



Contribution à l'analyse de la stabilité des problèmes de bifurcation en utilisant la méthode de dérivation optimale

A. CHIKHAOUI, T. BENOUAZ

Laboratoire de Physique Electronique et Modélisation, Faculté des Sciences, Université Abou Bakr Belkaïd-Tlemcen, BP 119, Tlemcen R.P. 13000, Algérie

**Corresponding author: a_Chikhaoui@mail-univ-tlemcen.dz

Résumé - Le but de ce travail est l'application de la méthode de dérivation optimale à un modèle physique non linéaire (circuit électronique - amplificateur chaotique-) présentant le phénomène de bifurcation, en tenant compte de ses propriétés et, en particulier, celles liées à l'ordre pour l'analyse de la stabilité et la description qualitative du comportement engendré par le phénomène de bifurcation (grands effets engendrés par les variations du paramètre de bifurcation, qui réside essentiellement dans l'échange de stabilité entre deux points singuliers stable et instable ou le passage d'un point singulier stable à une orbite périodique), ceci permet de montrer les possibilités offerte par cette nouvelle approche de linéarisation pour l'étude et la détection des bifurcations élémentaires de base.

Mots clés - Amplificateur chaotique, Bifurcation, Dérivée optimale, Systèmes non linéaires.

I. INTRODUCTION

Le comportement des systèmes non linéaires dépend crucialement de leurs paramètres de contrôle. Avant de devenir chaotique. Ces systèmes présentent des changements brutaux de comportement. On dit alors qu'une bifurcation se produit à chaque changement. Bien que la séquence exacte des ces bifurcations soit propre à chaque système. Le voisinage de toute bifurcation peut être décrit par un petit nombre de cas typiques, car dans ces régimes un seul terme non-linéaire gouverne l'évolution.

La théorie de bifurcation permet d'étudier les changements de stabilité, lorsque les paramètres de bifurcations varient et franchissent des valeurs critiques explicitées à partir d'un diagramme de bifurcation caractérisant l'évolution du système en fonction des paramètres de bifurcation.

L'analyse de la stabilité des solutions d'équilibre par les méthodes de linéarisation, connaît actuellement un regain d'intérêt avec l'apparition de nouvelles méthodes de traitement des systèmes non-linéaire. Dans le but d'améliorer la linéarisation par rapport aux techniques existantes, une nouvelle méthode de linéarisation, appelée dérivée optimale, a été introduite par Arino –Benouaz [5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12].

L'étude des propriétés qualitatives des modèles non linéaires qui présentent un comportement complexe (phénomène de bifurcation), en particulier l'échange de stabilité entre solutions ainsi que la bifurcation de la solution pour certaines valeurs critiques appelées points de bifurcation.

Le but est de montrer les avantages de la technique proposée, pour la détection numérique de ce phénomène, en se basant sur ses propriétés importantes en particulier celles liées à l'ordre.

II. FORMALISME THEORIQUE DE LA METHODE DE LA DERIVATION OPTIMALE

Afin de mieux situer la problématique, nous allons rappeler la méthode de la dérivée Optimale qui est en fait une approximation globale [6, 7, 8, 9, 10, 11], qui se distingue de celle linéaire classique au voisinage d'un point stationnaire. L'approche suivie est de type optimisation.

Son utilisation est liée aux cas d'équations comportant des fonctions non régulières et, en général, non dérivables. Elle permet d'associer

une matrice optimale \tilde{A} définissant une application linéaire (1)

$$\frac{dx}{dt} = \tilde{A}x, x(0) = x_0 \quad (1)$$

à une équation différentielle ordinaire non linéaire décrite par l'équation suivante

$$\frac{dx}{dt} = F(x(t)), x(0) = x_0 \quad (2)$$

dans laquelle F vérifie les hypothèses suivantes

H1) $F(0) = 0$.

H2) Le spectre $\sigma(DF(x))$ est contenu dans l'ensemble $\{z : \text{Re } z < 0\}$ pour tout $x \neq 0$, dans un voisinage de 0, où $DF(x)$ existe.

H3) F est Continue, γ Lipchitzienne.

