



Etude Numérique Paramétrique de la Convection Naturelle dans les Métaux Liquides

A. BENCHATTI*, S. BOUABDALLAH, A. ATIA & B. GHERNAOUT

Laboratoire de Mécanique, Département de Mécanique, Université de Laghouat, Laghouat 03000.

**Corresponding author: a.benchatti@mail.lagh-univ.dz

Abstract :

In this work, a numerical study of natural convection in a square cavity filled with liquid metal was made. The cavity is subjected to a horizontal temperature gradient, the right wall is kept hot and the left wall is cold, also the vertical walls are maintained adiabatic. The conservation equations governing the flow are solved by the finite volume method. Validation and comparison of our results with those of another author (numerical and experimental) were made. The effect of Rayleigh number on flow structure and the thermal field was presented and discussed for the Rayleigh number ranging from 10^3 , 10^4 , 10^5 to 10^6 . Subsequently, a parametrical study was conducted by varying the aspect ratio of 1, 2, 3 to 4, and the Prandtl number of four types of fluids (water, air, Gallium and Mercury).

Keywords: Natural Convection - Liquids Metals - Square Cavity – Finite Volume.

Résumé :

Dans ce travail, une étude numérique de la convection naturelle dans une cavité carrée remplie du métal liquide a été faite. La cavité est soumise à un gradient de température horizontal, dont la paroi droite est maintenue chaude et la paroi gauche est froide, par ailleurs les parois horizontales sont maintenues adiabatiques. Les équations de conservation régissant l'écoulement sont résolues par la méthode des volumes finis. La validation et la comparaison de nos résultats obtenus avec ceux d'autre auteur (numérique et expérimental) ont été faites. L'effet du nombre de Rayleigh sur la structure de l'écoulement et le champ thermique a été présenté et discuté, pour le nombre de Rayleigh $Ra < 10^6$. Par suite, une étude paramétrique a été menée en faisant varier le rapport d'aspect de 1, 2, 3 à 4, et le nombre de Prandtl de quatre types de fluides (Eau, Air, Gallium et Mercure).

Mots clés : Convection Naturelle, Métaux Liquides, Cavité Carrée, méthode des Volumes finis.

1 Introduction

La convection naturelle d'un métal liquide contenu dans une cavité fermée représente un sujet adéquat de recherche scientifique, à cause de sa présence dans beaucoup de procédés industriels, tels que le refroidissement des réacteurs nucléaires, les composantes électronique et particulièrement lors du processus de croissance cristalline.

Stewart et Weinberg [1] furent parmi les premiers à étudier la convection naturelle au sein d'une cavité bidimensionnelle contenant de fluide a bas nombre de Prandtl avec des parois horizontales isolées leurs résultats démontrés que le comportement de l'écoulement dans les métaux liquides est différent de celui des fluides usuels. Cette étude a donné aux chercheurs un point de départ pour la recherche dans les métaux liquides dont [2-5] ont étudié ce phénomène en plusieurs conditions avec comparaison des résultats numériques par l'expérimental, ces résultats confirment que les métaux liquides sont un excellent milieu de transfert de chaleur.

L'objectif de ce travail est de faire une étude numérique paramétrique (Nombre de Rayleigh Ra, rapport d'aspect de la cavité A, et le nombre de Prandtl du fluide, Pr) de la convection naturelle dans une cavité carrée contenant un fluide à faible Prandtl (Métal Liquide) et soumise à un gradient horizontal de température.

2 Géométrie du problème étudié

On considère une cavité carrée de côté H, la cavité est initialement remplie par un métal liquide à faible nombre de Prandtl (Gallium, $Pr = 0.025$). Le métal liquide est considéré comme un fluide newtonien incompressible, les deux parois horizontales sont adiabatiques, par ailleurs les parois verticales sont maintenues isothermes, dont la paroi gauche soumise à une température froide T_f , et la paroi droite soumise à une température chaude T_c ($T_c > T_f > T_{\text{fusion}}$), dans ces conditions, l'approximation de Boussinesq est valide, la configuration géométrique est illustrée sur la Fig.1

