

Modélisation et simulation par la méthode des volumes finis des écoulements torrentiels (supercritiques) à surface libre dans des canaux à géométrie variable

Tahar Ikni¹, Ali Berreksi^{2,3}, Saadia Benmamar³ et Ahmed Kettab³

¹⁾ Département d'hydraulique, Université Mohamed Boudiaf, BP 166 Ichbilia, M'Sila (28000), Algérie.

²⁾ Laboratoire d'Hydraulique Appliquée et Environnement, Université Abderrahmane Mira, Route de Targa-Ouzemour, Béjaia (06000), Algérie.

³⁾ Laboratoire des Sciences de l'Eau (LRS-EAU), Ecole Nationale Polytechnique, 10, Avenue Hacène Badi, BP 182, El-Harrach, Alger (16000), Algérie.

Accepté le 27/11/2008

الحركة ثنائية البعد (معدلات سان فنان) عن طريق معادلات "نافي ستوكس". حساب "معدلات سان فنان" ثنائية البعد تمّت باستعمال طريقة الأحجام المتناهية. استعمل النموذج الرياضي في حالته غير المستقرة لإيجاد حلول في الحالة المستقرة و هذا بأخذ عنصر الزمن كوسيط تكراري. لقد حوّل المجال الفيزيائي المعقد إلى مجال حسابي مستطيل. النتائج المتحصل علنها توضح توافقاً جيداً مع النتائج التجريبية. الهدف الرئيسي من هذا العمل هو إيجاد شكل سطح المياه في مجارى متغيرة الأبعاد الهندسية مثل مجرى متوسع تدريجياً و هذا باستعمال طريقة الحساب العددي.

الكلمات المفتاحية: طريقة الفروقات المتناهية طريقة الأحجام المتناهية معدلات سان فنان معادلات "نافي ستوكس" معادلات تقريب ريمان.

Résumé

Cet article présente l'étude et l'analyse des écoulements à surface libre dans des canaux à géométrie variable. Les équations du mouvement de l'eau à deux dimensions (équations de Saint-Venant) sont obtenues après intégration des équations de Navier Stokes suivant la hauteur d'eau de l'écoulement. Ces équations sont moyennées sur la profondeur d'eau. La résolution des équations de Barré de Saint-Venant à deux dimensions est alors faite en utilisant la méthode des volumes finis. Le modèle en régime non permanent est utilisé pour obtenir des solutions en régime établi en traitant la variable temps comme paramètre d'itération et en laissant la solution converger vers un état permanent. La discrétisation a été faite après l'utilisation des coordonnées curvilignes en convertissant le domaine physique en domaine de calcul rectangulaire et le modèle mathématique sera donc basé sur les équations en coordonnées curvilignes. La comparaison des résultats obtenus avec le modèle mathématique et les résultats obtenus expérimentalement laisse conclure qu'il y a une bonne concordance. L'objectif principal de ce travail est la détermination de l'allure de la surface libre dans les canaux non prismatiques tels qu'un élargissement progressif par simulation numérique pour mieux dimensionner les canaux.

Mots clés : Schéma explicite; méthode des volumes finis; équations de Saint-Venant; équations de Navier stocks; approximation de Riemann Sol vers.

Abstract

This article presents and analyzes a study on free surface flow in channels with variable geometry. The equations of water movement in two dimensions (equations of Saint-Venant) are obtained after integration of the equations of Navier-Stokes according to the height of water flow. These equations are averaged according to the depth of water. The resolution of the equations of Barré and Saint-Venant in two dimensions is then made by using the method of finite volumes. The model in unsteady state mode is used to obtain solutions in the established conditions by treating the time variable as an iteration parameter and letting the solution to converge towards a steady state. The discretization was made using of the curvilinear coordinates and converting the physical field to a rectangular field of calculation. The comparison shows that an agreement is found between results using the mathematical model and those obtained experimentally. The main objective of this work is the determination of the shape of the free surface in nonprismatic channels with progressive widening by simulation for better sizing of channels.

Key words: Explicit scheme; finite volumes method; Saint-Venant equations; Navier Stokes equations; Riemann's approximation.

Auteur correspondant: Ikni_Tahar@yahoo.fr (Tahar Ikni)

1. INTRODUCTION

L'écoulement de l'eau libre est un phénomène d'une extrême difficulté si on veut l'étudier dans toute sa globalité, car la présence d'une surface libre entraîne les variations des sections liquides suivant la longueur du courant même en cas d'obstacles insignifiants.

Cette variation exige l'étude des processus de formation des ondes stationnaires. Les courants à surface libre peuvent être permanents, non permanents, uniformes ou non uniformes.

Dans cette étude nous nous proposons de caractériser les phénomènes d'instabilités apparaissant à la surface libre d'écoulements dans des canaux non prismatiques. Les canaux non prismatiques sont souvent appelés les transitions du fait qu'ils sont généralement utilisés sur des courtes distances.

Généralement les transitions dans les canaux à surface libres sont utilisées dans les applications hydrauliques, notamment dans les coursiers d'évacuateurs de crue, dans la réduction des pertes d'énergies et dans certains bassins d'amortissement.

La transition non prismatique est une variation de la section. Lors du passage d'un écoulement supercritique, cette transition entraîne des ondes qui se propagent le long du canal, il devient donc indispensable de connaître le réseau d'ondes de choc qui se forme, et par suite la hauteur maximale de l'onde, pour pouvoir dimensionner correctement les parois latérales des transitions afin d'éviter le débordement de l'eau.

On trouve plusieurs études sur cette catégorie d'écoulements: Louaked, M. et Hanich, L. (1988) [5] ont utilisé un schéma aux différences finies explicites (un TVD schéma) pour résoudre les équations de l'écoulement à surface libre. En 1989, Jiminez, O. F. et Chaudhry, M. H. [6] ont utilisé un schéma explicite aux différences finies développé par Mac Cormack et Gabutti pour la résolution des équations de Saint-Venant

bidimensionnelles (qui décrivent l'écoulement non permanent non uniforme à surface libre dans un canal à section variable).

L'Analyse des écoulements à surface libre dans les élargissements et rétrécissements a été faite à partir des équations à deux dimensions, moyennées sur la profondeur, en régime non permanent dans un système de coordonnées transformées et résolues numériquement par un schéma de Mac Cormack. Cette analyse a été faite par Bhallamudi, S. M. et Chaudhry, M. H. en 1992 [8]. Fennema, R. J. et Chaudhry, M. H. (1994) [7] ont utilisé des schémas aux différences finies implicites pour intégrer les équations décrivant les écoulements à surface libre bidimensionnels en régime non permanent.