La méthode consiste à déterminer une application linéaire de la forme (1) qui approche l'équation non linéaire (2) dans les mêmes conditions initiales. Elle est basée sur la minimisation au sens des moindres carrées de l'écart entre l'équation non linéaire $F(x)$ et l'équation linéaire $Ax(t)$.

Pour ce faire, on considère la fonctionnelle suivante

$$G(A) = \int_0^{+\infty} \|F(x(t)) - Ax(t)\|^2 dt \quad (3)$$

La minimisation de celle-ci le long d'une solution donnée permet de construire une procédure itérative permettant de déterminer, une application linéaire définie comme étant la dérivée optimale de l'équation différentielle ordinaire non linéaire (2) qui démarre avec la linéarisation par dérivation au sens de Fréchet $DF(x)$ calculée en x_0 si celle-ci existe en x_0 .

En introduisant la fonction définie par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} [x(t)][x(t)]^T dt \quad (4)$$

La matrice optimale \tilde{A} s'écrit alors

$$\tilde{A} = \left[\int_0^{+\infty} [F(x(t))][x(t)]^T dt \right] [\Gamma(x(t))]^{-1} \quad (5)$$

où \tilde{A} est définie et unique à condition que $\Gamma(x)$ soit inversible.

1. Algorithme de la procédure

Considérons le système:

$$\frac{dx}{dt} = F(x(t)), x(0) = x_0 \quad (6)$$

Première étape

On calcule $A_0 = DF(x_0)$, $DF(x_0)$ étant la matrice Jacobienne de F en x_0 qui, en principe, est un point arbitraire pris au voisinage de 0.

Deuxième étape

Le calcul de A_1 , à partir de la solution de l'équation

$$\frac{dx}{dt} = A_0 y(t), y(0) = x_0 \text{ avec } y(t) = e^{A_0 t} x_0 \quad (7)$$

s'effectue en minimisant la fonctionnelle

$$G(A) = \int_0^{+\infty} \|F(y(t)) - A y(t)\|^2 dt.$$

où A_1 est déterminée d'une manière unique, par l'équation (5).

Troisième étape

Pour calculer A_j , à partir de A_{j-1} , le système suivant doit être résolu au préalable

$$\frac{dx}{dt} = [A_{j-1}] y(t), y(0) = x_0 \quad (8)$$

avec $y_j(t) = e^{A_{j-1} t} x_0$

où y_j représente la solution de l'équation (8).

La minimisation de la fonctionnelle

$$G_j(A) = \int_0^{+\infty} \|F(y_j(t)) - A y_j(t)\|^2 dt$$

donne

$$A_j = \left[\int_0^{+\infty} [F(y_j(t))] [y_j(t)]^T dt \right] [\Gamma(y_j)]^{-1} \quad (9)$$

En supposant que $\Gamma(x)$ est inversible, si la suite A_j converge, la limite \tilde{A} est appelée alors la dérivée optimale de F en x_0 .

2. Propriétés de la méthode

L'ordre de la méthode est obtenu en comparant la solution $x(t)$ de l'équation non linéaire (1) et la solution $\tilde{y}(t)$ de la dérivée optimale, en partant de la même condition initiale.

Proposition

[7, 8, 9, 11], sous les hypothèses H1), H2), H3) sur la fonction F et pour tout temps $T > 0$, il existe $M \geq 0$ tel que:

$$\|x(t) - \tilde{y}(t)\| \leq M \left(\|x_0\|^2 \right) \quad (10)$$

pour $0 \leq t \leq T$, et tout x_0 dans un voisinage de 0, indépendant de T .

Cette proposition, [7, 8, 9, 11], montre que la méthode de la dérivée optimale est au moins d'ordre (2) en fonction de la donnée initiale et dépend, en général de la non-linéarité du problème initial considéré.

III. APPLICATION

Influence du choix de la condition initiale pour l'application de la méthode.

Dans cette section nous allons appliquer la méthode dérivation optimale à un exemple de circuit électronique assez particulier, l'amplificateur chaotique, modélisé par un système d'équation différentielle ordinaire E.D.O non linéaires dépendant d'un paramètre. Dont la variation de ce dernier provoque un changement du comportement qualitatif de la solution, et apparition de nouveaux points d'équilibre avec un échange (perte) de stabilité (phénomène de bifurcation). Le but est de montrer les avantages de la technique proposée, pour la description du comportement qualitative ce phénomène, en se basant sur ses propriétés importantes en particulier celles liées à l'ordre (choix de la condition initiale).