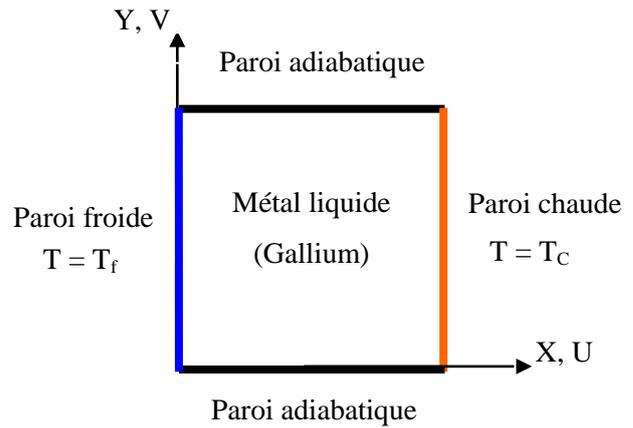


Fig.1 : Schéma représentant la forme de la cavité.

3 Formulation des équations

Les équations régissant l'écoulement sont l'équation de continuité, de quantité de mouvement et l'équation d'énergie. Pour une formulation simple du problème, nous avons considéré quelques approximations, entre autres les approximations de Boussinesq. Nous supposons alors que l'influence de la variation de la densité n'est prise en compte que par l'intermédiaire des forces de volume agissant sur le système, le fluide étant supposé newtonien, incompressible et l'écoulement stationnaire. La densité du fluide, dans le terme des forces de volume, varie linéairement avec la température. Elle est donnée par la relation

$$\rho = \rho_0 [1 - \beta(T - T_0)] \quad (1)$$

Les équations de base régissant l'écoulement et les transferts de chaleur sous forme adimensionnelles utilisant par les variables adimensionnelles suivantes :

$$\left. \begin{aligned} X = \frac{x}{H}, Y = \frac{y}{H}, U = \frac{u}{\alpha/H} \\ V = \frac{v}{\alpha/H}, P = \frac{p}{\rho(\alpha/H)^2}, \theta = \frac{T - T_f}{T_c - T_f} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Après on obtient les équations adimensionnelles qui sont comme suit:

- **Equation de continuité**

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (3)$$

- **Equation de conservation de la quantité de mouvement**

$$U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \text{Pr} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) \quad (4)$$

$$U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \text{Pr} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) \quad (5)$$

$+ Ra \text{Pr} \theta$

• Equation de conservation d'énergie

$$U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \quad (6)$$

Les Conditions aux limites sont données par les équations suivantes :

$$\begin{cases} X = 0 \\ X = 1 \end{cases} \quad \text{Et } 0 \leq Y \leq 1 ; U = V = 0 \quad (7a)$$

$$\text{À } X = 0 \quad ; \quad 0 \leq Y \leq 1 ; \theta = \theta_f \quad (7b)$$

$$\text{À } X = 1 \quad ; \quad 0 \leq Y \leq 1 ; \theta = \theta_c \quad (7c)$$

$$\begin{cases} Y = 0 \\ Y = 1 \end{cases} \quad \text{Et } 0 \leq X \leq 1 ; U = V = 0 \quad \text{Et } \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0 \quad (7d)$$

Dans les équations ci-dessus, nous notons la présence des nombres caractéristiques, à savoir le nombre de Rayleigh (Ra) et le nombre de Prandtl (Pr). Ces nombres adimensionnels sont définis par :

$$Ra = \frac{g \cdot \beta \cdot (T_c - T_f) H^3}{\nu \cdot \alpha} \quad \text{Et} \quad Pr = \frac{\nu}{\alpha}$$

3. Méthode numérique de résolution

Les équations (2) – (6) avec des conditions aux limites (7a-d) sont résolues en utilisant la méthode des volumes finies [6]. Le schéma Power Law a été utilisé, pour évaluer les flux convectifs et diffusifs à l'interface de chaque volume de contrôle, trois maillages non uniformes sont utilisés pour voir leurs effets sur la solution numérique, à savoir : 42×42 , 62×62 et 92×92 volumes de contrôle. Les calculs ont été réalisés avec un seul maillage 62×62 points.