Younus, M. et Chaudhry, M.H. (1994) [12] ont utilisé un modèle numérique de calcul d'écoulement à surface libre résolvant les équations non permanentes, bidimensionnelles, moyennées sur la verticale. Les contraintes turbulentes sont représentées par un modèle k- ϵ moyenné sur la verticale. En 1993 Alcrudo, F. et Garcia-Navarro, P. [10] ont appliqué la méthode des volumes finis explicite pour la résolution des équations de l'écoulement à surface libre.

On trouve aussi d'autres travaux sur ces écoulements : En l'an 2000 Brufau, P. et Garcia-Navarro, P. [15] ont aussi utilisé les équations de Saint Venant à deux dimensions pour la simulation d'une onde de rupture d'un barrage. Et en 2002 Mahfoud, M. et Benhadid, S. [17] ont étudié expérimentalement l'écoulement dans une contraction brusque.

2. MODÉLISATION MATHÉMATIQUE

Le modèle mathématique englobant les équations bidimensionnelles graduellement variées en régime non permanent

a été élaboré. Le système d'équations obtenu par application des deux principes de conservation de la masse et de la quantité de mouvement est le suivant [4,6,7,9]:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uh) + \frac{\partial}{\partial y}(vh) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(u) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2} + gh\right) + \frac{\partial}{\partial y}(uv) = g(S_{ox} - S_{fx})$$

(1)

$$\frac{\partial}{\partial t}(v) + \frac{\partial}{\partial x}(uv) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{v^2}{2} + gh\right) = g(S_{oy} - S_{fy})$$

avec,

$S_{ox} = \sin(\alpha)_x$ pente du canal suivant l'axe x

$S_{fx} = \frac{n^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{2 h^{4/3}}$ pente de frottement suivant l'axe x

$S_{oy} = \sin(\alpha)_y$ pente du canal suivant l'axe y

$S_{fy} = \frac{n^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{2 h^{4/3}}$ pente de frottement suivant l'axe y

Le système d'équation (1) a la forme générale suivante :

$$U_t + E_x + F_y + T = 0$$

(2)

avec:

$$U = \begin{bmatrix} h \\ u \\ v \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} uh \\ \frac{u^2}{2} + gh \\ uv \end{bmatrix}$$

(3a)

$$F = \begin{bmatrix} vh \\ uv \\ \frac{v^2}{2} + gh \end{bmatrix}$$

(3b)

et

$$T = - \begin{bmatrix} 0 \\ g(S_{ox} - S_{fx}) \\ g(S_{oy} - S_{fy}) \end{bmatrix}$$

(3c)

3. ELARGISSEMENT EN FORME D'EVENTAIL : ECOULEMENT TORRENTIELLES

Les écoulements sortants d'une conduite d'évacuateur de crues ou d'un coursier à pente raide peuvent déboucher dans un canal aval de largeur plus grande.

Si la transition entre le canal étroit et le canal plus large est trop brusque, des ondes transversales importantes peuvent se former. Par contre, une transition trop progressive conduit à un ouvrage de grande longueur et coûteux.

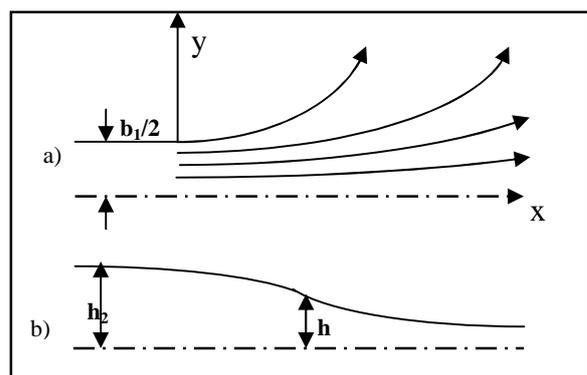


Figure 1. Canal avec élargissement infini. du canal: a) Vue de plan, b) Profil le long de l'axe.

Par opposition à une réduction de la largeur d'un canal, ou la vitesse moyenne V diminue et la hauteur d'eau h augmente en direction de l'écoulement (figure 1), la vitesse V , dans les canaux à parois divergentes augmente et h décroît pour les conditions pseudo-uniformes. La figure 2 montre une variation graduelle de la largeur du canal [1].

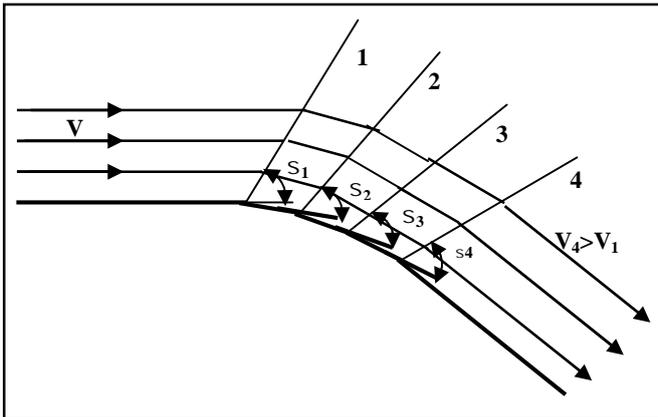


Figure 2. Ondes de chocs dues à une paroi concave.

Alors que la hauteur d'eau décroît, l'angle de choc β_i augmente et les ondes de choc divergent en conséquence. C'est la raison pour laquelle de tels écoulements n'entraînent pas de variations rapides de la hauteur.

Rousse et ses collaborateurs [1] ont présenté des résultats permettant le dimensionnement des élargissements dans les conditions d'écoulement torrentiels. Un tel élargissement est présenté dans la figure 1, où b_1 et b_2 sont des largeurs à l'amont et à l'aval du canal rectangulaire. L'écoulement provient d'un canal amont prismatique de largeur b_1 sur un canal aval de largeur infinie ($b_1/b_2 \rightarrow 0$). Ils ont démontré que la surface libre $h(x,y)$ dépend seulement de la profondeur h_1 , de la largeur relative b_1/h_1 et du nombre de Froude de l'écoulement entrant:

$$Fr_1 = \frac{Q}{(gb_1^2 h_1^3)^{1/2}} \quad (4)$$

Pour les canaux d'entrées relativement larges ($b_1/h_1 \ll 1$), la distribution des pressions est presque hydrostatique sauf dans les zones latérales de l'élargissement.

$$\frac{h}{h_1} = f\left(\frac{x}{b_1}, \left(\frac{y}{b_1}, Fr_1\right)\right) \quad (5)$$

A partir de la représentation des courbes $\frac{Y}{b_1} = f\left(\frac{x}{b_1 Fr_1}\right)$, Rousse et ses collaborateurs [1,9] ont déterminé une courbe limite $Y_L(x)$ contenant 90% du débit, pour $f_e=1$, et pouvant être définie par la relation suivante :

$$\frac{Y_L}{b_1} = \frac{1}{2} \left[1 + f_e \left(\frac{x}{b_1 Fr_1}\right)^{3/2} \right] \quad (6)$$

4. CONDITIONS AUX LIMITES

La prise en compte des limites est un aspect très important lors de l'utilisation des techniques numériques dans le but d'obtenir de bons résultats. Les équations hyperboliques sont particulièrement très sensibles, car chaque erreur qui s'introduit au niveau des frontières se propage à travers la grille de calcul, ce qui mène dans la plupart des cas à de fortes instabilités.

