{K=1}^{ns} \frac{C_K}{M_K} \left(1 + \sqrt{\frac{\mu_I}{\mu_K}} \left(\frac{M_K^*}{M_I^*} \right)^{1/4} \right)^2} \sqrt{8 \left(1 + \frac{M_I^*}{M_K^*} \right)}$$

La conductivité des espèces retient la même forme qu'auparavant :

$$\lambda_I = \mu_I \left(C_{V_I} + \frac{9}{4} R_I \right),$$

Où C_{V_I} conserve une écriture identique.

On obtient pour le mélange, avec la formule de Wilke :

$$\lambda = \sum_{I=1}^{ns} \lambda_I \frac{C_I}{M_I^*} \frac{1}{\sum_{K=1}^{ns} \frac{C_K}{M_K} \left(1 + \sqrt{\frac{\mu_I}{\mu_K}} \left(\frac{M_K^*}{M_I^*} \right)^{1/4} \right)^2} \sqrt{8 \left(1 + \frac{M_I^*}{M_K^*} \right)}$$

A.1.3 Termes sources

Les termes de production peuvent s'écrire :

$$\omega_I = \sum_r (\dot{v}_{I_r} - \ddot{v}_{I_r}) \overline{\alpha_{I_r}} \left[-R_r' \prod_j \rho_j^{\dot{v}_{I_r}} + R_r'' \overline{\alpha_r'} \prod_j \rho_j^{\ddot{v}_{I_r}} \right]$$

Avec:

$$\overline{\alpha_{I_r}} = \overline{A_{clr}} T^{B_{cr}} \exp(-\theta_{cr}/T)$$

$$\overline{\alpha_r'} = \frac{1}{\exp(Ach_{1r} + Ach_{2r}/T + Ach_{3r}/T^2 + Ach_{4r}/T^3 + Ach_{4r}/T^4)}$$

$$Ach_{kr} = A_{kr}^{c*} (10000/T_{ref}^*)^{k-1}$$

$$\overline{A_{clr}} = (L_{ref}^* / \rho_{\infty}^* u_{\infty}^*) M_I^* A_{cr}^* T_{red}^{* B_{cr}}$$

$$\theta_{cr} = \theta_{cr}^* / T_{ref}^*$$

$$R_r' = \left(\rho_{\infty}^* \sum_j \dot{v}_{jr} \right) / \left(\prod_j M_j^* \dot{v}_{jr} \right)$$

$$R_r'' = 10^{-6} (\sum_j \ddot{v}_{jr} - \sum_j \dot{v}_{jr}) \left(\rho_{\infty}^* \sum_j \ddot{v}_{jr} \right) / \left(\prod_j M_j^* \ddot{v}_{jr} \right)$$

A.2 Coordonnées curvilignes

La transformation des équations en coordonnées curvilignes, conduit aux relations suivantes pour F_V , G_V et $\hat{H}_V$

$$F_V = \mu \left(\begin{array}{c} \frac{Le}{Pr} \left(\xi_x \frac{\partial C_1}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial C_1}{\partial \eta} \right) \\ \frac{Le}{Pr} \left(\xi_x \frac{\partial C_2}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial C_2}{\partial \eta} \right) \\ \vdots \\ \frac{Le}{Pr} \left(\xi_x \frac{\partial C_{ns}}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial C_{ns}}{\partial \eta} \right) \\ \frac{4}{3} \left(\xi_x \frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) - \frac{2}{3} \left(\xi_y \frac{\partial v}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) - \frac{2a}{3} \frac{v}{y} \\ \left(\xi_y \frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial u}{\partial \eta} + \xi_x \frac{\partial v}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) \\ \frac{1}{Pr} \left[(1 - Le) C_{pf}^* \left(\xi_x \frac{\partial T}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) + Le \left(\xi_x \frac{\partial h}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial h}{\partial \eta} \right) \right] \\ + u \left(\frac{4}{3} \left(\xi_x \frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) - \frac{2}{3} \left(\xi_y \frac{\partial v}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) - \frac{2a}{3} \frac{v}{y} \right) \\ + v \left(\xi_y \frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial u}{\partial \eta} + \xi_x \frac{\partial v}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) \end{array} \right)$$

