

إشكالية العلاقة بين الرياضيات والمنطق

الدكتور: عبد الحليم بوهلال

أستاذ فلسفة العلوم والمنطق الرياضي

جامعة زيان عاشور الجلفة

الملخص باللغة العربية:

إن اكتشاف هندسات جديدة في القرن التاسع عشر أحدث ثورة في الرياضيات، إذ فقد مكان إقليدس صفة اليقين التي كان يتمتع بها، نتيجة البرهنة على وجود أمكنة أخرى متمثلة في المقعرة والمحدبة. تُفتح المجال أمام البحث عن أساس آخر للرياضيات، فظهرت عدة مذاهب، لتبني كل منها أساسا لليقين الرياضي مختلفا عن غيره، هي: مذهب جبر المنطق والمذهب اللوجستيقي والمذهب الأكسيوماتيكي والمذهب الحدسي. فكان أن طرح السؤال حول العلاقة بين الرياضيات والمنطق. وهذا بالضبط ما سنحاول الإجابة عليه من خلال هذا المقال.

الملخص باللغة الفرنسية:

La découverte de nouvelles géométries au XIXe siècle a révolutionné les mathématiques, car (l'espace) selon Euclide a perdu sa(certitude) en raison de démontrer l'existence d'autres (espaces) représentés dans la partie (concave et convexe). la porte depuis lors et ouverte pour trouver une autre base pour les mathématiques, plusieurs doctrines sont apparus et chacune à adopter un principe pour la (certitude) en mathématiques différent des autres, sont: la doctrine de l'algèbre de la logique et de la doctrine Logistique et de la doctrine Axiomatique et de la doctrine intuitive. et tout cela à poser la question au sujet de la relation entre les mathématiques et la logique. C'est exactement ce que nous allons essayer de répondre à travers cet article.

كانت الرياضيات دائما موضوع اهتمام شديد من طرف الفلاسفة، اعتبرها أفلاطون المثل الأعلى لمعرفتنا عالما يتجاوز الحس، قوامه كائنات معقولة لا يدركها غير العقل وحده. وتوقف تلميذه أرسطو عند اليقين الرياضي مفسرا إياه، على أساس أنه مستمد من كون أن الرياضيات علم برهاني استنباطي. لذلك عمد إلى

إقامة المنطق كعلم برهاني يعتمد هو كذلك على المنهج الاستنباطي. ليظهر فيما بعد ديكارت ويقرر وهو بصدد وضع تصوره للعلم الحديث: إن العلم ينبغي أن يستند على فكرة الكم لا الكيف، وأبرز مثال وأوضحه للعلم الكمي عنده هو الرياضيات، معتبرا إياها المنطق الحقيقي للعقل ، هذا من جهة.

ومن جهة أخرى، أدى ظهور الاتجاه الرياضي في المنطق، الذي اعتبر أن المنطق التقليدي منطق ناقص من حيث شكله، بل وأن فيه بعض المادية التي تحول بينه وبين الانطباق على جميع صور الفكر، إلى اكتشاف المنطق الرياضي الذي سيطر ولا يزال على دوائر الفكر المنطقي. كل هذا دفع بنا إلى البحث عن حقيقة العلاقة بين المنطق والرياضيات، خاصة وأن تطورهما في القرن العشرين يجعل من الصعوبة الفصل بينهما، بل ودفع بالبعض إلى اعتبار أن الاستنتاج الرياضي يمكن رده إلى مجرد استنتاج منطقي. وهذا ما يتعارض مع آراء بعض الفلاسفة كديكارت وبوانكاري وجوبلو الذين يرفضون مثل هكذا اتصال بينهما. فما هي صلة الرياضيات بالمنطق؟ هل يمكن رد الرياضيات إلى أصول منطقية؟ أم أن المنطق هو من يرتد إلى منابع رياضية؟.

وللإجابة على هذه الإشكالية وجدنا أنه من الضروري التطرق إلى المنطق الرياضي نشأة وخصائصها، خاصة تلك التي يشترك فيها مع الرياضيات، ثم العمل على استنطاق الصلة الموجودة بينهما، فكان تدرج بحثنا على هذا النحو:

أولاً: من المنطق الصوري إلى المنطق الرياضي

اعتقد الفيلسوف الألماني كانط أن منطق أرسطو كامل منذ ولد، وأنه لم يتقدم خطوة واحدة إلى الأمام¹ منذ أن حُددت قواعده وصيغت قوانينه، مما يعني أنه لم يكن في حاجة إلى أي اكتشاف يمكن أن يتطور بموجبه فيتقدم. بما أنه يتميز في نظره بطبيعة صورية خالصة، وبأن أحكامه تحليلية، مما جعله لا يُعنى على الإطلاق بمحتوى تصورات الفكر، إذ يكفيه مبدأ عدم التناقض معياراً يميز به بين الفكرة الصادقة والأخرى الخاطئة².

لكن تاريخ علم المنطق يظهر لنا فلاسفة تناولوا المنطق الصوري بالدراسة والنقد. حيث عمدوا إلى تطبيق نتائج الرياضيات عليه. ففي القرن السابع عشر كان ليبنتز يقود هذه الحركة التجديدية في المنطق وبقوة. لتزداد نمواً مع هاملتون ونظريته كم المحمول.

