

## Modèle analytique de la rupture longitudinale d'un composite unidirectionnel

B.Bouhamida<sup>1</sup>, Z. Sereir<sup>1</sup>, A. Chateaneuf<sup>2</sup>, L.Errouane<sup>1</sup>, N. Berrekhoukh<sup>1</sup>

1. Laboratoire Structures de Composites et Matériaux Innovants, Faculté de Génie Mécanique, Université des Sciences et de la Technologie Mohamed Boudiaf, BP 1505 El M'Naouer, Oran, Algérie.
2. Clermont Université, Blaise Pascal, EA 3867, LaMI, BP 10448, 63000 Clermont-Ferrand, France, E-mail: alaa.chateaneuf@cust.univ-bpclermont.fr

**ABSTRACT** — Par le présent travail, un modèle Shearlag non-linéaire a été développé pour prédire la concentration de contrainte d'une cellule hexagonale régulière contenant une fibre cassée. Ce travail se concrétise par le développement d'une formulation théorique de la redistribution micromécanique des contraintes engendrées par la rupture transversale le long des fibres dans un composite unidirectionnel en fonction du nombre et de la disposition des fibres cassées et intactes. Les développements mathématiques utilisés sont présentés pour justifier la forme de la répartition des contraintes autour de la fibre cassée et des fibres voisines adjacentes les plus proches. Les conditions aux limites et de continuité sont prises en considération par ce modèle pour quantifier le taux de transfert des contraintes par l'intermédiaire de la matrice entre la fibre cassée et les fibres voisines intactes.

**Keywords:** Composite, fibre cassée, concentration de contrainte, arrangement hexagonal

### 1. INTRODUCTION

De nos jours, l'approche shear-lag (retardement du cisaillement) est l'une des méthodes les plus employées pour la modélisation de l'interaction de fibre/matrice. Lorsqu'une fibre chargée dans la direction longitudinale se casse dans un matériau composite unidirectionnel, il y aura une répartition de cette charge aux fibres voisines intactes. Cette nouvelle répartition est appelée redistribution locale des efforts autour de la fibre cassée. En se servant du modèle de shearlag, plus de recherches ont été menées dans le but de prédire la concentration de contrainte au voisinage des fibres cassées ainsi que la résistance longitudinale d'un composite unidirectionnel présentant une rupture des fibres. En se basant sur les hypothèses du retardement de cisaillement « shear-lag »,

plusieurs chercheurs ont étudié la rupture due au cisaillement à l'interface fibre/matrice, en définissant un paramètre de cisaillement utilisé pour décrire le comportement élastique complet fibre/matrice avec un décollement parfaitement plastique de la matrice. Les modèles Rosen [1] et Zweben [2] qui se considèrent parmi les plus anciens modèles pour la prédiction de la résistance des composites à matrice polymère. Phoenix et al. [3] ont pu déterminer la contrainte et la durée de vie statistique de rupture de la fibre unidirectionnelle en carbone. Par la suite, le modèle de Landis et al. [4] a été amélioré par Landis et Mc Meeking [5] en tenant compte des effets du glissement axial à l'interface fibre-matrice et le positionnement des fibres intactes sur la rigidité en évaluant la concentration de contraintes autour de la fibre cassée. Goda [6] a proposé un modèle probabiliste de résistance basé sur le processus des chaînes de Markov pour des composites unidirectionnels à fibres en arrangement hexagonal. Le modèle suppose qu'un groupe de fibres avec un

---

**Corresponding author:** Bachir BOUHAMIDA

Adress : Université des Sciences et de la Technologie Mohamed Boudiaf, BP 1505 El M'Naouer, Oran, Algérie.

E-mail: [bouhamida68b@yahoo.fr](mailto:bouhamida68b@yahoo.fr)

arrangement hexagonal. Au point d'appariation de la rupture de la première fibre, l'endommagement de ce groupe évolue avec l'augmentation de la charge. Bouhamida et al. [7] ont déterminé l'effet de l'emplacement aléatoire des fibres sur la concentration de contraintes autour d'une fibre cassée. Tout récemment Bouhamida et al. [8] ont proposé un modèle en différence finie pour le cas d'espacement aléatoire entre fibre.