Pour ce faire, nous considérons le circuit de l'amplificateur chaotique suivant :

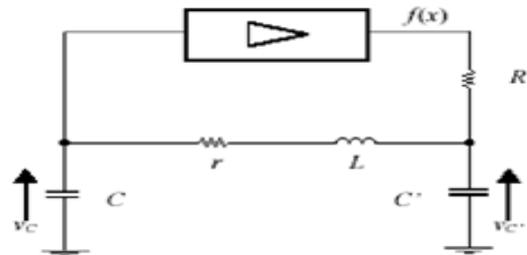


Fig.1. Circuit électronique non linéaire de l'Amplificateur chaotique

L'amplificateur chaotique est un circuit autonome régi par le système d'équations différentielles ordinaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - \delta \cdot y + z \\ \dot{z} = \gamma[\alpha \cdot f(x) - z] - \sigma \cdot y \end{cases} \quad \text{avec : } \begin{cases} x = V_c \\ y = \sqrt{L/C} \cdot i \\ z = V_{c'} \end{cases} \quad (11)$$

et $\gamma = \frac{\sqrt{LC}}{RC'}$, $\delta = r\sqrt{\frac{C}{L}}$, $\sigma = \frac{C}{C'}$

La non linéarité exprimée par f(x) s'écrit :

$$\begin{cases} 0.528 \text{ si } x \leq -1.2 \\ x(1-x^2) \text{ si } |x| < 1.2 \\ -0.528 \text{ si } x \geq 1.2 \end{cases} \quad (12)$$

1. Détermination des points d'équilibres.

Les points d'équilibre sont donc donnés par l'intersection de la caractéristique non linéaire

f(x) et la droite de charge de pente $\frac{1}{\alpha}$ (où α représente le gain de l'amplificateur).

La détermination des points d'équilibre obtenue par la résolution du système $F(X)=0$ ceci donne :

$$\begin{cases} \dot{x} = y = 0 \\ \dot{y} = -x + z - \delta \cdot y = 0 \\ \dot{z} = \gamma[\alpha \cdot f(x) - x] - \sigma \cdot y = 0 \end{cases} \quad (13)$$

ceci donne :

$$\left\{ y = 0, x = z, f(x) = \frac{1}{\alpha}x, \right.$$

$$\text{c'est à dire } x(1-x^2) = \frac{1}{\alpha}x \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm \sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \end{cases}$$

Alors d'après ces résultats, on constate bien que, pour $\alpha \leq 1$, le système possède un seul point d'équilibre à l'origine (0,0,0). En revanche si α augmente c'est à dire $\alpha > 1$ deux autres points d'équilibres apparaissent (P₊, P₋) ayant les coordonnées suivantes :

$$\left(\pm \sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha}}, 0, \pm \sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \right) \quad (14)$$

L'étude de la stabilité de ces points s'effectuera suivant la valeur critique α (paramètre de bifurcation), on linéarise le système par la méthode de dérivation optimale autour de chaque points, comme suit

- linéarisation autour de l'origine pour $\alpha \leq 1$
- linéarisation autour de (P₊, P₋) pour $\alpha > 1$

puis, nous déterminons les valeurs propres du système linéarisé,

Pour l'application numérique, on utilise les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} R &= 3380 \Omega, r = 347, L = 145 \text{ mH}, \\ C &= 345 \text{ nf}, C' = 225 \text{ nf}, \\ (\gamma &= 0.2932, \delta = 0.5337, \sigma = 1.5244) \end{aligned}$$

L'application de la dérivée optimale autour de deux cas critiques, à savoir $\alpha = 1$ et $\alpha = 5$, va nous permettre de mieux apprécier la fiabilité et l'efficacité de la méthode pour la détection et le suivi du phénomène de bifurcation.

• **1^{ier} Cas :**

Pour $\alpha < 1$, le système possède un seul point d'équilibre à l'origine asymptotiquement stable.