Quatre types de conditions aux limites doivent être utilisées dans les différentes applications liées au problème physique étudié dans le présent travail à savoir :

- Conditions amont et conditions aval.
- Conditions de symétrie.
- Conditions sur les parois solides.

4.1 Conditions amont et aval

Les conditions d'amont et d'aval sont aussi connues comme étant des conditions

aux frontières ouvertes ; ou l'écoulement peut entrer ou quitter le domaine de calcul.

Ces conditions seront spécifiées selon le type de l'écoulement et le type du problème considéré. Le nombre de conditions est résumé dans le tableau ci-dessus [11-13]

Problème considéré	Ecoulement supercritique $Fr > 1$	
	Amont (entrée)	Aval (sortie)
2D	3	0

D'après le tableau, trois conditions aux frontières doivent être spécifiées à l'amont et aucune à l'aval, c'est-à-dire le vecteur d'écoulement (h, u et v) est imposé à l'amont et le domaine de calcul est libre à l'aval pour un écoulement supercritique.

4.2 Conditions de symétrie

Le principe de cette condition de symétrie consiste à remplacer les valeurs des variables h, u et v aux points fictifs du maillage par les valeurs correspondant du maillage (fig. 3) [6,18,20].

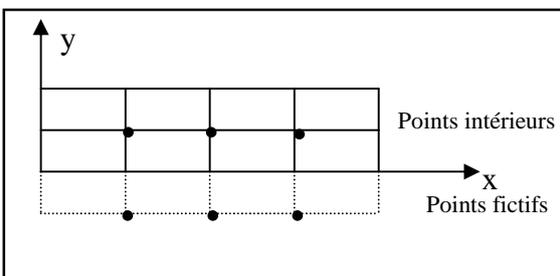


Figure 3. Procédure de réflexion au niveau de l'axe de symétrie.

Dans ce cas, une réflexion symétrique est utilisée pour déterminer h et u , et une procédure asymétrique pour déterminer v . Cette procédure est exacte pour une ligne symétrique.

4.3 Conditions sur les parois solides

En général, on impose en tout les points du contour, des équations portant soit sur la fonction (U): problème Dirichlet, soit sur le gradient de (U):

problème de Newman [3].

4.4 Procédure de réflexion

Le principe de la méthode de la procédure de réflexion consiste à considérer que la profondeur de l'écoulement h et la vitesse résultante V au point de réflexion fictif du maillage sont les mêmes que les valeurs correspondant aux points intérieurs de la grille de calcul.

La direction de la vitesse résultante V , est déterminée telle que sa composante normale au niveau du mur soit nulle.

Si θ est l'angle que fait la paroi avec l'axe des x , et ψ l'angle que fait la vitesse résultante V aux points intérieurs du maillage et l'axe des x , alors, les composantes de la vitesse u^f et v^f aux points fictifs (points de réflexion) sont [7,11,14] :

$$\begin{aligned} u^f &= V \cos(2\theta - \psi) \\ v^f &= -V \sin(2\theta - \psi) \end{aligned} \tag{7}$$

5. APPLICATION DE LA TRANSFORMATION CURVILIGNE

Le système d'équation (2) est transformé dans le système de coordonnées curviligne dont le but de transformer le domaine physique quelconque en un domaine fictif rectangulaire de calcul. Les coordonnées curvilignes sont données par les relations suivantes [12] :

$$\begin{cases} t = \ddagger \\ \zeta = \zeta(x, y, t) \\ \eta = \eta(x, y, t) \end{cases} \tag{8}$$

Le système d'équations (2) dans le nouveau repère prend la forme suivante :

$$\hat{U}_t + \hat{E}_\zeta + \hat{F}_\eta + \hat{T} = 0 \tag{9}$$

avec les quantités transformées (elles prennent '^') sont données par

$$\begin{aligned} \hat{U} &= J^{-1}U ; \\ \hat{E} &= \frac{1}{J}(U_{\zeta_t} + E_{\zeta_x} + F_{\zeta_y}) ; \\ \hat{F} &= \frac{1}{J}(U y_t + E y_x + F y_y) \text{ et } \hat{T} = J^{-1}T \end{aligned} \quad (10)$$

Où

$J = \zeta_x y_y - \zeta_y y_x$ est le déterminant du Jacobien.

6. MÉTHODE NUMÉRIQUE

La méthode des volumes de contrôle développée par Spalding et Patankar est une méthode de résidus pondérés dans laquelle les fonctions de poids sont égales à l'unité dans des volumes finis donnés et nulles partout ailleurs. Sa grande simplicité de mise en oeuvre a fait qu'elle a connu un essor fulgurant depuis les années 1970-1980 [10,14,18].

Le système d'équation qui décrit l'écoulement est :

$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial t} = - \left(\frac{\partial \hat{E}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial y} + \hat{T} \right) \quad (11)$$

Sur un domaine bidimensionnel discrétisé, les volumes finis de surface

$\Delta\zeta, \Delta\eta$ ont l'allure de la figure 4. Le point P a maintenant 4 voisins suivant les 4 points cardinaux: E,W,N,S.