Par le présent travail, on a tenté de prédire le facteur de concentration contrainte dans une cellule en composite unidirectionnel, présentant une fibre cassée. Comparativement à Bandorawalla [9], le modèle Shear Lag a été développé afin de quantifier l'effet de la fibre cassée sur l'évolution du facteur de concentration de contrainte sur les fibres voisines intactes. Afin de vérifier la précision de nos résultats, une comparaison a été faite avec les résultats des différentes approches données par la littérature.

## II. Modèle shear-lag appliqué à un composite unidirectionnel

Afin d'étudier l'état de contraintes au voisinage d'une fibre cassée, le modèle NNLS (*Nearest Neighbor Load Sharing*) a été utilisé pour la détermination du facteur de concentration de contraintes d'un composite unidirectionnel sous chargement de traction uniforme. Selon la figure 1.

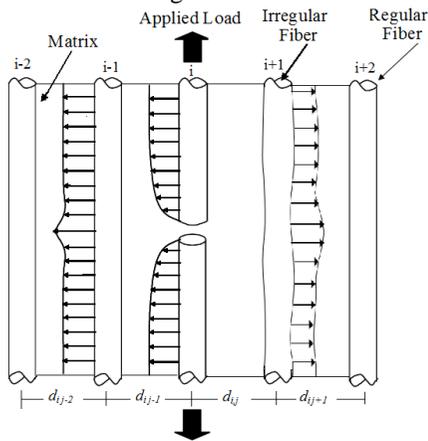


Figure 1: Répartition des contraintes au niveau de la fibre cassée et les fibres voisines.

Les fibres sont disposées selon un arrangement hexagonal. L'espacement entre les fibres est régulier. Une fibre cassée est donc entourée de six fibres intactes (figure.2).

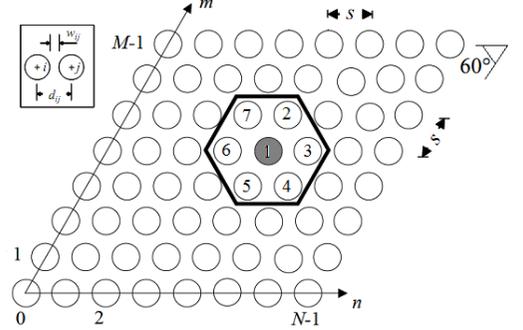


Figure 2. L'arrangement hexagonal avec numérotation de fibres

Selon [9], la distance entre les centres des fibres est donnée par:

$$s = \sqrt{\frac{\pi}{V_f \sin 60^\circ} r_f} \quad (1)$$

Pour être en même accord avec la description donnée en référence [9], la fibre cassée et ses six voisins sont numérotées de 1-7 comme représenté sur la figure 2. Il est à noter que l'arrangement hexagonal des fibres est nécessaire pour calculer l'ensemble des forces d'influence de la fibre cassée  $q_1$  et celles des fibres voisines intactes  $q_2(x)$ ,  $q_3(x)$ ,  $q_4(x)$ ,  $q_5(x)$ ,  $q_6(x)$  et  $q_7(x)$  exprimées par la fonction:

$$\{Q\} = \begin{bmatrix} q_1(x) \\ q_2(x) \\ \vdots \\ q_7(x) \end{bmatrix} \quad (2)$$

De même pour le vecteur déplacement des sept fibres constituant la cellule hexagonale  $v_1(x), v_2(x), v_3(x), \dots, v_7(x)$ .

$$\{V\} = \begin{bmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \\ \vdots \\ v_7(x) \end{bmatrix} \quad (3)$$

En se servant de l'hypothèse Shearlag, on peut écrire:

$$\{Q\} = E_f \frac{d}{dx} \{V\} \quad (4)$$

Comme, il vient d'être présenté à la figure 2, la distance entre les centres des fibres  $i$  et  $j$  est

dénotée par  $d_{ij}$ , avec  $w_{ij}=d_{ij}-2.0 r_f$ . L'hypothèse Shear-lag est appliquée pour la cellule à sept fibres et le système régissant des équations pour des déplacements de fibre est obtenu :

$$\frac{d^2}{dx^2} \{V\} + [A]\{V\} = 0 \quad (5)$$

$$A = C \begin{bmatrix} A_{11} & \frac{1}{w_{12}} & \frac{1}{w_{13}} & \frac{1}{w_{14}} & \frac{1}{w_{15}} & \frac{1}{w_{16}} & \frac{1}{w_{17}} \\ \frac{1}{w_{12}} & A_{22} & \frac{1}{w_{23}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{w_{27}} \\ \frac{1}{w_{13}} & \frac{1}{w_{23}} & A_{33} & \frac{1}{w_{43}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{w_{14}} & 0 & \frac{1}{w_{43}} & A_{44} & \frac{1}{w_{45}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{w_{15}} & 0 & 0 & \frac{1}{w_{45}} & A_{55} & \frac{1}{w_{56}} & 0 \\ \frac{1}{w_{16}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{w_{56}} & A_{66} & \frac{1}{w_{67}} \\ \frac{1}{w_{17}} & \frac{1}{w_{27}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{w_{67}} & A_{77} \end{bmatrix}$$

