

Contribution à l'homogénéisation numérique d'une structure cellulaire auxétique

C. Abaidia¹, El-Haddi Harkati¹, A. Bezazi²

¹Université de Tébessa, route de Constantine, Tébessa 12002, Algérie

² Laboratoire de Mécanique Appliquée des Nouveaux Matériaux (LMANM), Université 8 Mai 1945, B.P. 401 Guelma 24000, Algeria

Résumé — Les matériaux sandwichs connaissent un essor important, tant dans les applications les utilisant, que dans les technologies les mettant en œuvre. Ils présentent un intérêt pour les applications qui requièrent à la fois rigidité et légèreté, notamment les transports, la marine, le nautisme, l'aéronautique, l'aérospatial, les sports et loisirs, l'industrie lourde, le génie civil et l'armée. Il est intéressant de connaître leurs propriétés mécaniques pour prédire et calculer leur comportement dans des environnements spécifiques. Les propriétés d'un solide cellulaire dépendent non seulement des matériaux le constituant, mais aussi de la géométrie de la cellule. Ce papier est consacré à l'homogénéisation numérique des propriétés élastiques modules d'Young, modules de cisaillement et coefficient de Poisson de la conception de la cellule utilisée dans la référence [1] présentant un coefficient de Poisson négatif dans le plan. La raison d'être de ce concept est la présence de parois de base, nous explorons la solution basée sur les travaux de l'article [1] qu'ils s'appuient sur la théorie de l'élasticité pour les différents modules et coefficients dans le plan du nid d'abeille auxétique en fonction des paramètres géométriques et mécaniques.

Mots-clés: Homogénéisation, Cellulaire, Modélisation, Auxétique.

I. Introduction :

Les matériaux sandwichs sont composés de plusieurs parties interagissant entre elles. On trouve donc les peaux ou semelles ayant des caractéristiques mécaniques propres et le cœur ou âme pouvant être entre autres du nid d'abeilles (nida) ayant des propriétés mécaniques spécifiques [4] et [7]. L'assemblage de ces deux parties se réalise par collage ou soudage mettant en jeu un autre corps de comportement différent.

La problématique de modélisation de structure comportant de fortes hétérogénéités tels les nidas nécessite une puissance de calcul importante.

L'homogénéisation de ce type de matériaux constitue un moyen de contourner cette difficulté [4], pour prévoir ensuite les caractéristiques mécaniques, donc le comportement. Les solutions proposées se basent sur des approches différentes : Méthodes asymptotiques [7], variationnelles ou énergétiques [2] et numériques avec l'utilisation de logiciels de simulation par éléments finis comme ABAQUS, ANSYS.

L'intérêt de l'étude est de pouvoir homogénéiser une nouvelle structure de nids d'abeilles auxétique proposée et étudiée indépendamment des peaux par Bezazi et al dans la référence [1], c'est de remplacer le nida auxétique de géométrie compliquée par un matériau homogène de propriétés mécaniques équivalentes [2] dans des modèles numériques en utilisant un volume élémentaire représentatif.

Auteur correspondant : Chamseddine ABAIDIA
Champ de recherche: matériaux composites
Adresse : Université de Tébessa, route de Constantine,
Tébessa 12002, Algérie
E-mail : abaidiaing@gmail.com

II. Géométrie et notations

Les caractéristiques géométriques nécessaires aux modélisations :

- Les modules d'élasticité : E_X où X est la direction de traction.
- Les coefficients de Poisson: ν_{XY} où X est la direction de traction et Y la direction de contraction.
- Les modules de cisaillement : G_{XY} module de cisaillement dans le plan (X, Y)

Les modules sont calculés dans le repère (X, Y, Z), (Fig.1).

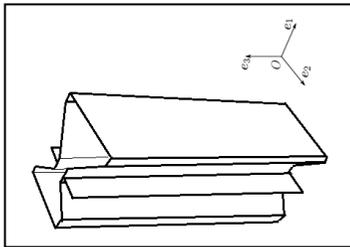


Fig. 1. Géométrie de la cellule étudiée

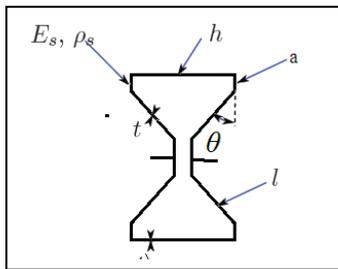


Fig. 2. Paramètres géométriques

Les Paramètres géométriques d'une cellule en nid d'abeille auxétique sont illustrés en (Fig. 2)

avec :

- θ : Angle de la cellule
- h : Longueur de la paroi centrale
- a : Longueur de la paroi de base
- l : Longueur de la paroi inclinée
- t : Épaisseur de la paroi inclinée
- b : Hauteur du nid d'abeilles

III. Propriétés mécaniques dans le plan d'un nid d'abeille auxétique

Les caractéristiques qui entrent en jeu dans le plan sont:

- les modules E_1 et E_2 ,
- le module de cisaillement G_{12} ,
- les coefficients de Poisson ν_{12} et ν_{21} .