$$G_v = \mu \begin{pmatrix} \frac{Le}{Pr} \left(\xi_y \frac{\partial C_1}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial C_1}{\partial \eta} \right) \\ \frac{Le}{Pr} \left(\xi_y \frac{\partial C_2}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial C_2}{\partial \eta} \right) \\ \vdots \\ \frac{Le}{Pr} \left(\xi_y \frac{\partial C_{ns}}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial C_{ns}}{\partial \eta} \right) \\ \left(\xi_y \frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial u}{\partial \eta} + \xi_x \frac{\partial v}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) \\ \frac{4}{3} \left(\xi_y \frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) - \frac{2}{3} \left(\xi_x \frac{\partial v}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) - \frac{2a}{3} \frac{v}{y} \\ \frac{1}{Pr} \left[(1 - Le) C_{pf}^* \left(\xi_y \frac{\partial T}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) + Le \left(\xi_y \frac{\partial h}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial h}{\partial \eta} \right) \right] \\ + v \left(\frac{4}{3} \left(\xi_y \frac{\partial v}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) - \frac{2}{3} \left(\xi_x \frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) - \frac{2}{3} a \frac{v}{y} \right) \\ + u \left(\xi_y \frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial u}{\partial \eta} + \xi_x \frac{\partial v}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) \end{pmatrix}$$

Et enfin

$$H_v = \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \left(\xi_x \frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) - \frac{2}{3} \left(\xi_y \frac{\partial v}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) - \frac{2}{3} a \frac{v}{y} \\ 0 \end{pmatrix}$$

A.3 Hypothèse de couche mince

On définit ici les vecteurs S_{v1} et S_{v3} introduits par l'hypothèse de

couche mince. Et par l'introduction des notations suivantes pour l'équivalence métrique

:

$$W_v = \frac{4}{3}\eta_x^2 + \eta_y^2;$$

$$X_v = \frac{4}{3}\eta_y^2 + \eta_x^2;$$

$$Y_v = \frac{1}{3}\eta_x\eta_y;$$

$$Z_v = \eta_x^2 + \eta_y^2.$$

On obtient alors pour S_{v1} :

$$S_{v1} = \frac{\mu}{J} \left(\begin{array}{c} \frac{Le}{Pr} Z_v \frac{\partial C_1}{\partial \eta} \\ \frac{Le}{Pr} Z_v \frac{\partial C_2}{\partial \eta} \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{Le}{Pr} Z_v \frac{\partial C_{ns}}{\partial \eta} \\ W_v \frac{\partial u}{\partial \eta} + Y_v \frac{\partial v}{\partial \eta} - a \frac{2}{3} \eta_x \frac{v}{y} \\ Y_v \frac{\partial u}{\partial \eta} + X_v \frac{\partial v}{\partial \eta} - a \frac{2}{3} \eta_y \frac{v}{y} \\ \frac{1}{2} W_v \frac{\partial u^2}{\partial \eta} + \frac{1}{2} X_v \frac{\partial v^2}{\partial \eta} + Y_v \frac{\partial uv}{\partial \eta} - \frac{2}{3} a (\eta_x u + \eta_y v) \frac{v}{y} \\ + \frac{Z_v}{Pr} \left[(1 - Le) C_{pf} \frac{\partial T}{\partial \eta} + Le \frac{\partial h}{\partial \eta} \right] \end{array} \right)$$

La seule composante non de S_{v3} s'écrit :

$$S_{v3ns+2} = \mu \left(\frac{2}{3} \eta_x \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{2}{3} \eta_y \frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{4}{3} \frac{v}{y} \right)$$

Dans certaines recherches [23] et [24] il a été constaté qu'en écoulement axisymétrique le terme de diffusion S_{v3} conduit à une incohérence sur l'équation de quantité de mouvement suivant la direction radiale y au voisinage de l'axe de symétrie. Cette dernière est liée aux

contributions $\partial u / \partial \eta$ et v / y qui, dans les équations complètes, sont annulées par d'autres contributions négligées dans l'approximation de couche mince. De ce fait et afin de lever cette incohérence les termes impliqués seront supprimés du terme S_{v3} qui s'écrit maintenant sous la forme :

$$S_{v3ns+2} = \mu \left(\frac{2}{3} \eta_y \frac{\partial v}{\partial \eta} \right)$$