Une intégration en espace et dans le temps donne:

$$\begin{aligned} \int_t^{t+dt} \int_{\Sigma} \frac{\partial \hat{U}}{\partial t} d\zeta dt = \\ - \left(\int_t^{t+dt} \int_{\Sigma} \frac{\partial \hat{E}}{\partial \zeta} d\zeta dt + \int_t^{t+dt} \int_{\Sigma} \frac{\partial \hat{F}}{\partial y} d\zeta dt + \int_t^{t+dt} \int_{\Sigma} \hat{T} d\zeta dt \right) \end{aligned} \quad (12)$$

où Σ est la surface du volume de contrôle considéré. Le théorème de Gauss permet de remplacer l'intégrale de surface de la divergence d'un vecteur \vec{J} par une intégrale sur le contour de cette surface du flux du vecteur \vec{J} :

$$\int_{\Sigma} \text{div} \vec{J} d\zeta = \int_{\Gamma} \vec{J} \cdot \vec{n} d\Gamma \quad (13)$$

Γ est ici le contour de la surface Σ et \vec{y} la normale orientée vers l'extérieur. On a donc :

$$\begin{aligned} \int_t^{t+dt} \int_{\Sigma} \frac{\partial \hat{U}}{\partial t} d\zeta dt = \\ - \left(\int_t^{t+dt} \left[\left[\hat{E} \right]_e - \left[\hat{E} \right]_w \right] \Delta y dt + \right. \\ \left. - \left(\int_t^{t+dt} \left[\left[\hat{F} \right]_n - \left[\hat{F} \right]_s \right] \Delta \zeta dt + \int_t^{t+dt} \hat{T} \Delta \zeta \Delta y dt \right) \right) \end{aligned} \quad (14)$$

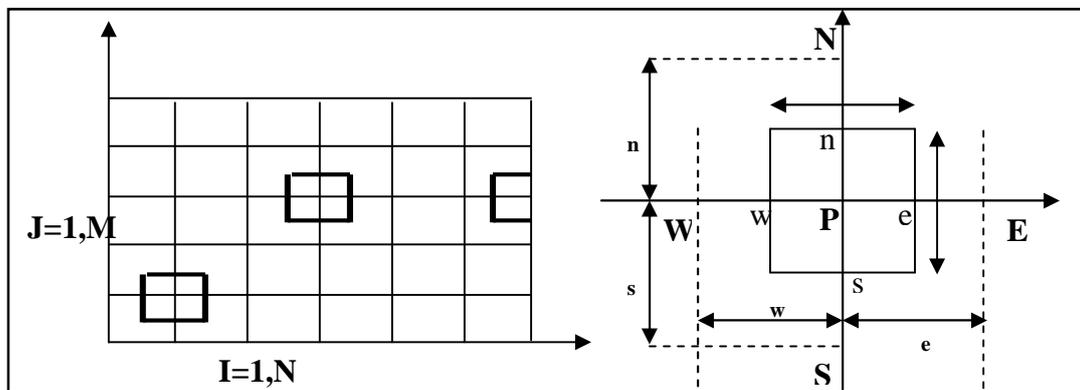


Figure 4. Discretisation bidimensionnelle montrant les volumes finis.

soit:

$$\int_t^{t+dt} \int_{\Sigma} \frac{\partial \hat{U}}{\partial t} d\Sigma dt = \left(\int_t^{t+dt} \left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} \hat{E} \\ \hat{F} \end{array} \right]_e - \left[\begin{array}{c} \hat{E} \\ \hat{F} \end{array} \right]_w \\ \left[\begin{array}{c} \hat{E} \\ \hat{F} \end{array} \right]_n - \left[\begin{array}{c} \hat{E} \\ \hat{F} \end{array} \right]_s \end{array} \right] \Delta y + \left[\begin{array}{c} \hat{T} \Delta \Delta y dt \end{array} \right] dt \right)$$

avec

$$\hat{F}_e = \frac{\hat{E}_E + \hat{E}_P}{2}, \quad F_w = \frac{E_P + E_W}{2}, \quad \hat{F}_n = \frac{\hat{F}_N + \hat{F}_P}{2}$$

et $\hat{F}_s = \frac{\hat{F}_P + \hat{F}_S}{2}$.

Le terme d'accumulation est intégré en supposant que la valeur de U au point P est uniforme dans tout le volume:

$$\int_t^{t+dt} \int_{\Sigma} \frac{\partial \hat{U}}{\partial t} d\Delta y dt = \Delta \Delta y \left(\hat{U}_P^{t+dt} - \hat{U}_P^t \right) \quad (15)$$

En ce qui concerne les autres termes, une fois l'intégration spatiale effectuée, on utilise l'écriture générale suivante:

$$\int_t^{t+dt} f(t) dt = [rf(t+dt) + (1-r)f(t)] \Delta t \quad (16)$$

où f(t) est l'une des fonctions à intégrer.

Cette écriture permet de retrouver les trois schémas classiques de la méthode des différences finies suivant les valeurs de α :

$\alpha=0$: schéma explicite (conditionnellement stable), $\alpha=1$: schéma implicite et $\alpha=0,5$: schéma semi-implicite de Crank-Nicolson. On obtient finalement dans le cas du schéma implicite ($\alpha=1$):

$$\frac{\partial U_P^{k+1}}{\partial t} = - \left(\frac{\partial(\hat{E}_E^{k+1} - \hat{E}_W^{k+1})}{\partial \Delta} + \frac{\partial(\hat{F}_N^{k+1} - \hat{F}_S^{k+1})}{\partial y} + \hat{T}_P^{k+1} \right) \quad (17)$$

Après linéarisation de $\hat{E}_E^{k+1}, \hat{E}_W^{k+1}, \hat{F}_N^{k+1}, \hat{F}_S^{k+1}$ et \hat{T}_P^{k+1}

$$\begin{aligned} \hat{E}_E^{k+1} &= \hat{E}_E^k + A_E^k u \hat{U}_E^{k+1} \\ \hat{E}_W^{k+1} &= \hat{E}_W^k + A_W^k u \hat{U}_W^{k+1} \\ \hat{F}_S^{k+1} &= \hat{F}_S^k + B_S^k u \hat{U}_S^{k+1} \\ \hat{F}_N^{k+1} &= \hat{F}_N^k + B_N^k u \hat{U}_N^{k+1} \\ \hat{T}_P^{k+1} &= \hat{T}_P^k + Q_P^k u \hat{U}_P^{k+1} \end{aligned}$$

Après remplacement et réarrangement on aboutit au système suivant :

$$\begin{aligned} u U_P^{k+1} + \frac{\Delta t}{2\Delta \Delta} [A_E^k - A_P^k] u U_E^{k+1} + \\ \frac{\Delta t}{2\Delta \Delta} [A_P^k - A_W^k] u U_W^{k+1} + \frac{\Delta t}{2\Delta y} [B_N^k - B_P^k] u U_N^{k+1} + \\ \frac{\Delta t}{2\Delta y} [B_P^k - B_S^k] u U_S^{k+1} + \Delta t Q_P^k u U_P^{k+1} = \\ - \frac{\Delta t}{2\Delta \Delta} [E_E^k - E_W^k] - \frac{\Delta t}{2\Delta y} [F_N^k - E_S^k] - \Delta t T_P^k \end{aligned} \quad (18)$$

Avec $A = \frac{\partial \hat{E}}{\partial \hat{U}}$, $B = \frac{\partial \hat{F}}{\partial \hat{U}}$ et $Q = \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{U}}$ sont des matrices Jacobéennes