En prenant $\alpha = 0.75$, avec la condition initiale $(x_0, y_0, z_0) = (0.1, 0.2, 0.4)$, et en appliquant la méthode de dérivation optimale, on retrouve les résultats suivants

$$\begin{aligned} \alpha &= 0.75 \\ \tilde{A} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -0.5337 & 1 \\ 0.1992 & -1.5264 & -0.2806 \end{bmatrix} \quad (15) \\ \lambda &= \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.3918 + 1.5807i \\ -0.0307 \\ -0.3918 - 1.5807i \end{bmatrix} \end{aligned}$$

• **2^{ième} Cas :**

$\alpha = 1$ est un point où on passe du point d'équilibre à l'origine qui devient instable lorsque α augmente vers deux nouveaux points d'équilibres (P₊, P₋), (Bifurcation Pitchfork); on choisit $\alpha = 1.1$ et on applique la méthode de dérivation optimale $(x_0, y_0, z_0) = (0.1, 0.3, 0.4)$

La procédure de la dérivation optimale donne :

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0.5337 & 1 \\ 2.9495 & 0 & -0.3154 \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{cases} \lambda_1 = -0.0077 \\ \lambda_2 = -0.4208 + i1.5834 \\ \lambda_3 = -0.4208 - i1.5834 \end{cases} \quad (17)$$

Pour $\alpha = 1.1$, avec des conditions initiales très près de l'origine $(x_0, y_0, z_0) = (0.01, 0.03, 0.04)$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0.5337 & 1 \\ 0.24367 & -1.5239 & 0.29766 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Avec les valeurs propres sont données par

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{cases} \lambda_1 = -0.02024 \\ \lambda_2 = -0.4055 + i1.5819 \\ \lambda_3 = -0.4055 - i1.5819 \end{cases} \quad (19)$$

Les courbes des figures (2) et (3) représentent les variations de la composante $x(t)$ en fonction du temps de la solution du système linéaire optimal obtenue comparée à celle du système non linéaire **

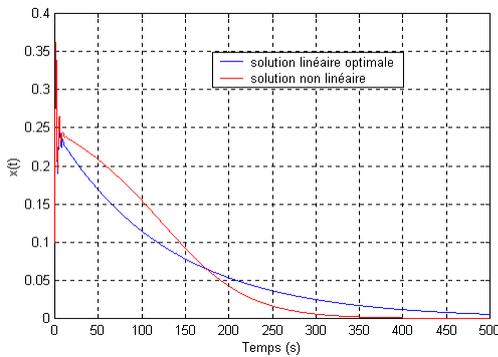


Fig.2. Représente la variation de la solution $x(t)$ en fonction du temps pour les conditions initiales $(x_0, y_0, z_0) = (0.1, 0.3, 0.4)$

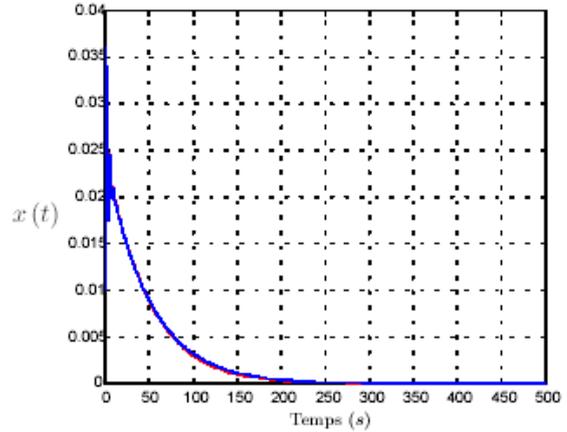


Fig.3. Représente la variation de la solution $x(t)$ en fonction du temps pour les conditions initiales $(x_0, y_0, z_0) = (0.01, 0.03, 0.04)$

La figure 3 montre que les deux courbes sont confondues, et confirme la proposition (1), c'est à dire que la qualité de l'approximation dépend du choix de la condition initiale. Ce qui n'est pas le cas de la figure 2 où on observe un écart entre les deux courbes. Afin de justifier et confronter les résultats obtenus dans le cas des conditions initiales très près de l'origine par rapport à celles prises près de l'origine, nous avons comparé l'erreur relative obtenue dans les deux cas.