[A] est une matrice carrée de 7x7. Les éléments de cette matrice sont exprimés par :

$$A_{11} = -\left(\frac{1}{w_{12}} + \frac{1}{w_{13}} + \frac{1}{w_{14}} + \frac{1}{w_{15}} + \frac{1}{w_{16}} + \frac{1}{w_{17}}\right);$$

$$A_{22} = -\left(\frac{1}{w_{12}} + \frac{1}{w_{23}} + \frac{1}{w_{27}}\right);$$

$$A_{33} = -\left(\frac{1}{w_{13}} + \frac{1}{w_{23}} + \frac{1}{w_{34}}\right);$$

$$A_{44} = -\left(\frac{1}{w_{14}} + \frac{1}{w_{34}} + \frac{1}{w_{45}}\right);$$

$$A_{55} = -\left(\frac{1}{w_{15}} + \frac{1}{w_{45}} + \frac{1}{w_{56}}\right);$$

$$A_{66} = -\left(\frac{1}{w_{16}} + \frac{1}{w_{56}} + \frac{1}{w_{67}}\right);$$

$$A_{77} = -\left(\frac{1}{w_{17}} + \frac{1}{w_{27}} + \frac{1}{w_{67}}\right); C = \frac{hG_m}{A_f E_f}$$

$h$  est l'épaisseur de la matrice exprimée par  $h = (\pi r_f) / 3$ .

Selon Hedgepeth et Van Dyke [11], la contrainte locale de chaque fibre est donnée par:

$$\sigma_i = \sigma_f + \sum_{k=1}^L q_i (x - x_k) u_k \quad (6)$$

les contraintes pour chaque fibre est nécessaire de calculer le vecteur déplacements, ( $u_j, j=1,L$ ), en résolvant le système des équations pour  $\sigma_i = 0$ , le facteur de concentration de contraintes est donné par

$$C_i = 1 + \sum_{k=1}^L \frac{dv_i(x)}{\sigma_f / E_f} (x - x_k) u_k \quad (7)$$

$\sigma_f$  est la contrainte uni-axiale appliquée à une distance L du groupe de fibres.

### III. Validation et application

Afin de vérifier la qualité des résultats obtenus par le présent modèle, une validation a été faite avec des modèles analytiques issus de la bibliographie. La validation a été faite avec la géométrie de la répartition locale de la charge pour une et deux fibres cassées dans une cellule hexagonale. Cette validation a été faite pour le cas d'une fibre cassée avec le modèle géométrique [6] et shearlag [10].

Pour notre application, un composite en graphite/PPS est utilisé. La distance de perturbation à partir de la fibre cassée est  $x_p = 60 * r_f$ . Le tableau suivant regroupe les caractéristiques mécaniques et géométriques du composite unidirectionnel Graphite/PPS.

Module de Young de la fibre $E_f$ (GPa)	234,4
Module de Young de matrice $E_m$ (GPa)	1,1
Résistance de référence fibre $\sigma_0$ (GPa)	3,17
Contrainte de cisaillement $\tau_0$ (MPa)	25,8
Coefficient de Poisson de la matrice $\nu$	0,43
Fraction Volumique des fibres $V_f$	0,53
Paramètre de cisaillement $\eta$	1,0
Rayon de la fibre $r_f$ ( $\mu m$ )	3,5
Distance de perturbation $x_p$	$60 * r_f$

### IV. Cellule à une seule fibre cassée

L'ensemble des fibres de chaque cellule est maintenu avec une matrice qui assure le transfert des charges et la distribution des contraintes autour des fibres intactes en cas de cassure de la fibre centrale. Pour pouvoir représenter le facteur de concentration de contrainte le long de la fibre cassée et les fibres adjacentes intactes, une subdivision devra être effectuée le long de l'axe longitudinal ( $60 * r_f$ ).