4. Résultats

Dans cette partie, on a présenté les résultats de notre simulation numérique qui traduisent la solution numérique des équations aux dérivées partielles de notre modèle mathématique, associé avec les conditions aux limites.

4.1 Validation

Une validation et comparaison a été effectuée avec les deux travaux superposés, travail numérique de Barakos et Mitsoulis [7], et le travail expérimental de Krane et Jessee [8]. Ils ont utilisé une cavité carrée contenant de l'air et soumise à un gradient de température horizontale. Les résultats sont présentés sous forme de profils de température au milieu de la cavité (Fig.2).

Cette figure montre un bon accord entre les résultats, avec une faible différence entre nos résultats et les résultats expérimentaux de Krane et Jessee [8], avec une erreur relative maximale ne dépassant pas de 5 % (Tableau 1). Ceci nous donne un ordre de validité considérable de notre travail.

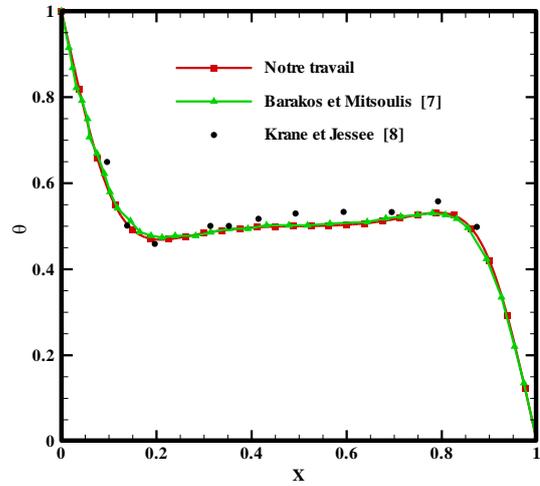


Fig.2 : Profils de la température adimensionnelle au milieu de la cavité.

Tab.1 : Erreur relative ε_e entre nos résultats et l'expérimental

Nos résultats θ	Expérimental θ	ε_e %
0.62	0.65	4.6
0.5	0.498	0.4
0.47	0.46	2.17
0.484	0.5	3.2
0.49	0.5	2
0.5	0.515	2.91
0.51	0.52	3.84

4.2 Influence du nombre de Rayleigh (Ra)

Dans cette partie, on va étudier l'effet du nombre de Rayleigh sur la convection naturelle, on prend une cavité carrée remplie par un métal liquide

(Gallium), et soumise à un gradient de température horizontal.

Pour cela, nous avons présenté le champ de température, les lignes de courant et les profils de la température, pour différents nombres de Rayleigh, $Ra = 10^3, 10^4, 10^5$ et 10^6 .

• Champ de température

Pour le nombre de Rayleigh $Ra = 10^3$ (Fig.3a), on remarque que les lignes isothermes presque des lignes parallèles aux parois verticales (chaude et froide). Ce qui signifie que, le mode de transfert de chaleur par conduction est dominé. A partir de $Ra = 10^4$, on remarque l'inclinaison des lignes isothermes, ce qui indique que le mode de transfert convectif commence à se développer (Fig.3b). Pour le nombre de Rayleigh $Ra = 10^5$ et 10^6 (Fig.3c-d), on constate que les lignes isothermes présentent une forte courbure au centre de la cavité et deviennent presque des lignes horizontales et moins importantes près des parois verticales, chaude et froide. Ces courbures traduisent le phénomène de convection naturelle au milieu de la cavité et le phénomène de conduction près des parois verticales et spécialement dans les couches limites thermiques qui se développent près de celle-ci (parois isothermes chaude et froide). L'augmentation du nombre de Rayleigh augmente la courbure des lignes isothermes, puisque la convection naturelle s'intensifie avec l'augmentation du nombre de Rayleigh.