Car $u U_P^{k+1} = U_P^{k+1} - U_P^k$ et on posant :

$$\begin{aligned} a_P &= I + \Delta t Q_P^k & a_E &= \frac{\Delta t}{2\Delta \Delta} [A_E^k - A_P^k] \\ a_W &= \frac{\Delta t}{2\Delta \Delta} [A_P^k - A_W^k] & a_N &= \frac{\Delta t}{2\Delta y} [B_N^k - B_P^k] \\ a_S &= \frac{\Delta t}{2\Delta y} [B_P^k - B_S^k] \end{aligned}$$

Le système (18) prend la forme finale suivante :

$$\begin{aligned}
 & a_p U_p^{k+1} + a_E U_E^{k+1} + a_W U_W^{k+1} + b_N U_N^{k+1} \\
 & + b_S U_S^{k+1} = \\
 & a_p U_p^k + a_E U_E^k + a_W U_W^k + b_N U_N^k + b_S U_S^k \quad (19) \\
 & - \frac{\Delta t}{2\Delta x} [E_E^k - E_W^k] - \frac{\Delta t}{2\Delta y} [F_N^k - E_S^k] - \Delta t T_P^k
 \end{aligned}$$

Si on pose

$$\begin{aligned}
 b &= a_p U_p^k + a_E U_E^k + a_W U_W^k + b_N U_N^k + b_S U_S^k \\
 & - \frac{\Delta t}{2\Delta x} [E_E^k - E_W^k] - \frac{\Delta t}{2\Delta y} [F_N^k - E_S^k] - \Delta t T_P^k
 \end{aligned}$$

Alors le système d'équation (19) prend la forme finale suivante :

$$\begin{aligned}
 & a_p \hat{U}_p^{k+1} + a_E \hat{U}_E^{k+1} + a_W \hat{U}_W^{k+1} \\
 & + a_N \hat{U}_N^{k+1} + a_S \hat{U}_S^{k+1} = b \quad (20)
 \end{aligned}$$

Avec: a_E, a_w, a_N et a_S sont des matrices d'ordre trois fois trois.

La résolution du système matriciel précédent se fait de cette manière. On se ramène pour cela à un système unidimensionnel par bloc sur une ligne ou une colonne et on procède à une résolution itérative par balayages successifs.

Un premier balayage est effectué ligne par ligne en écrivant:

$$a_p \hat{U}_p^{t+dt} + a_E \hat{U}_E^{t+dt} + a_W \hat{U}_W^{t+dt} = B \quad (21)$$

$$\text{Avec: } B = -a_N \hat{U}_N^* - a_S \hat{U}_S^* + b \quad (22)$$

Où \hat{U}_N^* et \hat{U}_S^* sont les valeurs de T_N et T_S à l'itération précédente. Quand le balayage sur les lignes est terminé, on passe au balayage colonne par colonne.

$$a_p \hat{U}_p^{t+dt} + a_N \hat{U}_N^{t+dt} + a_S \hat{U}_S^{t+dt} = C \quad (23)$$

avec:

$$C = -a_E \hat{U}_E^* - a_W \hat{U}_W^* + b \quad (24)$$

Où \hat{U}_E^* et \hat{U}_W^* sont les valeurs de T_E et T_W à l'itération précédente. Ce processus itératif est répété jusqu'à convergence.

Cette technique présente l'avantage d'éviter la construction d'un système matriciel difficile à résoudre.

7. CONDITION DE COURANT - FRIEDRICHS - LEWY (C.F.L)

L'utilisation de la condition de Courant-Friedrichs-Lewy [12,16,20] (C.F.L) est une manière effective de choisir un pas de temps approprié.

Le calcul du pas temps est donné par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
 \Delta t &= \min(\Delta t_1, \Delta t_2), \quad \Delta t_1 = \text{CN} \left(\frac{1}{2} \frac{\Delta x}{|u| + c} \right) \text{ et} \\
 \Delta t_2 &= \text{CN} \left(\frac{1}{2} \frac{\Delta y}{|v| + c} \right) \quad (25)
 \end{aligned}$$

avec, CN : est le nombre de courant, u : vitesse longitudinale, v : vitesse transversale et c : célérité de l'onde .

7.1 Application sur un élargissement progressif à faible pente

Dans cette application, on va faire la simulation et l'analyse d'un écoulement dans un élargissement progressif symétrique à section transversale rectangulaire avec une pente de fond nulle (fig. 5).

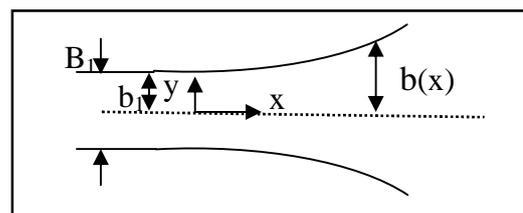


Figure 5. Elargissement progressif.

Avec la largeur $b(x)$ est donnée par la relation :

$$\frac{b(x)}{b_1} = \frac{1}{2} \left(\left[\frac{x}{b_1 Fr_1} \right]^{3/2} + 1 \right)$$

Les conditions aux limites pour cette application sont :

- Le tirant d'eau amont est $h_0=0,0305$ m
- La longueur est de 0,60 m
- La vitesse absolue est de 1,094 m/s
- La vitesse transversale à l'amont $v=0$ m/s
- La vitesse longitudinale à l'amont $u=1,094$ m/s
- Le coefficient de Manning $Cn= 0,012$
- Le rapport profondeur- largeur est : $h_0/b_1= 0,25$

Les conditions initiales utilisées sont h , u_0 , et v_0 seront spécifiées en tout point du maillage[2] .

Les figures 6 et 7 montrent respectivement les lignes d'eau au niveau de l'axe et au niveau de la paroi latérale du canal.

Les figures 8 et 9 représentent respectivement la vitesse absolue et le nombre de Froude au niveau de l'axe du canal.

D'après la figure 9, on constate que le nombre de Froude est supérieur à un, c'est pourquoi l'écoulement est toujours supercritique dans le divergent progressif.

- Au niveau de l'axe juste à l'entrée du divergent, le profil obtenu se trouve légèrement au dessous du profil expérimental [2]. Par contre, au niveau de la paroi, une bonne concordance existe entre le profil calculé par la méthode des volumes finis et le profil donné par les mesures expérimentales.