La figure suivante représente l'évolution de l'erreur relative en fonction temps pour les deux conditions initiales

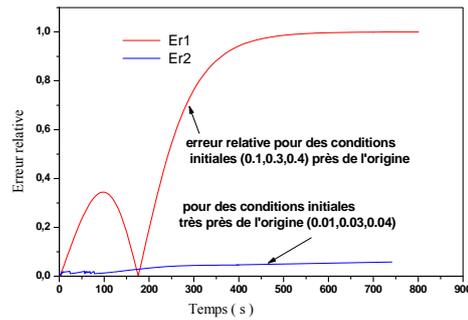


Fig.4. Evolution de l'erreur relative avec le temps

• 3^{ème} Cas :

$\alpha_H = 4.7804$: c'est un point critique, à partir duquel le système donne des solutions périodiques avec un changement de la stabilité des points d'équilibres. Le système subit une autre bifurcation appelée (*bifurcation Poincaré Androw-Hopf*), cette bifurcation est commune dans les problèmes physiques qui présentent une symétrie.

On va confirmer ces résultats par l'application de la méthode de dérivation optimale pour Pour $\alpha_H = 4.7804$, avec des conditions initiales près de l'origine $(x_0, y_0, z_0) = (0.1, 0.2, 0.3)$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0.5337 & 1 \\ -1.163 & -1.7685 & -0.1665 \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{cases} \lambda_1 = 0.0021 + i1.63607 \\ \lambda_2 = 0.0021 - i1.63607 \\ \lambda_3 = -0.3716 \end{cases} \quad (21)$$

Pour $(x_0, y_0, z_0) = (0.01, 0.02, 0.03)$. La matrice optimale donnée pour le système non linéaire

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0.5337 & 1 \\ -1.8360 & -1.5523 & 0.2410 \end{bmatrix} \quad (22)$$

avec les valeurs propres suivantes

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{cases} \lambda_1 = -5.18 \cdot 10^{-6} + i1.6367 \\ \lambda_2 = -5.18 \cdot 10^{-6} - i1.6367 \\ \lambda_3 = -8.2166 \cdot 10^{-1} \end{cases} \quad (23)$$

Les courbes des figures (5) et (6) représentent les variations de la composante $x(t)$ en fonction du temps de la solution du système linéaire optimal obtenu comparée à celle du système non linéaire (1)

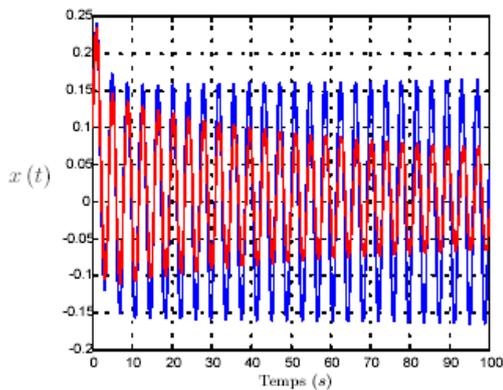


Fig.5. Représente la variation de la solution $x(t)$ en fonction du temps pour les conditions initiales $(x_0, y_0, z_0) = (0.1, 0.2, 0.3)$

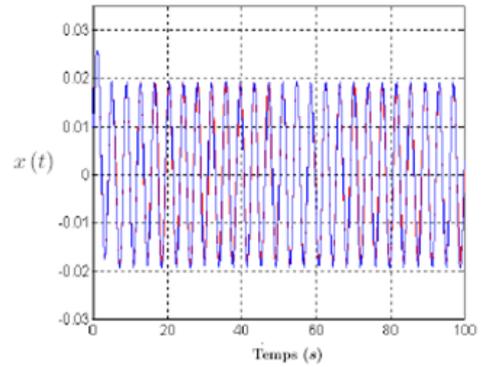


Fig.6. Représente la variation de la solution $x(t)$ en fonction du temps pour les conditions initiales $(x_0, y_0, z_0) = (0.01, 0.02, 0.03)$