• Champ des lignes de courant

Pour le nombre de Rayleigh $Ra = 10^3$ et 10^4 (Fig.4a-b), on remarque que l'écoulement est monocellulaire, un vortex appelé (vortex primaire) tournant au sens contraire d'une aiguille d'une montre, ce phénomène est créé du fait que le fluide à côté de la paroi chaude reçoit de la chaleur et devient plus léger et ascendant du fait de la poussée d'Archimède, à proximité de la paroi froide le fluide se refroidit, devient plus lourd et descendant le long de cette paroi. Pour le nombre de Rayleigh $Ra = 10^5$ (Fig.4c), on remarque une décomposition (Bifurcation) de la cellule centrale en deux cellules, dont la première circule dans le sens antihoraire et l'autre circule dans le sens inverse, et pour le nombre de Rayleigh $Ra = 10^6$ (Fig.4d), l'écoulement est multicellulaire, chaque cellule s'écoule à l'inverse de l'autre, cette naissance de ces cellules est causée par l'augmentation de la vitesse des particules fluides dans la cavité.

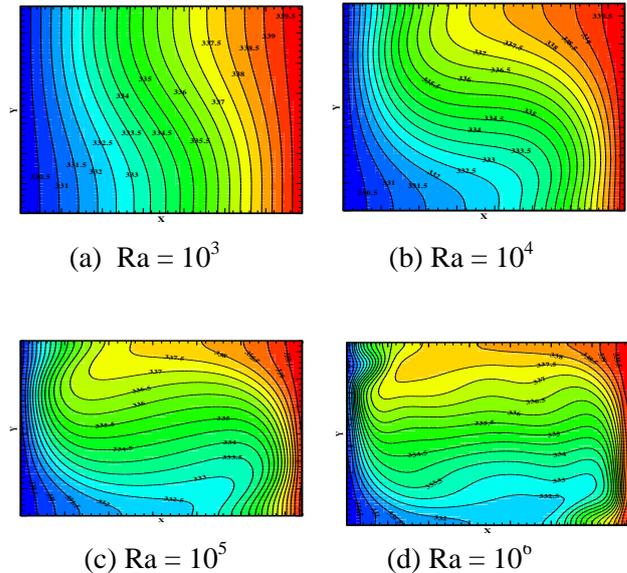


Fig.3 : Champ de température, pour différents nombres de Rayleigh.

• Profil de température et de composante de la vitesse vertical

Pour les profils de vitesse (Fig.5) la composante horizontale de vitesse est presque nulle au centre de la cavité, mais pour les deux couches adhérentes des parois verticales la composante de vitesse augmente et devient maximale dans les intervalles : $Y = [0, 0.2]$ et $Y = [0.8, 1]$, on remarque aussi que les vitesses sont en sens opposés, dû principalement à la variation de la densité du fluide, tel que le fluide froid oriente vers le bas sous l'effet de pesanteur, alors sa masse volumique devient considérable et le fluide chaud tend vers le haut puisque sa masse volumique est diminuée avec l'augmentation de la température. Ainsi l'intensité de vitesse augmente avec l'augmentation du nombre de Rayleigh.