لكن تكوين المنطق الرياضي بدأ مع أعمال جورج بول ودي مورغان وتوسعت قواعده بفضل فريجة وبيانو³. إذ تعتبر محاولة فريجة أول عمل ناجح قدم من خلاله نظرة جديدة إلى القضية الحملية، حيث أدخل عليها مفهومين جديدين هما: الدالة والقيمة في مقابل الموضوع والمحمول ، لتصبح القضية الحملية

تعبّر عن علاقة استلزام صوري بين دالتين⁴، ثم إنه يعتبر أول من وضع شروط الصورية، ونفذها بدقة، وذلك بفضل صياغته لقواعد المنطق ودون أن يشير إلى مدلولاتها⁵. هذا وقد نضج هذا المنطق الجديد خاصة مع كتاب "مبادئ الرياضيات" لرسل وهواتهيد.

وقد نشأ المنطق الرياضي عن مصدرين: الأول منهما يتمثل في المنطق الصوري . أما الثاني منهما فيتمثل في الطريقة البديهية النسقية التي ابتكرها الرياضي إقليدس. وواضح أن المنطق الرياضي ليس مفصول الصلة بالمنطق الصوري، بل هو امتداد وتطوير له، فعلاقة المنطق التقليدي بالمنطق المعاصر كعلاقة الجنين بالراشد. يقول كل من باسون واوكونر: >>إن الاختلاف بين المنطق الأرسطي التقليدي والمنطق الرمزي هو مجرد اختلاف في مراحل التطور. فالمنطق التقليدي مرتبط بالمنطق الرمزي ارتباط الجنين بجسم البالغ.<<⁶.

لقد أصبح المنطق الأرسطي نسقا من بين عدد من أنساق منطقية ظهرت في القرن العشرين، مثل نسق رسل ونسق حساب المحمولات وغيرها⁷، بل ولا يزال الباب مفتوحا أمام إبداع أنساق جديدة. فالمنطق الرياضي ليس جنسا آخر، يختلف عن جنس المنطق الصوري، وإنما هو منطق صوري ولكن في ثوب مغاير⁸.

إن المنطق الرياضي يتميز عن المنطق الصوري باستخدامه المنهج البديهي، والذي مكنه من أن يحوز على صفة النسقية، إذ أمسى يقوم على مجموعة من المبادئ اللامبرهنة، سميت بالبديهيات أو الأوليات، على أساسها يتم استنباط مجموعة من النتائج، أطلق عليها اسم القضايا المبرهنة، وذلك بالاعتماد على التعاريف وقواعد الاستنتاج.

ويمكن ضبط مميزات المنطق الرياضي على هذا النحو⁹:

أ- موضوع هذا العلم هو موضوع المنطق وذلك مهما كانت صورته.
ب- أدواته هي الرموز، بحيث يشير كل رمز فيه إلى تصور بسيط نسبيا، فهنا تم التخلي التام عن أي لغة غير الرمز.

ج- كما توجد رموز ثابتة توجد أيضا رموزا متغيرة يحددها نطاق معين من حيث المعنى.

د- كل نظرية في المنطق الرياضي تقوم على الاستدلال، فالمنطق الرياضي ظهر نتيجة تطبيق المناهج الرياضية على موضوعات المنطق الصوري ، مستخدما لغة خاصة من الصيغ والرموز¹⁰.

ونتيجة مقارنة بسيطة بين الرياضيات والمنطق يمكن أن نقف على عدة خصائص مشتركة بينهما، يمكن بسطها على هذا الشكل¹¹:

1- الرمزية: إن العلم الرياضي يستخدم الرموز في كل مسائله وعملياته، مما جعله يكتسب دقة عالية أهله لأن يُعد أنموذجا للعلم اليقيني الذي يمكن أن يُقتدى به. فهو وإن كان يدرس الكم في الأشياء والكون، إلا أنه لا يبحث في هذه الموضوعات من حيث أنها معطيات حسية، بل يبحث فيها على أنها رموز مجردة، فالفكر الرياضي يستمد موضوعه من تصورات ذهنية إنشائية لقضايا تتعلق بالمقادير، فالعدد (10) أو الرمز (ف) أو النقطة(.) مثلا، لا تنطبق على شيء معين في الواقع، بل تنطبق على مالا نهاية من الأشياء.

وفي المقابل إذا نظرنا في المنطق الرياضي، فإننا سنجد مسائله قد تم صياغتها بلغة رمزية¹² تماما كما الحال هو في الرياضيات. فقد تجاوز علماء المنطق الرياضي القصور الأرسطي المتعلق بالرموز، حيث نشأت على أيديهم لغة مستوحاة من تلك التي يتكلم بها الرياضي، ليتطور نتيجة ذلك المنطق بفضل هذا الجهاز الرمزي الذي ضم جملة من رموز تشير إلى:

1-1/ متغيرات القضايا مثل: ق ، ك ، ل ، م ،.....الخ.

2-1/ الثوابت المنطقية مثل الأقواس: ().

3-1/ العلاقات الرياضية مثل: الوصل والفصل والاستلزام والتكافؤ وغيرها.