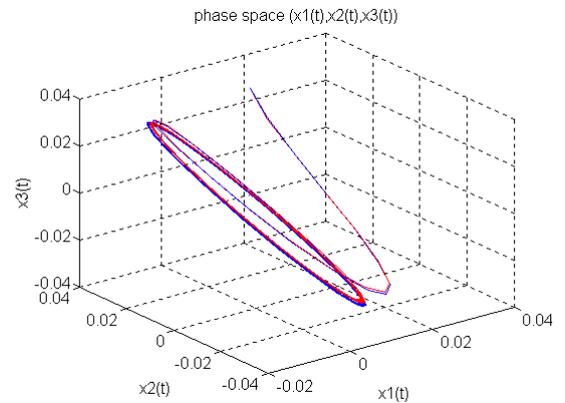


Fig.7. représente la solution $(x(t), y(t), z(t))$ dans l'espace de phase pour les conditions initiales $(x_0, y_0, z_0) = (0.01, 0.02, 0.03)$

• 4^{ème} Cas :

a) *Que ce passe il lorsque α dépasse α_H ?*

$\alpha_H = 5 > 4.7804$: il s'agit d'un point critique à partir duquel le système donne des solutions périodiques, avec un changement de la stabilité des points d'équilibre ainsi que la stabilité des solutions périodiques. Les deux nouveaux points d'équilibre (P+ et P-) deviennent instables tandis que l'origine devient stable. On va confirmer ces résultats par l'application de la méthode de dérivation optimale pour $x(0) = (0.01, 0.02, 0.03)$ donne :

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0.5337 & 1 \\ -1.1630 & -1.7685 & -0.1665 \end{bmatrix} \quad (24)$$

La dérivée optimale détecte l'échange de stabilité qui se traduit par des valeurs propres, complexes à partie réelle positive pour les points (P+, P-), pour le système linéaire optimal, qui s'écrivent sous la forme suivante :

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{cases} \lambda_1 = 0.01937 + i1.6463 \\ \lambda_2 = 0.01937 - i1.6463 \\ \lambda_3 = -0.81172 \end{cases} \quad (25)$$

Ceci montre que les deux points critiques P+ et deviennent instables alors que l'origine est stable ($\lambda_3 < 0$). L'analyse des deux figures (8), (courbe en rouge solution non linéaire, courbe en bleu solution linéaire optimale), confirment les résultats obtenus en se plaçant très près de l'origine).

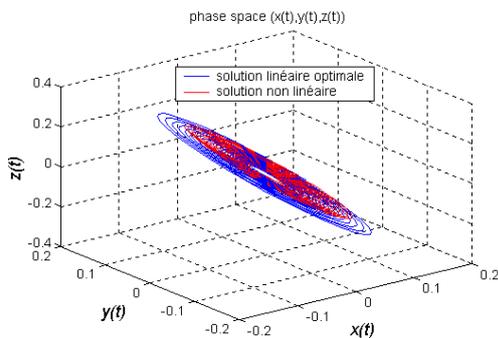


Fig.8. Solution $(x(t), y(t), z(t))$ dans l'espace de phase pour les conditions initiales $(x_0, y_0, z_0) = (0.01, 0.02, 0.03)$

IV. DISCUSSION DES RESULTATS

La comparaison entre les résultats obtenus, pour des conditions initiales prises près de l'origine, montre une nette amélioration concernant la description du comportement réel, en obéissant à la même dynamique du système non linéaire initial. Ceci est illustré par les fig.3 et fig.6 qui représentent la solution optimale du système linéaire optimal comparée à celle non linéaire initial (numérique) du système (11).

En plus, en se basant sur les résultats obtenus par l'application de la méthode aux points critiques, par exemple, (pour $\alpha_H = 4.7804$ et $(x_0, y_0, z_0) = (0.01, 0.02, 0.03)$), on constate que la dérivée optimale est capable de détecter le changement de stabilité à partir du changement de signe des parties réelles des valeurs propres données par les expressions (19) et (25). Le changement de comportement de la solution pour $\alpha = 1.1$, en une solution périodique pour $\alpha_H = 4.7804$ (apparition de la bifurcation Hopf) est mis en évidence par les figures (5), (6), (7), (8).

Enfin, les résultats élaborés en choisissant des conditions initiales très près de l'origine, montrent clairement que la méthode de dérivation optimale suit le comportement du système non linéaire. Elle détecte les grands effets engendrés par les variations du paramètre de bifurcation, qui réside essentiellement dans l'échange de stabilité entre deux points singuliers stable et instable ou le passage d'un point singulier stable à une orbite périodique.