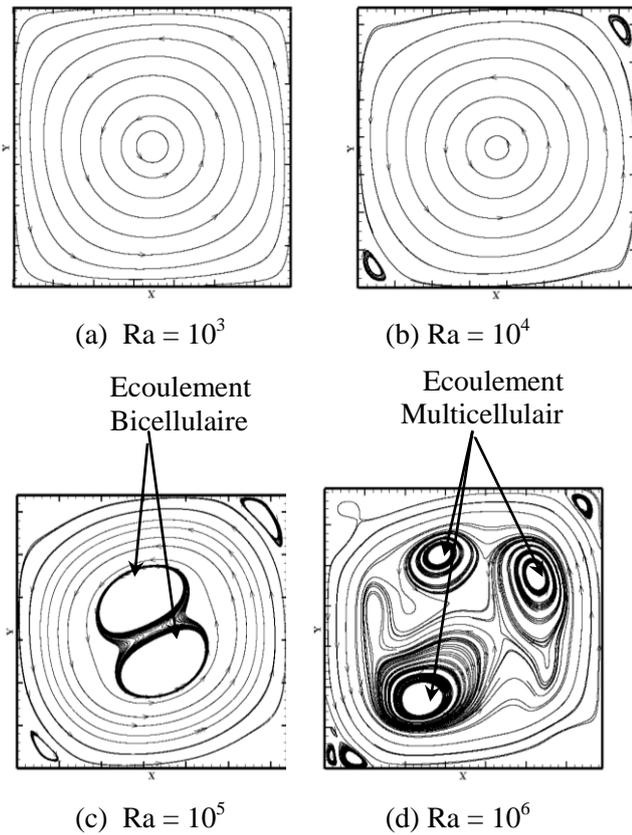


Fig.4 : Lignes de courant, pour différents nombres Ra

Pour les profils de la température (Fig.6) on remarque a $Ra = 10^3$, la variation de température avec l'abscisse X est linéaire indique que le transfert de chaleur se fait par conduction, après cette valeur du nombre de Rayleigh, et pour $Ra = 10^4, 10^5$ et 10^6 , on remarque la courbure de ces profils et la variation de température avec X est ne pas linéaire (courbée), ceci signifie que, le transfert de chaleur se fait par convection.

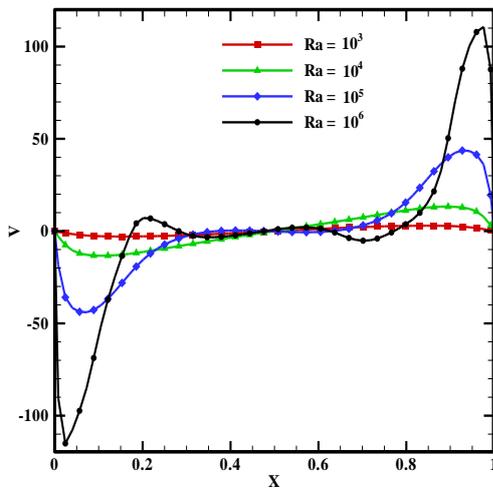


Fig.5 : Profils de composante de la vitesse verticale adimensionnelle V, au milieu de la cavité, pour différents nombres de Rayleigh ($Ra = 10^3, 10^4, 10^5$ et 10^6).

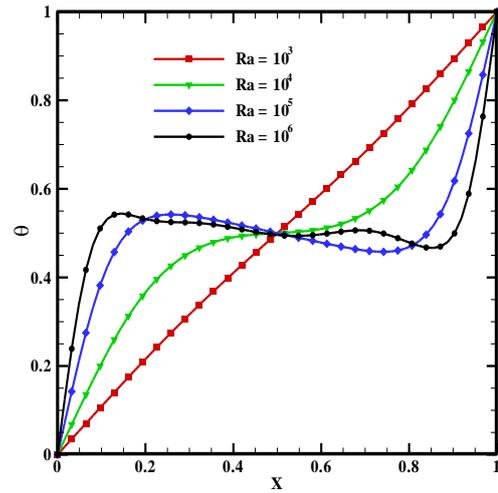


Fig.6 : Profils de la température adimensionnelle θ , à $Y = 0.5$, pour différents nombres de Rayleigh ($Ra = 10^3, 10^4, 10^5$ et 10^6).

• **Taux de transfert**

Le nombre de Nusselt moyen Nu_{moy} en fonction du nombre de Rayleigh Ra, est présenté sur la Fig.7

Cette figure montre que, jusqu'à une valeur de Rayleigh vaut 10^3 , le transfert de chaleur se fait par conduction. Cela peut être également constaté dans la Fig.3a, pour les isothermes qui sont des lignes presque verticales comme le cas du transfert de chaleur par conduction. La variation du nombre de Rayleigh est provoqué une forte influence sur la structure de l'écoulement, l'intensité de l'écoulement augmente avec le nombre de Rayleigh et cette croissance est d'autant plus élevée que le nombre de Rayleigh est élevé.