2- الصورية: إن الرياضيات تشترك مع المنطق في خاصية الصورية، إذ نجد أن أرسطو قد رد جميع قضايا المنطق إلى وحدة صورية متمثلة في وحدة الموضوع والمحمول. ورغم تطور هذا المنطق وظهور المنطق الرياضي، إلا أنه ظل محتفظا بهذه الصفة الصورية التي أتاحت للعقل الرياضي استنباط وبسهولة كبيرة، قضية ما من قضية أخرى تلزم عنها بالضرورة. بل إنه صار علما صوريا ومصورنا بشكل خالص، مما يعني أن الصورية كخاصية لم تعد بالنسبة للمنطق المعاصر وسيلة فحسب، بل وهدفا في نفس الوقت¹³.

ومن ناحية أخرى أيضا نجد أن الرياضيات علم صوري، موضوعه الأساسي مجموعة من المفاهيم الكمية المجردة، ثم إن الاستنباط يعد جوهر العلم الرياضي والمنطقي معا.

3- الآلية: إن المنطق المعاصر آلي مثل الرياضيات تماما. فكما نتناول في الرياضيات عمليات على نحو آلي فنحول فيها ونبدل ونسقط ونقدم ونؤخر ونصل ونفصل بالأقواس حسب قواعد معينة، فقد قام العلماء في المنطق بنفس تلك العمليات.

إن كل من الرياضيات والمنطق يميل إلى التجريد، فكلاهما يهتم بالصورة دون المادة التي تفتقد إلى أي أهمية عندهما. كما أنهما يتعلقان بالنسب بين الأشياء في حد ذاتها. ويتفقان في الغاية، وهي الوصول إلى الربط الصحيح بين الأشياء عن طريق عمليات فكرية بسيطة تخضع لقواعد ثابتة وتتم بطريقة آلية¹⁴.

ثانيا: صلة الرياضيات بالمنطق

وبعد استخلاص تلك الخصائص المشتركة يمكن الآن أن نقف على العلاقة بين الرياضيات والمنطق من خلال تحليل مواقف ظهرت إلى الوجود وتصدت إلى هذه الإشكالية، خاصة بعد الأزمة التي مست المكان الإقليدي، فأصبح نتيجة ذلك اليقين الرياضي محل شك بعد أن اكتشفت الهندسات اللاإقليدية، ويمكن بيان تصورات تلك المواقف وفقا لها العرض :

1- مذهب جبر المنطق:

ذهب أنصار هذا المذهب إلى أنه يمكن التعبير عن المنطق برموز جبرية، مما يجعله مجرد فرع من فروع الرياضيات، أو نظرية من جملة نظريات العلم الرياضي، مثله مثل نظرية المجموعات وجبر الأعداد وغيرها¹⁵.

ويعتبر ليبنتز¹⁶ من السابقين الأوائل إلى استحداث مثل هذا التوجه، فقد عُد أول من تكلم عن جبر المنطق، وإن لم تلق أبحاثه نجاحا في أيامه. لكن عندما بين جورجبول أهمية جبر المنطق عاد الباحثون إلى آراء ليبنتز. وقد فسح هذا المذهب أمام بول مجالا واسعا للتطبيقات الرياضية خاصة في نظرية المجاميع التي ظهرت نتيجة أبحاث جورج كانتور وإسهامات ديديكاند الرياضية.

لقد أراد بول تكوين أرغانون منطقي متخذا من الرياضيات أنموذجا، حيث وجد فيها وسيلة لحل مسائل المنطق، ليصبح بذلك المنطق مجرد نظرية رياضية خاصة، تظهر في شكل استنتاجي¹⁷.

لقد اتجه بول إذا إلى الجبر أكثر من اتجاهه نحو المنطق، فكانت رموزه تشير إلى ثوابت رياضية جبرية، أكثر من إشارتها إلى ثوابت منطقية. وكان يلجأ إلى تطبيق المعادلات أو قواعد الحساب الرياضي دون قواعد المنطق وقوانينه، وحول قيمتي الصدق والكذب إلى قيمتين عدديتين هما الواحد والصفر على التوالي.

كما عمل أيضا على ترجمة أشكال اللغة العادية إلى إشارات مماثلة للإشارات الجبرية ، وجعلها مهيئة للحساب، فهو يرى أن كل عمليات اللغة المنظور إليها كأداة استدلال عقلي يمكن إجراؤها بواسطة منظومة إشارات مركبة من العناصر الآتية:

1-1/ رموز حرفية مثل: س ، ع ، ص ، إلخ. والتي تمثل أشياء تكون موضوعا لتصوراتنا.

2-1/ إشارات علمية مثل: + ، - ، x . والتي تمثل بدورها عمليات العقل التي بواسطتها يمكن دمج أو حل تصورات الأشياء بحيث تكون مفاهيم جديدة.

3-1/ إشارات الماهية: =.

هذا وقد ظهر من يدعم آراء بول، كأبحاث ماكول وجيفونن في إنجلترا، وأبحاث بيرس في أمريكا، وأبحاث شرودر في ألمانيا. وخلاصة هذا المذهب أن المنطق فرع من فروع الرياضيات.

ولم يسلم هذا الاتجاه من النقد، حيث ذهب جورج جنسن إلى أن جبر بول، ونتيجة للطابع الرياضي المحض لمناهجه، جعل منه نوعا خاصا من الجبر، أكثر مما هو منطق معمم، فهذا المنهج شكل غموضا في نظره على العمليات، لأنها لا تستطيع أن تتقبل أي تفسير منطقي¹⁸.