En premier lieu, la validation a été faite avec les résultats de [10]. Le facteur de concentration de

contrainte d'une fibre cassée entourée des six fibres intactes est donnée par  $1 + \frac{1}{6} = \frac{7}{6} = (1.167)$ . Donc, la charge qui a été initialement supportée par la fibre centrale, elle est répartie équitablement entre les six fibres adjacentes, puisque cette dernière a perdue complètement sa rigidité (Figure 3). Par contre, dans notre modèle, le facteur de concentration de contraintes dépend essentiellement des caractéristiques mécaniques et géométriques de la fibre et de la matrice qui assure le transfert de charge entre ces derniers. De la figure 4, on remarque que nos résultats sont en parfaite concordance avec ceux de [10]. De Plus l'espacement entre les fibres n'a aucun effet sur le facteur de concentration de contraintes au point de la cassure ( $x=0.0$ ), parce ce tous les fibres sont régulièrement espacées.

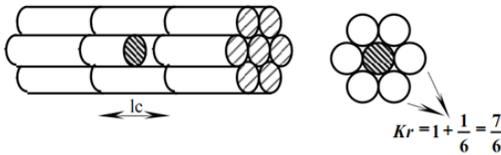
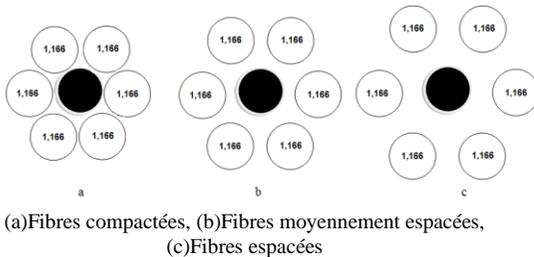


Figure 3: SCF des six fibres voisines selon [10]



(a)Fibres compactées, (b)Fibres moyennement espacées, (c)Fibres espacées

Figure 4 : SCF sur les six fibres voisines les plus proches d'une fibre cassée dans un arrangement hexagonal régulier.

Aux figures 5 et 6, une validation de nos résultats (Modèle NNLS) a été faite avec le modèle de répartition de la charge de [11] pour une simple rupture d'une fibre située dans un composite à fibres unidirectionnelles sous un arrangement hexagonal régulier. La figure 5 représente l'évolution du facteur de concentration de contraintes en fonction de la longueur de la fibre cassée. Il est nettement visible que nos résultats (Modèle NNLS) sont en excellente accord avec ceux de la HVDLS. A la position  $x=0$ , le facteur de concentration de contraintes (SCF) est nul. En allant, vers une

longueur assez importante, le SCF prend une valeur plateau égale à 1. Tandis que pour la figure 6, elle représente l'évolution du facteur de concentration de contraintes en fonction de la longueur des six fibres voisines intactes. Une différence assez remarquable est observée entre notre modèle et le modèle de HVDLS, surtout pour  $x=0$ . Vers des longueurs assez importantes, les deux courbes convergent vers la même valeur (SCF=1.0).

De cette figure, on peut dire que notre modèle assure une meilleure répartition des charges autour de la fibre cassée parce que environ 100% de la contrainte est divisée sur les six fibres voisines intactes ce qui nous donne un pourcentage 16.66% pour chaque fibre voisine la plus proche. Par contre le HVDLS prévoit un facteur concentration de contrainte moins élevée autour des fibres voisines intactes environ 60%, soit 10.95% pour chaque fibre voisine la plus proche. Par conséquent le reste de la concentration lâchée par la fibre cassée est répartie au delà de la frontière des voisines les plus proches.

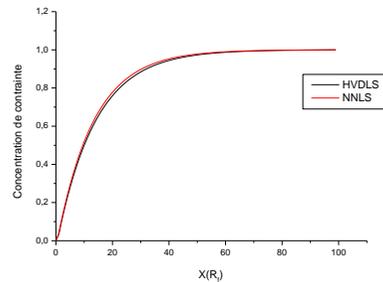


Figure 5 : Comparaison entre HVDLS et NNLS pour la fibre cassée.

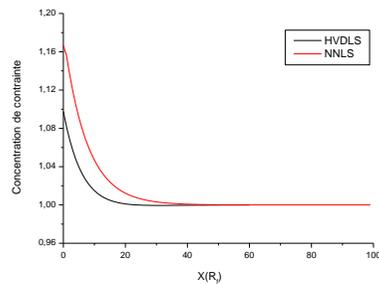


Figure 6 : Comparaison entre HVDLS et NNLS pour les fibres voisines les plus proches.