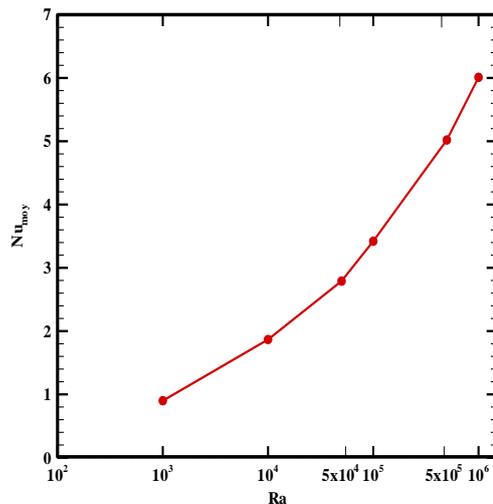


Fig.7 : Nombre de Nusselt moyenne en fonction du nombre de Rayleigh.

4.3 Influence de rapport d'aspect (A)

Dans cette partie, nous avons étudié l'effet du rapport d'aspect $A = L/H$ (L , H sont respectivement la longueur et la hauteur de la cavité), sur l'écoulement et le transfert de chaleur, le nombre de Rayleigh fixé à $Ra = 10^4$, la cavité est remplie par Gallium ($Pr = 0.025$) et soumise au même gradient de température. Quatre rapports d'aspect $A = 1, 2, 3$ et 4 ont été testés.

- **Lignes de courant**

On remarque que l'écoulement est monocellulaire, pour toutes les cavités (Fig.9). Ces cellules circulent suivant le sens inverse des aiguilles d'une montre sauf, pour la cavité carrée ou le rapport d'aspect $A = 1$, où il y a des petites cellules de recirculation à l'inverse de la cellule principale. Les lignes de courants près des parois horizontales sont serrées dans les cavités où le rapport d'aspect $A = 2, 3$ et 4 , indiquent que l'écoulement est accéléré dans cette zone. On peut remarquer aussi que, les lignes de courant s'inclinent et allongent selon l'allongement horizontal de la cavité. Ce qui signifie que les parois de la cavité a des effets sur la structure de circulation des particules fluide.

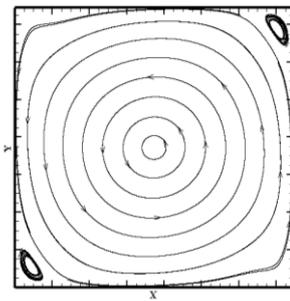
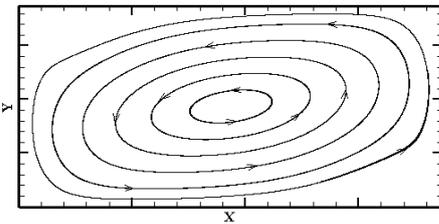
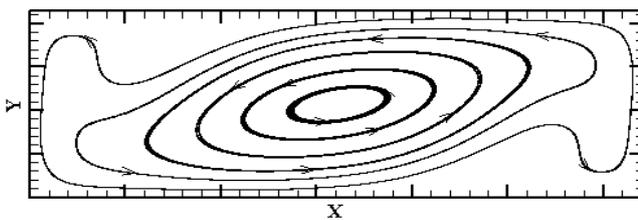
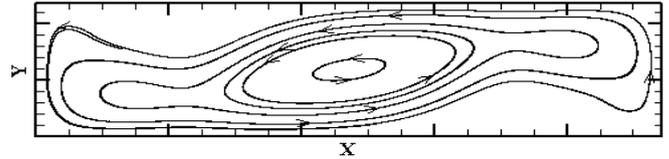
a) $A = 1$ b) $A = 2$ c) $A = 3$ d) $A = 4$

Fig.8 : Champ des lignes de courant dans des cavités de différents rapports d'aspect.

- **Taux de transfert**

Le nombre de Nusselt moyenne Nu_{moy} est tracé en fonction du rapport d'aspect (A) dans la Fig.10, dont le rapport d'aspect varie de $A = 1, 2, 3$ à 4 . On peut constater que le nombre de Nusselt moyen est une fonction décroissante du rapport d'aspect A de la cavité, tel que la configuration la plus efficace est où la surface d'échange verticale (parois active) est grande, puisque la valeur maximale du nombre de Nusselt moyen est maximale dans la configuration de grande surface d'échange.