2- المذهب اللوجستيقي

يتزعمه فريجة ورسل، حيث عملا على رد الرياضيات إلى أصول منطقية، وقد أطلق على هذا الاتجاه اسم المدرسة المنطقية أو اللوجستيك¹⁹، فالرياضيات في نظر أنصار هذه المدرسة فرع من فروع المنطق وجزء منه. ولقد كان لتطور كل من المنطق والرياضيات دور في تأكيد هذا الموقف، إذ اتضح لعلماء الرياضيات خاصة بعد اكتشاف الهندسات اللاإقليدية مع لوباتشفسكي وريمان أنه لا بد من إعادة النظر من جديد في مسائل الهندسة خاصة، وفي مسائل الرياضيات عامة. لذا عملوا على إبعاد الأشكال الهندسية من العلم الرياضي، فكان أن ظهر في البداية ما يسمى بتحسيب الرياضيات من خلال رد الرياضيات إلى الحساب، لأنهم اعتقدوا أن الحساب سيوفر لهم ذلك اليقين²⁰، الذي فقدوه في المكان الإقليدي، وتعتبر هذه هي المرحلة الأولى في رد الرياضيات إلى أصول منطقية. حيث قام العالم بيانو برد الرياضيات إلى نظرية الأعداد الطبيعية: 0، 1، 2، 3، إلخ. ورأى أن الأعداد الطبيعية²¹ يمكن اشتقاقها من ثوابت أولية هي: الصفر، والعدد، والتالي. والتي منها اشتق خمس بديهيات هي:

أ- الصفر عدد

ب- التالي لأي عدد عدد

ج- ليس لعدددين التالي ذاته

د- الصفر ليس تاليا لأي عدد

و- أية خاصية تعود إلى الصفر فإنها تعود كذلك إلى التالي ولأي عدد يمتلك تلك الخاصية.

وما يلاحظ هنا أن بيانو أخذ هذه البديهيات عن العالم الألماني ديديكاند، وعن هذه الثوابت والبديهيات

نستطيع أن نؤلف الأعداد الطبيعية اللامنتهية²².

ورغم نجاح بيانو في رد الرياضيات إلى الأعداد الطبيعية، وتمكنه من وضع قضايا ابتدائية ساعدت على اشتقاق الرياضيات من المنطق، إلا أنه لم يتمكن من رد الرياضيات إلى المنطق بصفة نهائية²³. فنظريته لم تف بالغرض، لأن الثوابت تحمل عددا غير محدد من التأويلات التي تستوفيها بديهياته. ثم إن علماء الرياضيات وجدوا أيضا أن الحساب يقوم على حدس بالأعداد، فأنت تحس مثلا العدد: 1 ثم نظيف إليه : 2 و 3 و 4 و 5 وهكذا إلى ما لانهاية، لذلك توصلوا إلى أنه حتى تصبح الرياضيات دقيقة فلا بد من إقامة الحساب ، ثم إقامة كل الرياضيات على أساس منطقي، أي أن تشتق الرياضيات من المنطق، وهذا ما استوجب في نفس الوقت تطوير المنطق أيضا، حيث قام على هيئة نظرية استنباطية نبدأ فيها بمجموعة من المسلمات أو البديهيات، ومجموعة أخرى من الحدود غير المعرفة ثم نشق من هاتين المجموعتين كل القضايا، وذلك عن طريق الاستنباط الخالص.

وكان على المنطق أن يصيغ قوانينه صياغة رمزية فيتخلص من كثافة الألفاظ اللغوية، وأن يتحدث عن علاقات استنباطية أخرى تكون أشمل من تلك التي كانت موجودة في المنطق القديم، فأصبح بذلك يشتمل على الرياضيات²⁴. لتظهر المرحلة الثانية من عملية رد الرياضيات إلى المنطق حيث، تم رد الأعداد الطبيعية إلى المنطق، حيث قدم فريجة تعريفا مغايرا للعدد يقوم على فكرة تشابه الفئات، فساهم بذلك في تطور المنطق وحرره من الاقتران الاصطناعي مع الرياضيات²⁵. ورد الرياضيات إلى أصول منطقية، إذ توصل نتيجة دراسته لأسس وقوانين الحساب إلى أن الرياضيات تعمل وفقا للنسق الاستنباطي، وأن الحساب إنما هو نسق متطور للمنطق، لأن كل قضية حسابية هي بالضرورة قانون منطقي²⁶.

على هذا الأساس حاول إقامة المنطق كنسق استنباطي في المحل الأول وفق مفاهيم أساسية تجعل من النسق المنطقي نسقا محكما يحقق أهداف البحث العلمي²⁷. وقد أدت تحليلات فريجة إلى ظهور حساب المحمولات الذي يعتبر أساس نظرية المجموعات في الرياضيات المعاصرة²⁸.

أما المساهمة الأساسية في تطور المنطق، ورد الرياضيات إلى أصول منطقية فقد جاءت على يد كل من رسل وهواتميد²⁹، فقد انتهى كل منهما إلى اشتقاق الرياضيات كلها من مجموعة بسيطة من القضايا الابتدائية، تعتبر أصولا أساسية للأنساق بالنسبة للعلم الرياضي، مما يبين أن الاستنباط هو أساس رد الرياضيات إلى المنطق³⁰. لذا عمل رسل على إعادة البناء المنطقي للرياضيات، حيث وجد أن الرياضيات علم لا نعرف عما يتكلم، ولا نعرف إذا ما كان ما يقوله صحيح³¹.