La figure 7 représente l'évolution du facteur de concentration de contraintes des six fibres voisines en fonction de la distance entre les fibres le long de l'axe longitudinal. On remarque que l'allure du SCF est identique pour les six fibres voisines intactes. La variation de la distance entre les fibres n'affecte pas les valeurs de SCF à  $x=0$  (ligne de cassure) et  $x=\infty$  (distance lointaine). Une simple perturbation existe entre ces deux distances. Donc plus que, cette distance est très petite (fibres proches l'une de l'autre), l'allure de la courbe converge rapidement vers la valeur plateau (SCF=1.0). Donc, l'effet du shearlag est réduit parce que nous avons une augmentation de la fraction volumique des fibres, par conséquent une réduction de la quantité de matrice qui est responsable du retardement du transfert des contraintes (phénomène du shearlag).

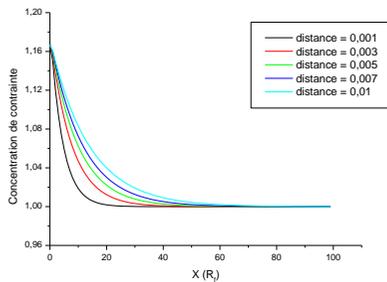


Figure 7: Evolution de la concentration de contraintes des six fibres voisines en fonction de la distance entre les fibres le long de l'axe longitudinal.

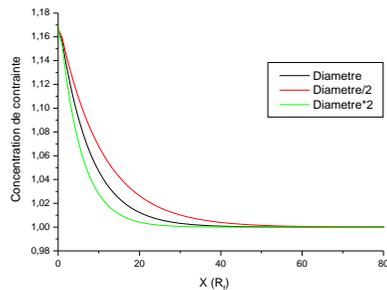
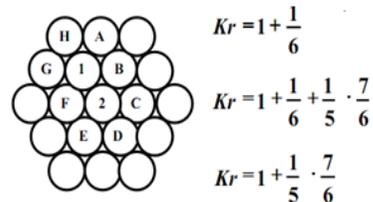


Figure 8: Evolution de la concentration de contraintes des six fibres voisines en fonction du diamètre des fibres de la cellule le long de l'axe longitudinal.

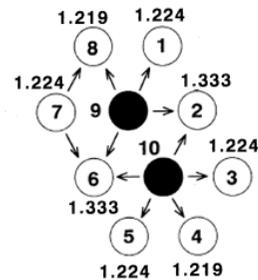
### V. Deux cellules à deux fibres cassées

Selon le modèle quasi-LLS [3], la cassure de la deuxième fibre, nous donne une répartition équitable de la charge entre les six fibres voisines, soit  $SCF=1.166$ , voir figure 9.a. En plus un rapport de  $1/5$  est transmis aux cinq fibres suivantes (A, B, F, G, H), Ceci ne coïncide pas avec la règle de LLS développée par [6], voir figure 9.b. Pour tester la performance de notre modèle (NNLS), trois types d'espacement de fibres sont évalués (fibres espacées, fibres moyennement espacées et fibres compactes). De la figure 10, il est clair que nos résultats sont proches du modèle [3] dans le cas des fibres moyennement espacées. Par contre, elles sont en bonne concordance avec les résultats de [6] dans le cas des fibres compactées.

Pour des fibres qui sont espacées et disposées selon un arrangement hexagonal régulier, on remarque que les valeurs maximales du SCF sont données par la fibre 2 et 6 ( $SCF=1.22$ ), parce que ces deux fibres sont entourées de deux fibres cassées. On trouve par la suite les quatre fibres 1, 3, 5 et 7, avec  $SCF=1.17$ . Enfin les deux fibres restantes 4 et 8, où le  $SCF=1.16$ .



a) Modèle [3]



b) Modèle [6]

Figure 9 : Concentration de contrainte dans le cas de deux fibres cassées selon le modèle [3] et [6].