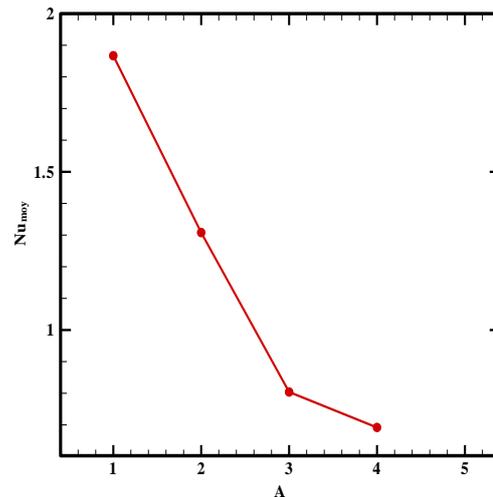


Fig.9 : Nombre du Nusselt moyen Nu_{moy} en fonction du rapport d'aspect (A)

4.4 Influence du nombre de Prandtl (Pr)

On va examiner l'influence du nombre de Prandtl sur la convection naturelle, pour cela, nous avons choisi quatre fluides de différents nombres de Prandtl. Les mêmes conditions du gradient de température et même dimension de cavité sont conservés pour les fluides: l'Air ($Pr = 0.708$), l'Eau ($Pr = 5.813$), le Gallium ($Pr = 0.025$) et le Mercure ($Pr = 0.024$).

Sur le Tableau 2, nous avons présenté le nombre de Rayleigh, le nombre de Nusselt moyen et le flux de chaleur pour différents fluides (Eau, Air, Gallium et Mercure).

Tab. 2 : Nombre de Prandtl, Rayleigh, Nu_{moy} et flux de chaleur, pour différents fluides.

Fluide	Pr	Ra	Nu_{moy}	Q(w)
Eau	5.813	3.67×10^5	6.98	44.05
Air	0.708	703.56	1.02	0.27
Gallium	0.025	2.52×10^3	1.29	411.19
Mercure	0.024	2.79×10^4	2.42	210.96

On remarque que le flux de chaleur dans les métaux liquides, est très élevé comparativement avec ceux des autres fluides. Par exemple, le flux de chaleur dans le mercure est égal à presque 4.76 fois celui dans l'eau, et 777.77 fois celui de l'air, d'où l'intérêt de l'utilisation des métaux liquides, pour l'évacuation de grandes quantités de chaleur dans des applications de refroidissement des réacteurs nucléaires.

Sur Fig.11, nous avons présenté les lignes de courants pour les quatre fluides précédents. On peut voir clairement l'influence de la variation du nombre de Prandtl sur la forme de la cellule convective, Ceci peut être expliqué par la quantité de chaleur transportée par chaque fluide, où le Gallium a la capacité de transporter une grande quantité de chaleur température. Ceci peut être expliqué par la quantité de chaleur transportée par chaque fluide, où le Gallium a la capacité de transporter une grande quantité de chaleur.

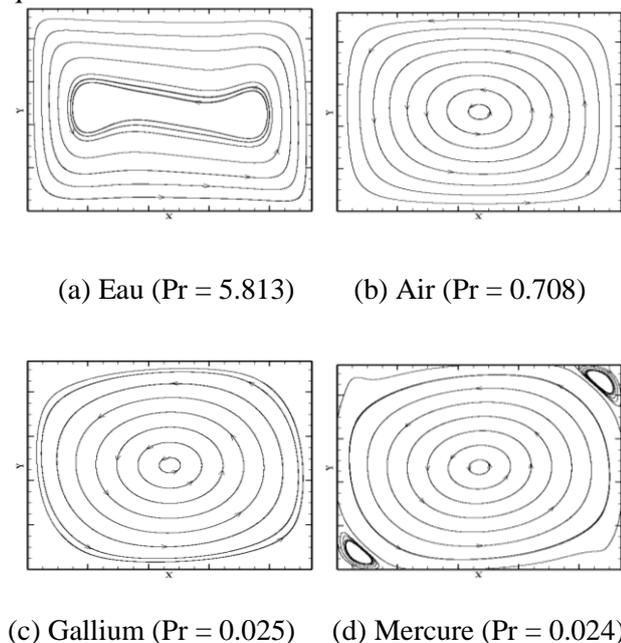


Fig.10 : Champ des lignes de courant dans une cavité carrée, remplie par des fluides différents : Eau, Air, Gallium et Mercure

5 Conclusion

Dans ce travail, nous avons présenté une étude numérique paramétrique de la convection naturelle dans une cavité carrée remplie du métal liquide.