IV. Modélisation analytique

Nous explorons la solution basée sur les travaux de Bezazi [1] qu'ils s'appuient sur la théorie de l'élasticité pour les différents modules et coefficients du nid d'abeille en fonction des paramètres géométriques et mécaniques.

• Modules E_1 et E_2

Les deux modules d'élasticité E_1 et E_2 sont calculés en exerçant respectivement une pression suivant X et sur Y [1], ainsi un effort P suivant les deux directions et des moments de flexion M. on considère le clinquant comme une poutre de longueur L et deux talons horizontaux de longueur a, d'épaisseur t, de profondeur b et de module d'Young E_s .

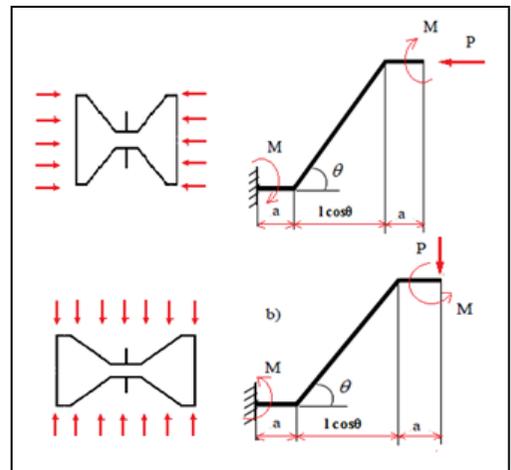


Fig. 3. Déformation des cellules sous une charge orientée suivant X et Y

Formulation Analytique

La distribution des moments de flexion est donnée dans ce cas par [1]:

$$M(x) = M_h \quad 0 \leq x \leq a$$

$$\begin{aligned} M(x) &= M_h - P \sin(\theta)x & a \leq x \leq L \\ M(x) &= M_h - P \sin(\theta)L & L+a \leq x \leq L+2a \end{aligned}$$

En appliquant le théorème de Castigliano obtient:

$$U = \int_0^L \frac{M^2 dx}{2EI}$$

Le module d'Young E_1 s'écrit alors:

$$E_1 = E_s \frac{\cos \theta + \frac{2a}{l}}{\left(\frac{h}{l} + \sin \theta\right)\left(1 + \frac{6a}{l}\right) \sin^2 \theta} \left(\frac{t}{l}\right)^3 \dots(1)$$

On obtient le module d'Young E_2 de même manière :

$$E_2 = E_s \frac{\left(\frac{h}{l} + \sin \theta\right)}{\left(\cos \theta + \frac{2a}{l}\right)\left(\cos^2 \theta + 6\frac{a}{l} \cos^2 \theta + 12\frac{a^2}{l^2} \cos \theta + 8\frac{a^2}{l^2}\right)} \left(\frac{t}{l}\right)^2 \dots(2)$$

• **Coefficients de Poisson ν_{21} et ν_{12}**

Les coefficients de Poisson sont calculés selon la séquence suivante [1]:

$$\begin{aligned} \nu_{21} &= -\frac{\epsilon_{11}}{\epsilon_{22}} \\ \nu_{21} &= \frac{\left(\frac{h}{l} + \sin \theta\right) \sin \theta}{\left(\cos \theta + \frac{2a}{l}\right) \cos \theta} \dots(3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nu_{12} &= -\frac{\epsilon_{22}}{\epsilon_{11}} \\ \nu_{12} &= \frac{\left(\cos \theta + \frac{2a}{l}\right) \cos \theta}{\left(\frac{h}{l} + \sin \theta\right) \sin \theta} \dots(4) \end{aligned}$$

V. Modélisation numérique

Pour calculer les différents modules, un déplacement est imposé sur la face du volume élémentaire représentatif (VER) dans une direction donnée, la face opposée étant fixe. Les symétries sont prises en compte au niveau des conditions aux limites. Neuf simulations

sont nécessaires pour déterminer les neuf constants élastiques du nida.

- La simulation d'une sollicitation de traction suivant une direction i permet de déterminer les 2 modules de rigidité E_1 , E_2 et les 6 coefficients de Poisson.
- La simulation des sollicitations de cisaillement suivant les plans x_1x_2 , x_2x_3 , x_1x_3 (2 simulations par plan) permet de déterminer les 6 coefficients de cisaillement.