ويرى رسل أن تطور كل من الرياضيات والمنطق في القرن العشرين يؤكد الصلة الوثيقة بينهما، بحيث لا يمكن وضع حد فاصل بينهما، فقد أصبحت الرياضيات أكثر منطقية والمنطق أكثر رياضيا، فالمنطق رياضيات في طور الشباب والرياضيات منطق في طور الرجولة على حد تعبيره³². ثم إن الرياضيات حسب رسل هي

مجموعة من القضايا الصورية التي تشتمل على متغيرات مختلفة من القضايا مثل: (ق ، ك ، ل ، م ، ...)، وثوابت منطقية مثل: الأقواس (). لذلك رد أصول الرياضيات إلى مبادئ منطقية أساسية، فاللوجستيك يدرس اشتقاق العدد من ثوابت منطقته الجديد، وعلى سبيل المثال: نجد أن القضية $2 = 1 + 1$ يمكن ردها إلى أصلها المنطقي على هذا النحو: إذا كانت s تأخذ قيمة 1 أي $s=1$ ، و s تأخذ قيمة 1 أي $s=1$ ، وكانت s تختلف عن s ، فإن s و s يكونان زوجا ($2=s$).

ثم إن في ابتكار نظرية الفئات دليل قوي على العلاقة المتينة التي تربط الرياضيات بالمنطق، إذ تتجلى في حساب الفئات الصياغات الرمزية المنطقية الرياضية، ذلك أن رسل قدم لنا من خلاله مفاهيم ومتغيرات وعلاقات تثبت تلك الصلة بينهما مثل: الفئة ، والفئة الفارغة ، والفئة الشاملة، والفئات: s ، e ، s مثلا، ومتغيرات العناصر: a ، b ، c مثلا، والجمع المنطقي، والضرب المنطقي، والمساواة، والانتماء، وغيرها³³.

وفي المقابل يمكن التعبير عن العديد من القضايا المنطقية بلغة رياضية، لذلك لا يمكن الفصل بين المنطق والرياضيات، فقد تحدى رسل كل من ينكر أن للمنطق والرياضيات هوية واحدة، أن يكشف لنا عند أية نقطة في أصول الرياضيات ينتهي المنطق وتبدأ الرياضيات، حينها فقط يكون موقفه صحيح. لكن رسل يعتقد أن هذا غير ممكن، لأن كل الرياضيات تشتق واقعيا من مبادئ منطقية.

ويمكن أن نشير هنا إلى أنه قد وُجهت عدة انتقادات إلى هذا المذهب، ولرسل على الخصوص، حيث وقف فيتغنشتاين له بالمرصاد، رافضا المنطق الرياضي، معتبرا أنه هو من أدخل الاضطراب والتشويش في الفكر الرياضي، وأن القول بأن هذا المنطق تمكن من يقدم لنا لغة اصطناعية أنموذجية، أمر مرفوض، ذلك أن اللغات العادية في نظره لا يمكن لها بأي حال من الأحوال أن تبلغ حد الكمال.

إن الرياضيات عند فيتغنشتاين ليست من المنطق، وأن المفسد حسبه في التقنية المنطقية هو أنها تجعلنا ننسى التقنية الرياضية الخاصة، ثم إن التقنيات الرياضية لها من الإشباع الذاتي ما يجعلها تكتفي تماما بنفسها، فبما أن البرهنة لا تخرج عن كونها مجرد سلسلة من التحويلات تمارس على الرموز، فإنه لا يوجد في المنطق البحث، ما يسمح بتقرير تعادل النتيجة في سلسلي التحويلات المتوازيتين في النسق الأولي وفي النسق الثانوي.

بل إن منطق رسل في اعتقاد فيتغنشتاين لا يعلمنا حتى عملية القسمة. لكن ورغم هذه الانتقادات التي وجهت إلى هذا الاتجاه، إلا أن إسهامات رسل جعلت علماء الرياضيات في نهاية المطاف يرتمون في أحضان المنطق.

3- المذهب الأكسيوماتيكي

ومن جهة أخرى برز في عالم الرياضيات مذهبا جديدا، بل ومغايرا لتلك المذاهب التي اختلفت حول مشكلة الصلة بين المنطق والرياضيات. تمثل في المذهب الأكسيوماتيكي الذي ذهب إلى الإقرار بأن هناك أصول للمنطق والرياضيات معا، هي الأكسيوماتيكي، مما يعني انتفاء فكرة أن يكون المنطق أصل للرياضيات أو العكس، بل إن هناك أصول لهما ذات طبيعة فوقية، أي فوق المنطق والرياضيات. وفي هذا تأكيد على أن هناك صلة داخلية بنائية بينهما مادام أن الأصل الأكسيوماتيكي مصدر لكليهما، ويعتبر ديفيد هيلبرت من وضع أسس هذه النظرية وزعيما لهذا المذهب.