- Les résultats de notre travail sont bien validés et comparés avec des travaux expérimentaux et numériques.
- Le taux de transfert de chaleur par convection naturelle (Nu) augmente avec l'augmentation Ra . Une grande dépendance entre le taux de transfert de chaleur et l'allongement horizontal de la cavité (A). Les métaux liquides sont des milieux excellents, pour le transfert thermique et sont capables d'absorber la chaleur mieux que l'Eau et l'Air (Pr).
- Les résultats présentés dans ce travail ont une application directe dans le domaine de production du semi-conducteur et les monocristaux afin d'améliorer leur conditions de procédure.

Références

- [1] M.J. Stewart and F. Weinberg, "Fluid Flow in Liquid Metals II-Experimental", *J. Crystal Growth*, 12, 228-238, (1972).
- [2] F. Wolff and al, "Natural convection of liquid metals cavities", *Experimental Thermal Fluid Science*, 1, 83-91 (1988).
- [3] R. Derbail and J. N. Koster, "Numerical Simulation of Natural Convection of Gallium in a Narrow Gap", *Int J. Heat Mass Transfer*, 40, 1169-1180, (1997).
- [4] S. Bouabdallah and R. Bessaih "Etude de l'instabilité hydrodynamique et thermique lors de la Solidification d'un fluide à faible nombre de Prandtl avec et sans champ magnétique". 13^{èmes} Journées Internationale de Thermique, organisées par l'Ecole des Mines d'Albi et Université de Cergy-Pontoise (France), les 28,29 et 30 août 2007. Tome I, pp 95-100.
- [5] S. Bouabdallah, B. Ghernaout and A. Benchatti, "Unsteady Natural Convection inside a Tilted square enclosure in presence of Magnetic field", *10th International Meeting on Energetical Physics*, November 3 and 4th 2010, Bechar, Algeria.
- [6] S. Patankar, "Numerical heat transfer and fluid flow", Mc-Graw-Hill, New york, 1980.
- [7] G. Barakos and E. Mitsoulis, "Natural Convection Flow in a Square cavity Revised: Laminar and Turbulent models with wall Functions", *Int. Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol.18, pp. 695-719, (1994).

- [8] R. J. Krane and J. Jessee, "Some Detailed Field Measurements for a Natural Convection Flow in a Vertical Square Enclosure", *Proc. Isr Asme-Jsme Thermal Engineering Joint Conf*, Vol. 1, pp. 323-329, (1983).

Nomenclature

A	Rapport d'aspect (de forme) [-]
H	Hauteur de la cavité [m]
P	Pression adimensionnelle [-]
T_c	Température de la paroi chaude [K]
T_0	Température de fluide à l'entrée [K]
U, V	Composantes adimensionnelles de la vitesse [-]
u, v	Composantes de la vitesse suivant x, y[m.s ⁻¹]
X, Y	Coordonnées cartésiennes adimensionnelles [-]
x, y	Coordonnées cartésiennes[m]

Symboles grecs

β	Coeff.d'expansion thermique [K ⁻¹]
ν	Viscosité cinématique [m ² .s ⁻¹]
θ	Température adimensionnelle [-]
ρ	Masse volumique [kg.m ⁻³]
ρ_0	Masse volumique à T_0 [kg.m ⁻³]

Nombres adimensionnels

Nu	Nombre de Nusselt [-]
\overline{Nu}	Nombre de Nusselt moyen [-]
Pr	Nombre de Prandtl [-]
Ra	Nombre de Rayleigh [-]