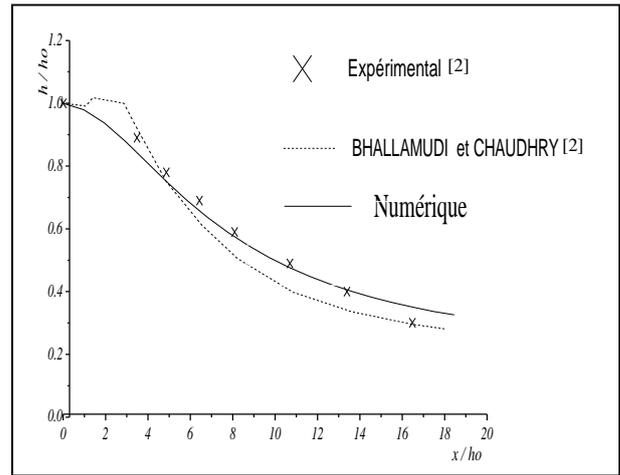


Figure 6. Ligne d'eau au niveau de l'axe de symétrie dans un élargissement progressif.

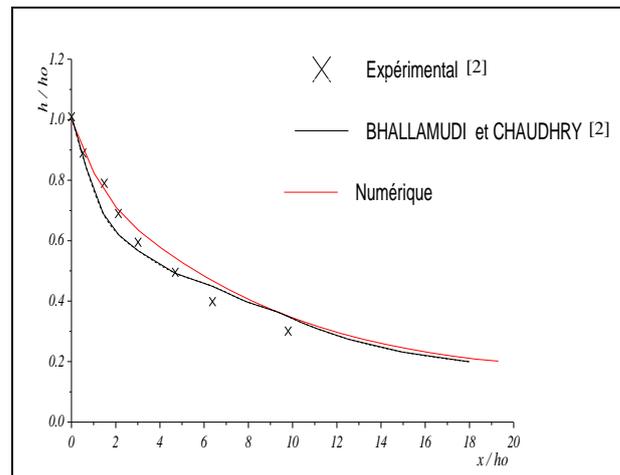


Figure 7. Ligne d'eau au niveau de la paroi latérale dans un Élargissement progressif.

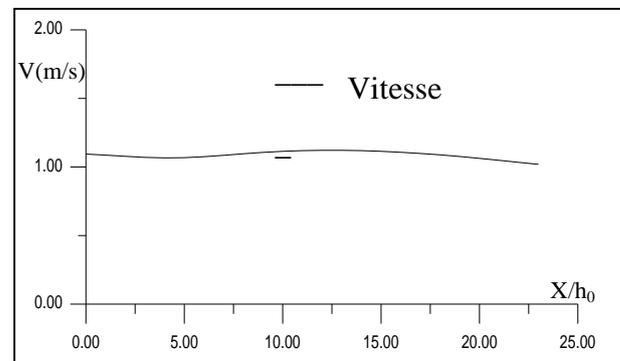


Figure 8. Vitesse absolue au niveau de l'axe de l'écoulement.

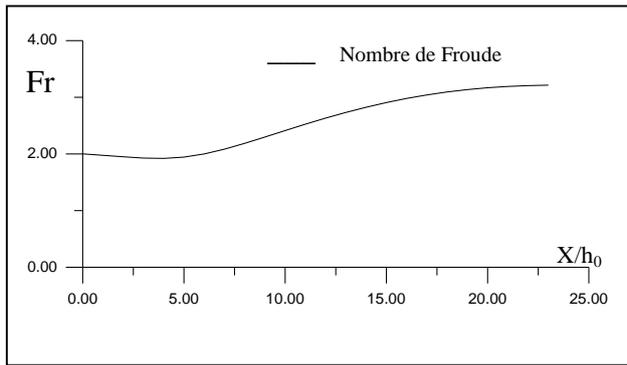


Figure 9. Nombre de Froude (*Fr*) au niveau de l'axe l'écoulement.

Les figures 10 et 11 montrent respectivement l'écoulement à trois dimensions et la courbe iso hauteur dans le divergent progressif.

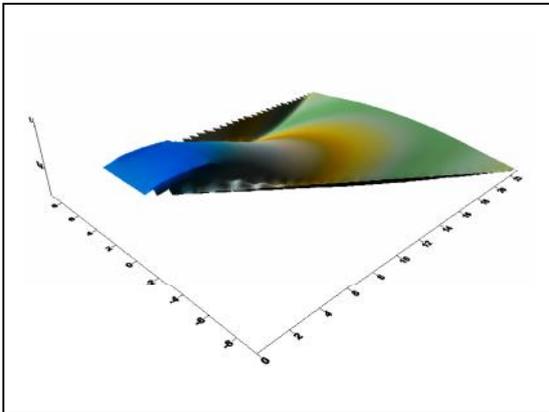


Figure 10. Représentation à trois dimensions de l'écoulement dans un divergent progressif.

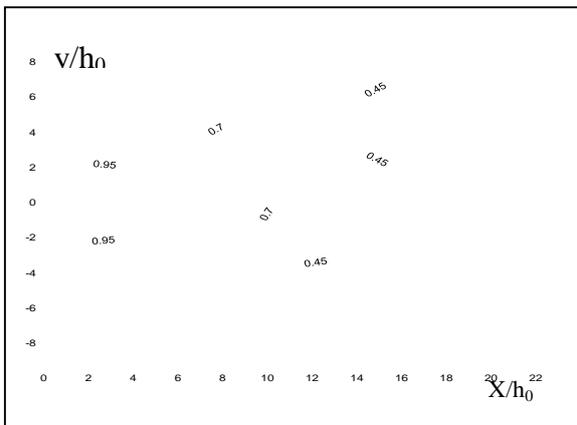


Figure 11. Courbes iso-hauteurs dans un divergent progressif.

On remarque que les résultats numériques obtenus avec la méthode des volumes finis utilisée dans ce travail présentent un accord satisfaisant avec les résultats expérimentaux [2] au niveau de l'axe et de la paroi latérale du canal.

7.2 Application sur un élargissement progressif avec une pente de fond nulle

Dans cette application, on va faire la simulation et l'analyse d'un écoulement dans un élargissement progressif symétrique à section transversale rectangulaire avec une pente de fond nulle.

Les conditions aux limites pour cette application sont :

Le nombre de Froude $Fr=2$ à l'entrée et le débit est de $31,316 \text{ m}^3/\text{s}$. La largeur $b_1=10\text{m}$, $h=1\text{m}$ et la longueur est de 30m .

Les figures 12 et 13 représentent respectivement les lignes d'eau au niveau de l'axe et au niveau de la paroi latérale du canal obtenues expérimentalement [16] et numériquement. On constate au niveau de l'axe et au niveau de la paroi latérale du canal les résultats obtenus concordent bien avec les résultats expérimentaux.