ويفرض علينا هذا الاتجاه أن نبحث في مسألة النسق الاستنباطي الذي يبدأ بحدود أولية نقبلها دون برهنة عليها، لتستنبط بعد ذلك منها مجموعة من القضايا وفقا لنظام تسلسلي محكم³⁴، بحيث تعتمد كل قضية لاحقة على ما سبقها من قضايا. هذا ولا يُعتمد في البرهنة على مختلف القضايا على حدود أولية من خارج النسق الاستنباطي محل الدراسة، ومحدد مجال القول. ولقد سار المنطق على هذا المنوال ونفس الأمر حدث مع الرياضيات.

وهذا يعني أن الأصول الأكسيوماتيكية بعيدة كل البعد عن كل معنى منطقي أو رياضي، لأنها مجرد رموز اسمية³⁵ وصورية خالصة، سماها هيلبرت بالأكسيوماتيك، مما يفسر تعدد أنواع المنطق، فهناك منطق ثنائي القيمة، وهناك منطق متعدد القيم.

وقد اشترط هيلبرت لإقامة نسق أكسيوماتيكي ثلاثة شروط هي:

1-3/ شرط الاستقلال: أي أن تكون أصول النسق أو مسلماته مستقلة عن بعضها البعض، لأنها لو تداخلت لأدى ذلك إلى الوقوع في الغموض.

2-3/ شرط الإشباع: أن تكون الحدود الأولية أو المسلمات كافية، بحيث تسمح لنا بإجراء كل عمليات الاستنباط في النسق المبني عليها.

3-3/ شرط عد التناقض: لا بد أن تكون مسلمات النسق أو أصوله الأولى غير متناقضة فيما بينها، لأنها لو حدث أنها كانت متناقضة، فإن النتائج المستنبطة منها ستكون بالضرورة متناقضة، وهذا أمر مرفوض أصلا.

لكن وانطلاقا من شرط هيلبرت الأخير نلاحظ أنه عاد إلى المنطق، منطلقا منه كأصل، وهو من قرر أن مذهبه الأكسيوماتيكي لا يقام على أسس منطقية ولا رياضية، فيكون بذلك قد تناقض مع نفسه، هذا من جهة. ومن جهة أخرى نجد أن أبحاث هيلبرت ورغم أنها ساهمت في توضيح أسس المنطق الرياضي إلا أنها بقيت تراوح مكانها فلم تستمر ولم تتطور، بل وتضاءل تأثيرها خاصة أمام ما أحرزه المذهب اللوجستيقي من تطور متقدم بفضل انجازات رسل.

4- المذهب الحدسي

ومن ناحية أخرى ذهبت المدرسة الرياضية الحدسية بزعامة بوانكاري وبرور وغيرهما، إلى أننا ندرك الرياضيات مباشرة بواسطة الحدس، بينما يبقى دور المنطق عرضي في هذه العملية، إذ لا يتجاوز عمله حدود بسط ما تم حدسه³⁶.

ويرى هذا الاتجاه الحدسي أن الرياضيات متطابقة مع الجزء الدقيق من تفكيرنا، فلا يمكن لأي علم أو منطق أو فلسفة أن تكون أصلا للرياضيات، وأنه لمصادرة على المطلوب أن نستخدم أي مبرهنة فلسفية أو منطقية كوسيلة للبرهنة في الرياضيات، لأن مثل تلك المبرهنات تفترض مسبقا من أجل تكوين مفاهيم رياضية، ولأنها لا تعتمد على أية افتراضات لا يمكن أن ترتد إلى غير الحدس الذي يقدم المفاهيم والاستدلالات الرياضية واضحة ومباشرة³⁷.

إن الرياضيات وفقا لهذا المذهب إذا، تقوم على أساس إدراك الأعداد الأولية بالحدس، وتنشأ انطلاقا من التوليد الذاتي، الذي يبدأ بالحدس أيضا. ثم إن الرياضيات لا تعتمد على اللغة لأن أصولها حدسية، هذا ما دفع بالرياضي أرون هيتنج إلى الاعتقاد بأن منبع الرياضيات حدسي، مما يجعله مستقلا تماما عن اللغة، وأن النظرية الرياضية تعبر في الحقيقة عن واقعة حدسية متغلغلة في فكرنا³⁸. فعندما نقرر مثلا أن $6 = 2 + 8$ ، يكون مرد ذلك إلى تفكيرنا الذي حدس أن $2 + 8$ تؤدي إلى نفس نتيجة $4 + 6$ وهي 10.

إن أنصار هذا الاتجاه يؤكدون على الحدس بالأعداد وليس الحدس بالمكان، أي أنهم قد رفضوا الحدس المكاني. ويبقى دور المنطق في تصورهم مهما لأنه هو من يبين ويشرح مختلف الحدوس الرياضية التي تتوافق مع الجانب الدقيق من الفكر.

هذا وقد رفض هذا الاتجاه الحدسي مبدأ الثالث المرفوع وما نتج عنه من أن نفي النفي إثبات، أو أن كذب الكذب صدق. وأكدوا على أن القانون الحدسي المباشر هو قانون عدم التناقض، لأن حدسنا المباشر لا يقبل التناقض، أما فكرة نفي النفي إثبات التي تظهر في قانون الثالث المرفوع لا يمكن اعتبارها حدسا مباشرا واضحا، مادمت هي في حاجة إلى خطوة أكبر من الحدس المباشر.