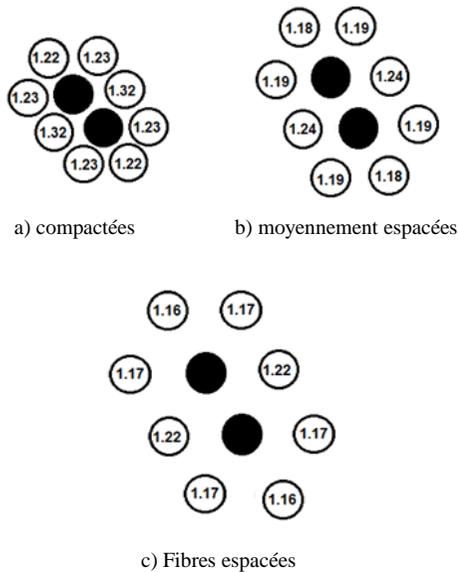


Figure 10 : Concentration de contrainte dans le cas de deux fibres cassées selon nos résultats pour une distance entre fibres (a) :  $w=1\mu$ , (b) :  $w=2\mu$  et (c) :  $w=3\mu$ .

## VI. Conclusions

Le présent travail consiste à suivre l'évolution de la concentration de contraintes au niveau de la fibre cassée et les fibres voisines intactes. Nos résultats sont en bonne concordance avec la littérature. Pour la fibre cassée, la concentration de contrainte est à la valeur zéro au point de rupture, puis elle augmente pour atteindre la valeur de 1.0 en s'éloignant sur la longueur. Pour les fibres voisines les plus proches, la concentration de contrainte est plus élevée sur le point  $x=0$  avec valeur de 1.166 pour les six fibres. Bien que l'effort de la fibre cassée soit réparti de façon égale sur les six fibres, la distance entre la fibre cassée et les fibres intactes ne change en rien de la valeur au point  $x=0$ , néanmoins la dégradation du facteur sur la longueur des fibres diffère. En conséquence, dans le cas d'une petite distance, la concentration de contraintes diminue plus rapidement, contrairement quand la distance est plus importante. La répartition du SCF pour les fibres intactes n'est pas identique, si le nombre

de fibres cassées est supérieur à 1. Ainsi, les valeurs maximales du SCF sont localisées pour les fibres entourées de deux fibres cassées.

## Références

- [1] Rosen, B.W., 1964. Tensile failure of fibrous composites. *AIAA J. 2*, 1985–1991.
- [2] Zweben, C., 1968. Tensile failure of fiber composites. *AIAA J. 6*, 2325–2331.
- [3] Phoenix, S. L., Schwartz, P., Robinson IV, H. H. *Statistics for the Strength and Lifetime in Creep-Rupture of Model Carbon/Epoxy Composites*, Composites Science and Technology, Vol. 32, 1988, pp. 81-120.
- [4] Landis, C. M., McGlockton, M. A., McMeeking, R. M. *An Improved Shear Lag Model for Broken Fibers in Composite Materials*, Journal of Composite Materials, Vol. 33, No. 7, 1999, pp. 667-680.
- [5] Landis, C. M., McMeeking, R. M. *Stress Concentrations in Composites with Interface Sliding, Matrix Stiffness, and Uneven Fiber Spacing Using Shear Lag Theory*, International Journal of Solids and Structures, Vol. 36, 1999, pp. 4333-4361.
- [6] Koichi Goda, *A strength reliability model by Markov process of unidirectional composites with fibers placed in hexagonal arrays*, International Journal of Solids and Structures 40 (2003) 6813–6837. 2039–2048
- [7] Bouhamida B., Sereir Z., Chateaufneuf A., Effet de l'emplacement aléatoire des fibres sur la concentration de contraintes autour d'une fibre cassée, *2<sup>ème</sup> Conférence Internationale Sur Les Matériaux Et Les Structures En Composite 2011*.
- [8] Bouhamida B., Sereir Z., Chateaufneuf A., *Uncertainties of stress intensification near broken fibers of unidirectional composite with random fiber spacing*, Theoretical and Applied Fracture Mechanics 65 (2013) 1–7.
- [9] Bandorawalla T. J., *Micromechanics-based strength and lifetime prediction of polymer composites*, Doctor of Philosophy in Engineering Mechanics, February 25, 2002, Blacksburg, Virginia, USA.
- [10] Atsushi Wada, Hiroshi Fukuda *Approximate upper and lower bounds for the strength of unidirectional composites*, Composites Science and Technology 59 (1999) 89±95
- [11] Hedgepeth, J. M., Van Dyke, P. *Local Stress Concentrations in Imperfect Filamentary Composite Materials*, Journal of Composite Materials, Vol. 1, 1967, p. 294-309.