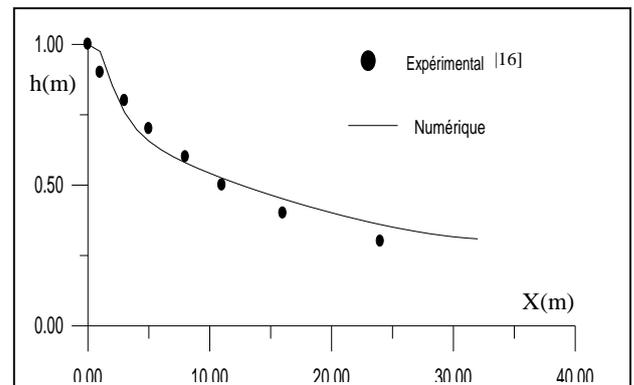


Figure 12. L'allure de la ligne d'eau au niveau de la paroi du divergent progressif.

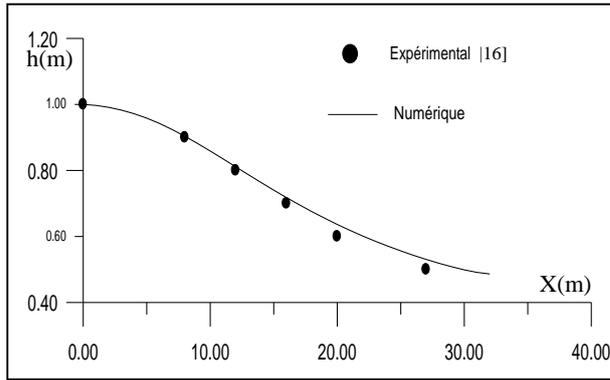


Figure 13. L'allure de la ligne d'eau au niveau de l'axe du divergent progressif.

Les figures 14 et 15 montrent respectivement le nombre de Froude et la vitesse absolue au niveau de l'axe du canal.

D'après la figure 14, on remarque que le nombre de Froude est supérieur à un le long du canal, c'est pourquoi l'écoulement est toujours torrentiel dans le canal.

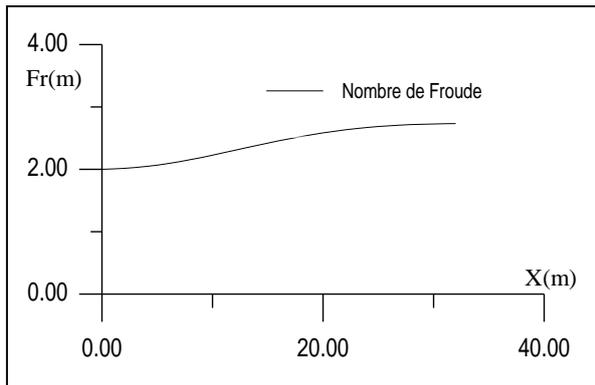


Figure 14. Nombre de Froude (Fr) au niveau de l'axe de l'écoulement.

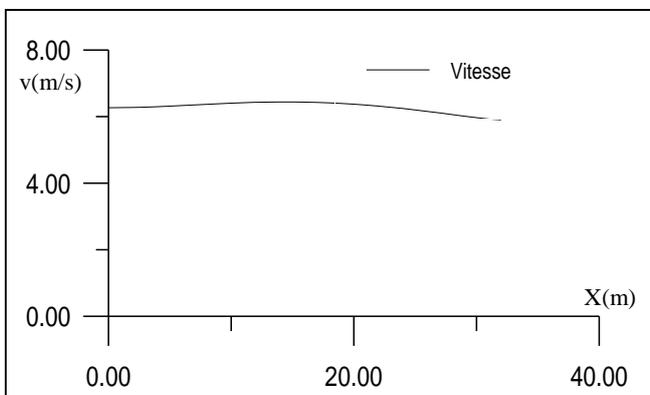


Figure 15. Vitesse absolue au niveau de l'axe de l'écoulement.

Les figures 16 et 17 représentent respectivement l'écoulement à trois dimensions et la courbe iso hauteur dans le divergent progressif.

Sur la base des résultats numériques obtenus avec la méthode des volumes finis utilisée dans ce travail, nous concluons que ces résultats présentent un accord satisfaisant avec les résultats expérimentaux [16] aux niveau de l'axe et de la paroi latérale du canal.

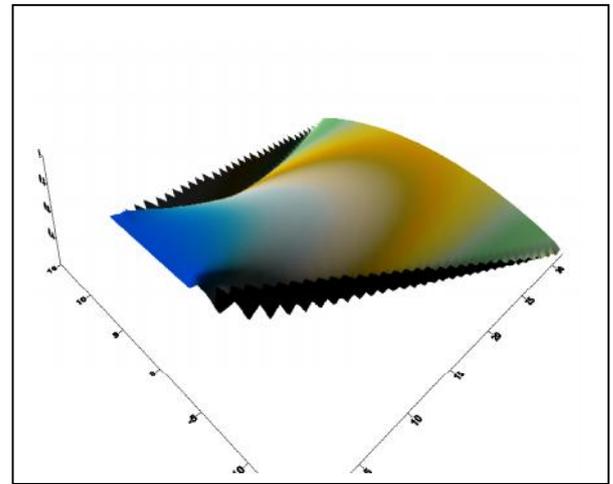


Figure 16. Représentation à trois dimensions de l'écoulement dans un divergent progressif.

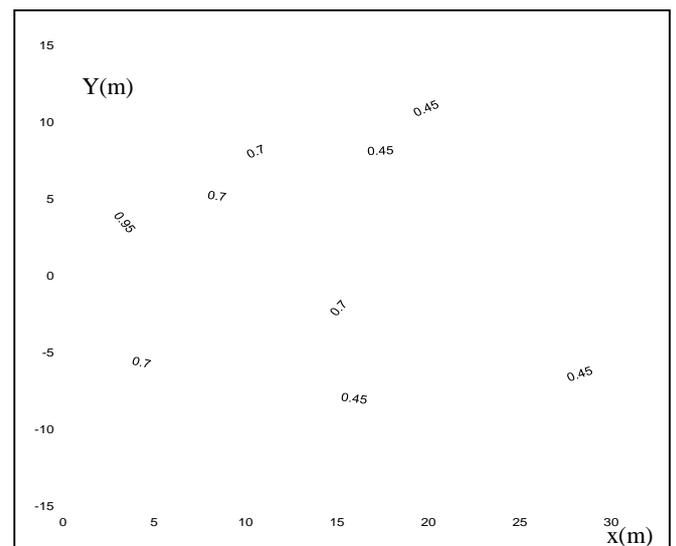


Figure 17. Courbes iso-hauteurs dans un divergent progressif.

8. CONCLUSION

L'intérêt pratique de ce type d'écoulement à surface libre est de permettre un dimensionnement rationnel et économique des bajoyers dans différentes structures hydrauliques convergentes et divergentes de grande étendue.