وما يلاحظ على هذا الاتجاه الحدسي أنه تصور علاقة جديدة بين المنطق والرياضيات، فالتفكير الرياضي عندهم هو عبارة عن صيرورة بناء يشيد عالمه الخاص مستقلا عن عالم التجربة، معتمدا في ذلك على الحدس الرياضي الأساسي. في حين يكون دور المنطق في نظرهم وسيلة لاحقة توفر لنا شرحا للكشوف الحدسية الرياضية.

إن الإحاطة بتلك الخصائص المشتركة بين المنطق الرياضي والرياضيات التي توقفنا عندها آنفاً. ثم تحليل مواقف المذاهب المذكورة أعلاه من إشكالية العلاقة بين المنطق والرياضيات كما عرضناه، يثبت تهاافت مزاعم الرأي الذي اعتقد أنه لا علاقة للرياضيات بالمنطق على أساس أن الرياضيات علم قائم بذاته، ذلك أن أوضح دليل وأقواه على وجود الصلة الوثيقة بينهما هو المنطق الرياضي في حد ذاته، الذي هو حصيلة تطبيق المنهج الرياضي على المنطق الصوري، وقد ابتكر هذا المنطق نتيجة الاهتمام الذي حظي به من طرف الفلاسفة وعلماء الرياضيات معاً. فالفلاسفة اشتغلوا به وأعلوا من قيمته لما بحثوا عن ما يضمن لنتائج أبحاثهم القوة والصرامة والسداد. كما توجه نحوه علماء الرياضيات بالبحث عندما اصطدموا بأزمة اليقين في الرياضيات فكان لابد من إيجاد أساس للرياضيات يضمن لها اليقين المفتقد على إثر اكتشاف الهندسات اللاإقليدية.

ثم إن هناك تشابه كبير بينهما، فالمنطق الرياضي لا يُعنى بمحتوى العبارات والاستدلال، بل بصورها فقط. لذا استخدم هذا المنطق الرموز من متغيرات وثوابت، وأدوات التكميم، وصياغات العبارات والحجج الاستدلالية، مما جعله يحوز على صفتي الرمزية والنسقية، مثله مثل الرياضيات تماماً.

وختاماً، لا شك أن هناك تأثير متبادل بين المنطق بصفة عامة والمنطق الرياضي بصفة خاصة، والرياضيات. فالمنطق الرياضي استعان بالمنهج الرياضي، هذا من جهة. ومن جهة أخرى تأثرت الرياضيات كثيراً بالمنطق، حيث نجد أن الأجزاء الجوهرية في الرياضيات قد نشأت من المنطق الرياضي مثل: نظريات اللوغاريتم والدوال التراجعية. كما أن المنطق الرياضي طُبّق في الهندسة الإلكترونية، أي في نظرية الأجهزة الآلية للتحكم.

الهوامش:

- 1- أحمد موساوي، هل يمكن اعتبار المنطق التقليدي والمنطق المعاصر منطقين مختلفين؟، مجلة المبرز، المدرسة العليا للأساتذة للأدب والعلوم الإنسانية، العدد الأول، جانفي- جوان 1993، الجزائر، ص 16.
- 2- E.Kant. *Logique*. trad.Guillear.mit.J.Vrin. Paris. 1966. P168.
- 3- عبد الرحمن بدوي، الموسوعة الفلسفية ج2، المؤسسة العربية للدراسات والنشر، ط1، بيروت، سنة 1984، ص475.
- 4- أحمد موساوي، هل يمكن اعتبار المنطق التقليدي والمنطق المعاصر منطقين مختلفين؟، (مرجع سابق)، ص 17.
- 5- كريم متي، المنطق الرياضي، مؤسسة الرسالة، ط2، بيروت، سنة 1983، ص23.
- 6- النص نقلاً عن: المصدر نفسه، ص 24.
- 7- أحمد موساوي، هل يمكن اعتبار المنطق التقليدي والمنطق المعاصر منطقين مختلفين؟، ص21.
- 8- ماهر عبد القادر محمد علي، فلسفة العلوم- المنطق الرياضي -، دار النهضة العربية، د ط، بيروت، سنة 1985، ص13.
- 9- عبد الرحمن بدوي، الموسوعة الفلسفية ج2، (مرجع سابق)، ص476.
- 10- لجنة من العلماء، الموسوعة الفلسفية، إشراف م روزنتال و ب بودين، ترجمة: سمير، دار الطليعة، ط6، بيروت، سنة 1987، ص500.