Cette méthode basée sur l'analyse des efforts aux liaisons, à partir d'un déplacement imposé, permet par l'utilisation des lois de comportement de déduire les constants élastiques. Les figures 7 et 8 montrent les déformées du nida pour les simulations de traction suivant les axes x_1 , x_2 et x_3 .

▪ **Le volume élémentaire représentatif (VER)**

La géométrie est à base de cellules auxétique. Si l'on se réfère aux notations de la figure 5 les caractéristiques de nid d'abeille en aluminium 5056 sont les suivantes:

$\Phi = 6,4$ mm, $h = 3,695$ mm, $L = 1,216$ mm, $a = 1$ mm, $t = 0,075$ mm, $hc = 8,8$ mm, $\theta = 34,3^\circ$.

Le matériau considéré est de l'aluminium 5056 avec les caractéristiques mécaniques suivantes :

$E_s = 70$ GPa, $G_s = 26,676$ GPa, $\nu_s = 0,312$.

Les longueurs l_x , l_y et l_z du volume élémentaire représentatif sont (Fig. 4)

$l_x = 54,09$ mm, $l_y = 33,79$ mm, $l_z = 8,8$ mm.

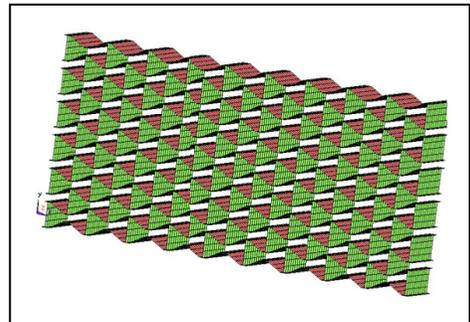


Fig. 4. Volume élémentaire représentatif du NIDA

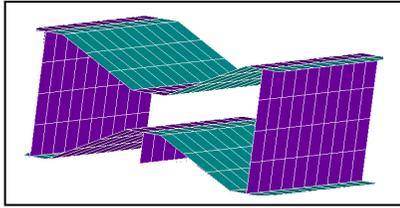


Fig. 5. Maillage de la cellule auxétique

Ce modèle prend en compte 94 cellules qui ont été maillées avec des éléments coques à 4 nœuds et à 6 degrés de liberté par nœud.

Pour ce modèle, le maillage choisi permet de ne pas trop alourdir le calcul tout en gardant une bonne précision au niveau des résultats. Le maillage utilisé est présenté sur les Figures 4 et 5 et une précision acceptable est atteinte pour un nombre d'éléments de 5288 éléments.

Les différents modules sont calculés par le principe d'action réaction au niveau des faces du VER. Un déplacement est imposé sur une face du V.E.R. dans une direction donnée, la face opposée étant fixe. Les symétries sont prises en compte au niveau des conditions aux limites.

- **Simulation des sollicitations en traction**

Deux simulations en traction permettent de déterminer les modules d'élasticité et les coefficients de Poisson dans le plan.

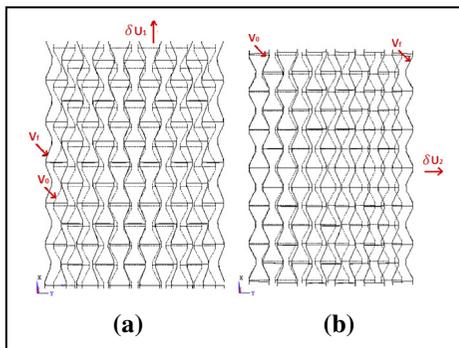


Fig. 6. Déformée du VER suivant X(a), Y(b)

- Simulation en traction suivant X

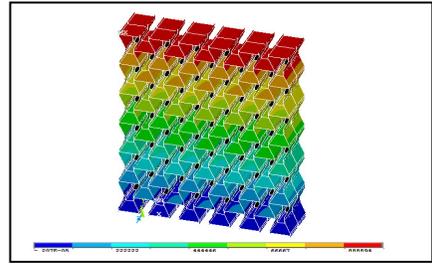


Fig. 7. VER sous une traction suivant X

- La simulation en traction Y

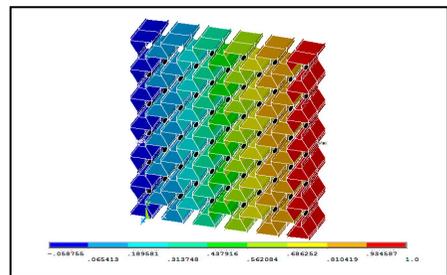


Fig 8. VER sous une traction suivant Y

Tableau 1. Résultats de la traction suivant X

ANSYS	E_1 (MPa)	8,5227
	ν_{12}	-1,721
MODELE Réf. [1]	E_1 (MPa)	8,7010
	ν_{12}	-1,4640
Erreur %	E_1	2
	ν_{12}	17

Tableau 2. Résultats de la traction suivant Y

ANSYS	E_2 (MPa)	2,4840
	ν_{21}	- 0,5522
MODELE Réf.[1]	E_2 (MPa)	2,30000
	ν_{21}	- 0,68300
Erreur %	E_2	7
	ν_{21}	19

On peut remarquer sur le tableau 1 que l'écart des résultats entre la simulation

numérique et le modèle analytique est d'environ 2 % pour E1. Par contre, l'écart sur le coefficient de Poisson 17%.