Pour cela, il faut que le but de la simulation numérique est de réaliser un modèle mathématique qui s'approche aux résultats expérimentaux le plus possible et non pas avoir les mêmes (ce qui est presque impossible).

Nous avons remarqué que les chocs, s'ils existent sont bien pris en compte par le modèle (position, direction et forme).

L'hypothèse de la distribution hydrostatique des pressions n'est plus valable dans la zone de choc.

L'augmentation du nombre d'éléments et la prise en compte de certains phénomènes, comme la turbulence, la distribution non hydrostatique des pressions au voisinage du choc et l'effet de la couche limite, entraînera automatiquement à des résultats plus précis, donc une bonne approche au modèle expérimental.

NOMENCLATURE

$B(x)$	Largeur de la transition
b_1	Largeur à l'amont de la transition
b_2	Largeur à l'aval de la transition
c	Célérité de l'onde
C_n	Nombre de courant
F_r	Nombre de Froude
f_e	Paramètre de courbure de la paroi
g	Accélération gravitationnelle
H	Hauteur de l'onde
h	Profondeur de l'écoulement
h^f	Profondeur de l'écoulement aux points fictifs
I	Indice de maillage suivant la direction $x(\xi)$
J	Indice de maillage suivant la direction $x(\eta)$
K	Indice de l'incrément du pas de temps

K_f	Facteur de forme
L	Longueur de la transition
P	Pression hydrostatique
Q	Débit de l'écoulement
S_{fx}	Pente de frottement suivant l'axe des x
S_{fy}	Pente de frottement suivant l'axe des y
$S_{f\xi}$	Pente de frottement suivant l'axe des ξ
$S_{f\eta}$	Pente de frottement suivant l'axe des η
S_{ox}	Pente suivant l'axe des x
S_{oy}	Pente suivant l'axe des y
$S_{o\xi}$	Pente suivant l'axe des ξ
$S_{o\eta}$	Pente suivant l'axe des η
u	Vitesse de l'écoulement suivant l'axe x
v	Vitesse de l'écoulement suivant l'axe y
V	Vitesse absolue de l'écoulement
V_m	Vitesse moyenne
V^f	Vitesse absolue de l'écoulement aux points fictifs
u^f	Composante de la vitesse de l'écoulement selon x aux points fictifs
v^f	Composante de la vitesse de l'écoulement selon y aux points fictifs
y_m	Hauteur moyenne
α	Angle d'inclinaison du fond du canal
β	Angle de choc
θ	Angle de déviation de la paroi latérale
ρ	Masse volumique
ψ	Angle que fait la résultante de la vitesse d'écoulement V avec l'axe x

Références

- [1] F. Snares, et T. Acatay, *Contribution à l'étude des écoulements supercritiques dans des canaux coudés*, Comptes rendus de l'Académie des Sciences (Paris), 255, 1962, pp. 1-3.
- [2] G. Bagge et J.B. Herbich, *Transitions in supercritical open-channel flow*, Journal of Hydraulic Eng., ASCE, Vol. 93 (5), 1967, pp. 23-41.

- [3] M.J. Sibony, et Cl. Mardon, *Analyse numérique système linéaire et non linéaire*, Herman, Editeurs des sciences et des arts, Paris, 1982.
- [4] C. Hirsch, *Numerical Computation of Internal and External Flows*, J. Wiley & Sons, Chicester, Vol. II, 1988.
- [5] M. Louaked et L. Hanich, *TVD Scheme for the Shallow Water Equations*, JHR, 36, 1988, pp. 363-378.
- [6] O.F. Jimenez et M.H. Chaudhry, *Computation of supercritical free-surface flow*, Journal of Hydraulic Eng., ASCE, Vol. 114 (4), 1989, pp. 377-395.
- [7] R.J. Fennema et M.H. Chaudhry, *Explicit Methods for 2D Transient Free-Surface Flows*, Journal of Hydraulic Eng., ASCE, Vol. 116 (8), 1990, pp. 1013-1034.
- [8] S.M. Bhallamudi et M.H. Chaudhry, *Computation of flow in open-channel transitions*, Journal of Hydraulic Research, Vol. 30 (1), 1992, pp. 77-93.
- [9] W.H. Hager et S.K. Mazumber, *Supercritical flow at abrupt expansions*, Proc. Inst. Civil Eng., Water Maritime & Energy, London, 1992, pp. 153-166.
- [10] F. Alcrudo et P. Garcia-Navarro, *A High resolution Godunov-type Scheme in Finite Volumes for the 2D Shallow-water Equations*, Int. J. Numer. Methods in Fluids, Vol. 16, 1993, pp. 489-505.
- [11] R.J. Fennema et M.H. Chaudhry, *Implicit methods for two-dimensional unsteady free-surface flows*, Journal of Hydraulic Research, Vol. 27 (3), 1994.
- [12] M. Younus et M. H. Chaudhry, *A depth-averaged k-e turbulence model for the computation of free-surface flow*, J. of Hydraulic Research, Vol. 32 (3), 1994.
- [13] M. Nujic, *Efficient Implementation of Nonoscillatory Schemes for the Computation of Free Surface Flow*, Journal of Hydraulic Research, Vol. 33 (1), 1995, pp. 101-111.
- [14] N.G., *An Unstructured Finite-volume Algorithm for Predicting Flow in Rivers and Estuaries*, Computers & Fluids, Vol. 27 (4), 1998, pp. 479-508.
- [15] P. Brufau et P. Garcia-Navarro, *Two dimensional Dam Break Flow Simulation*, Int. J. Num. Methods in Fluids, Vol. 33 (1), 2000, pp. 35-58.
- [16] A.J. Klonidis et J.V. Soulis, *An implicit scheme for steady two-dimensional free-surface flow calculation*, J. of Hydr. Res., Vol. 39 (4), 2001.
- [17] M. Mahfoud et S. Benhadid, *Etude de l'écoulement dans une contraction brusque*, Rhéol., Vol.1, 2002, pp.26-34.
- [18] V. Caleffi et G. Saragat, *Simulation des évènements hydrologiques extrêmes dans les cours d'eau naturels par une méthode en volumes finis*, International Association of Hydraulic Engineering and Research, Journal of Hydraulic Research, Vol. 41 (2), 2003, pp. 167-177.
- [19] A.I. Delis et Th. Katsaounis, *Relaxation schemes for the shallow water equations*, Int. J. Numer. Meth. Fluids, Vol. 41, 2003, pp. 695-719.
- [20] A. Kaufmann et al., *Direct Numerical Simulation of Particle-Laden Homogeneous Isotropic Turbulent Flows Using a Two-Fluid Model Formulation*, 5th Int. Conf. Multiphase Flow, Yokohama, Japan, 2004, Paper 443.