- 11- علي عبدالمعطي محمد والسيد نفاذي، أسس المنطق الرياضي، دار المعرفة الجامعية، الإسكندرية، سنة 1988، ص169.
- 12- محمود فهمي زيدان، المنطق الرمزي، دار النهضة العربية، د ط، بيروت، سنة 1979، ص 21.
- 13- أحمد موساوي، هل يمكن اعتبار المنطق التقليدي والمنطق المعاصر منطقين مختلفين؟، ص ص 20 – 21.
- 14- عبد الرحمن بدوي ، الموسوعة الفلسفية ج2، (مرجع سابق)، ص 475.
- 15- علي عبدالمعطي محمد والسيد نفاذي، (مرجع سابق)، ص172.
- 16- لجنة من العلماء، الموسوعة الفلسفية، (مرجع سابق)، ص498.
- 17- روبر بلانشي، المنطق وتاريخه من أرسطو حتى رسل، ترجمة: خليل أحمد خليل، ديوان المطبوعات الجامعية، د ط، الجزائر، د س، ص 409.
- 18- المرجع السابق، ص 376.
- 19- كريم متي، المنطق الرياضي ، (مرجع سابق)، ص 294.
- 20- علي عبدالمعطي محمد والسيد نفاذي، أسس المنطق الرياضي (مرجع سابق)، ص179.
- 21- ماهر عبد القادر محمد علي، فلسفة العلوم- المنطق الرياضي -، (مرجع سابق)، ص 53.
- 22- كريم متي، المنطق الرياضي ، (مرجع سابق)، ص297.
- 23- ماهر عبد القادر محمد علي، فلسفة العلوم- المنطق الرياضي -، (مرجع سابق)، ص 54.
- 24- علي عبدالمعطي محمد والسيد نفاذي، أسس المنطق الرياضي (مرجع سابق)، ص180.
- 25- روبر بلانشي، المنطق وتاريخه من أرسطو حتى رسل، (مرجع سابق)، ص418.
- 26- ماهر عبد القادر محمد علي، فلسفة العلوم- المنطق الرياضي -، (مرجع سابق)، ص61.
- 27- المرجع السابق، نفس الموضوع.
- 28- أحمد موساوي، تحليل القضية الحملية عند أرسطو، ابن سينا، غوتلوب فريجة، مجلة المبرز، المدرسة العليا للأداب والعلوم الإنسانية، العدد الثاني، جويلية- ديسمبر 1993، الجزائر، ص 87.
- 29- لجنة من العلماء، الموسوعة الفلسفية، (مرجع سابق)، ص500.
- 30- علي عبدالمعطي محمد والسيد نفاذي، أسس المنطق الرياضي (مرجع سابق)، ص194.
- 31- روبر بلانشي، المنطق وتاريخه من أرسطو حتى رسل، (مرجع سابق)، ص414.
- 32- براتراند رسل، مقدمة للفلسفة الرياضية، ترجمة: محمد مرسي أحمد، مؤسسة سجل العرب، د ط، القاهرة، سنة 1962، ص 194.
- 33- B.russel – A.Whitead: **Principia Mathematica**, Cambridge University Press, London, vol. 1, 1963, p.205.
- 34- لجنة من العلماء، الموسوعة الفلسفية، (مرجع سابق)، ص503.
- 35- علي عبدالمعطي محمد والسيد نفاذي، أسس المنطق الرياضي (مرجع سابق)، ص183.
- 36- المرجع السابق ، ص 186.
- 37- ماهر عبد القادر محمد علي، فلسفة العلوم- المنطق الرياضي -، (مرجع سابق)، ص294.
- 38- علي عبدالمعطي محمد والسيد نفاذي، أسس المنطق الرياضي (مرجع سابق)، ص 186.

قائمة المصادر والمراجع

أولا/ باللغة العربية

- 1- أحمد موساوي، تحليل القضية الحملية عند أرسطو، ابن سينا، غوتلوب فريجة، مجلة المبرز، المدرسة العليا للآداب والعلوم الإنسانية، العدد الثاني، جويلية- ديسمبر 1993، الجزائر.
- 2- أحمد موساوي، هل يمكن اعتبار المنطق التقليدي والمنطق المعاصر منطقين مختلفين؟، مجلة المبرز، المدرسة العليا للأساتذة للآداب والعلوم الإنسانية، العدد الأول، جانفي- جوان 1993، الجزائر.
- 3- براتراند رسل، مقدمة للفلسفة الرياضية، ترجمة: محمد مرسي أحمد، مؤسسة سجل العرب، د ط، القاهرة، سنة 1962.
- 4- روبير بلانشي، المنطق وتاريخه من أرسطو حتى رسل، ترجمة: خليل أحمد خليل، ديوان المطبوعات الجامعية، د ط، الجزائر، د س.
- 5- عبدالرحمن بدوي، الموسوعة الفلسفية ج2، المؤسسة العربية للدراسات والنشر، ط1، بيروت، سنة 1984.
- 6- علي عبدالمعطي محمد والسيد نفاذي، أسس المنطق الرياضي، دار المعرفة الجامعية، الإسكندرية، سنة 1988.
- 7- كريم متى، المنطق الرياضي، مؤسسة الرسالة، ط2، بيروت، سنة 1983.
- 8- لجنة من العلماء، الموسوعة الفلسفية، إشراف م روزنتال و ب بودين، ترجمة: سمير كرم، دار الطليعة، ط6، بيروت، سنة 1987.
- 9- ماهر عبد القادر محمد علي، فلسفة العلوم- المنطق الرياضي -، دار النهضة العربية، د ط، بيروت، سنة 1985.
- 10- محمود فهي زيدان، المنطق الرمزي، دار النهضة العربية، د ط، بيروت، سنة 1979.

ثانيا/ باللغة الأجنبية

- 1 B.russel – A.Whitead: **Principia Mathematica**, Cambridge University Press, London, vol. 1, 1963.
- 2 E.Kant.**Logique**.trad.Guilliear.mit.J.Vrin. Paris.1966.