V. CONCLUSION

A la lumière des résultats obtenus, il ressort qu'en se basant sur une propriété importante de la méthode, déterminée à partir de l'estimation de l'erreur commise, la méthode de la dérivée optimale permet de détecter les différents échanges de stabilité qui accompagnent le phénomène complexe de bifurcation. Cette méthode décrit bien le changement de comportement des solutions et détecte le changement de stabilité, en obéissant d'une façon satisfaisante à la dynamique du système non-linéaire initial.

Par ailleurs, il apparaît clairement que le choix des conditions initiales pour l'application de la procédure de dérivation optimale est déterminant.

Ainsi, cette méthode représente une bonne alternative pour l'étude de ce type de problème (de bifurcation) surtout dans le cas où la fonction définissant l'équation non linéaire n'est pas n'est pas assez régulière et celui où $DF(0)$ est nulle. Ce qui a permis de mettre en valeur certains aspects théoriques de cette procédure

Enfin, pour une bonne utilisation de cette méthode, particulièrement pour l'étude des points critiques, le choix de conditions initiales appropriées s'impose.

VI. REFERENCES

- [1] J. Cuningham, Introduction to Non-Linear Analysis, *Mc-Graw.Hill, New-York*, (1958).
- [2] A.Fossard, Commande des Systèmes Multidimensionnels, *Dunod*, (1972).
- [3] A. Volovoich, Linear Multivariable Systems, *New-York Springer*, (1974).
- [4] A. Z. Bensenane, Linéarisation Optimale des Equations d'Etat Non Linéaires, Thèse de Magister, Tlemcen, (1986).
- [5] T. Benouaz, Contribution à l'Approximation et la Synthèse de la Stabilité d'une Equation Différentielle Ordinaire Non Linéaire, Thèse de Doctorat d'Etat, Tlemcen, (1996).

- [6] T. Benouaz, O. Arino, Existence, Unicité et Convergence de l'Approximation au Sens des Moindres Carrés d'une Equation Différentielle Ordinaire Non Linéaire, *94/14 Université de Pau, CNRS URA 1204*, (1994).
- [7] T. Benouaz, Optimal Derivative of a Non-Linear Ordinary Differential Equation, *Equadiff 99, International Conference on Differential equations*, Berlin (Germany) 1-7 August, Vol.2, pp.1404-1407, World scientific Publishing Co. Pte. Ltd, (2000).
- [8] T. Benouaz, O. Arino, Optimal Approximation of the Initial Value Problem, *Computers Math. Applic.*, Vol.36, N°1, pp.21-32, (1998).
- [9] T. Benouaz, O. Arino, Determination of the Stability of a Nonlinear Ordinary Differential Equation by Least Square Approximation. Computational Procedure, *Appl. Math. and Comp sci.*, N°1, Vol.5, pp.33-48, (1995).
- [10] T. Benouaz, Lyapunov Function Generated by Least Square Approximation, *Deuxième conférence Maghrébine sur l'Automatique*, Tlemcen (Algeria) 3-5 December, Vol.1 pp.73-75, (1996).
- [11] T. Benouaz, O. Arino, Least Square Approximation of a Non-Linear Ordinary Differential Equation, *Computers Math. Applic.*, Vol.31, N°8, pp.69-84, (1996).
- [12] A. Chikhaoui, Contribution à l'Etude de la stabilité des Systèmes Non Linéaires, Thèse de Magister, Tlemcen (Algeria), (2000).
- [13] T. Benouaz, M.F. Bendahmane, Least Square Approximation of a Non-Linear O.D.E. with Excitation, *Computers and Mathematics with Applications*, CAMWA, vol.47, Issues 2-3, pp. 473-489 2004.
- [14] T. Benouaz, M. Bonher, On the relationship between the classical linearization and optimal derivative, advances in Dynamical Systems and Applications, *Advances in Dynamical Systems and Applications (ADSA)*, Vol. 2, N° 1, pp. 41-57 (2007).
- [15] T. Benouaz, M. Bohner, A.Chikhaoui, On TheRelationship between the optimal Derivative and asymptotique Stability, *African Diaspora Journal of Mathematics*, Volume8, Number 2, pp.148-162 (2009).