Le tableau 2 présent les résultats obtenus par ANSYS et compares aux valeurs analytiques obtenues par les formules de [1]. Nous avons constaté un écart faible, pour le module d'Young E₂ égale à 7 % et pour le coefficient de poisson 19%.

Pour les modules de cisaillement, la tâche est plus difficile, car la distribution des contraintes est compliquée. Les faces sur lesquelles on exerce le cisaillement ne sont plus planes après déformation. Il est donc impossible de les calculer de manière exacte analytiquement. On peut cependant utiliser l'approche numérique.

Modules de cisaillement en plan

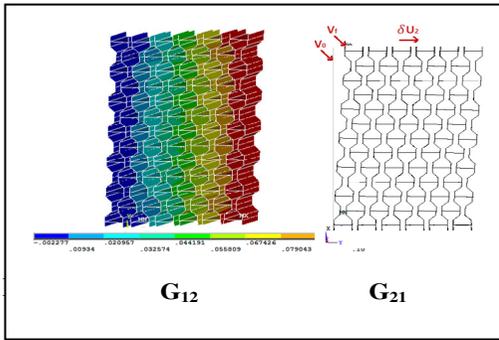


Fig.9. VER sous sollicitation de cisaillement xy

Modules de cisaillement hors plan

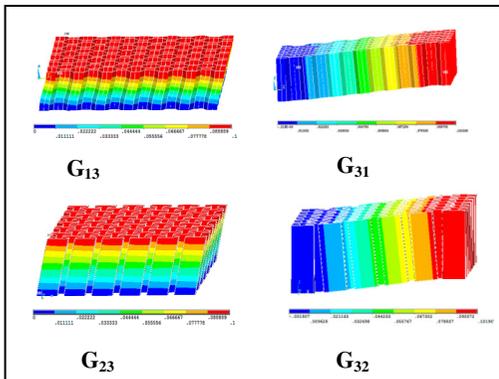


Fig. 10. VER sous sollicitation de cisaillement hors plan

Le résumé de l'ensemble des simulations effectuées pour la détermination des caractéristiques du nid d'abeille auxétique est présenté dans le tableau 3.

Tableau 3. Caractéristiques du nid d'abeilles auxétique obtenues par ANSYS.

Propriétés élastiques	Ansys	Réf. [1]	Erreur %
E ₁ (MPa)	8,5223	8,701	2
E ₂ (MPa)	2,4840	2,300	7
E ₃ (MPa)	914,329		
ν ₁₂	-1,7213	-1,464	17
ν ₂₁	-0,5522	-0,683	19
G ₁₂ (MPa)	1,354		
G ₂₁ (MPa)	0,125		
G ₁₃ (MPa)	608,108		
G ₃₁ (MPa)	1,273		
G ₂₃ (MPa)	319,808		
G ₃₂ (MPa)	2,893		

VI. Simulation numérique de la flexion quatre points

Ce bref aperçu des formulations existantes sur l'homogénéisation des nidas a permis d'avoir une approche prévisionnelle des modules élastiques des nidas étudiés. En utilisant en parallèle les modélisations analytiques et numériques, on arrive à déterminer les constantes élastiques du nida supposé orthotrope. Ces propriétés mécaniques peuvent être maintenant intégrées dans des modèles analytiques et numériques pour prédire le comportement mécanique des panneaux sandwichs soumis à des sollicitations données. Ainsi, la suite de cette étude exploitera des modèles numériques et expérimentaux pour étudier le comportement élastique des plaques sandwichs en nid-d'abeilles hexagonales soumises à des essais de flexion 4 points compares a un modèle numérique développé sur Ansys en utilisant des plaques sandwichs a cœurs en cellules auxétiques homogénéisées dans la partie précédente. Les dimensions et les caractéristiques mécaniques des cellules sont

maintenues.

Pour des raisons de symétrie, le modèle de base est constitué d'une demi de la plaque avec les conditions aux limites appliquées:

- au niveau de l'appui : fixation de la translation U_z ,
- au niveau de la symétrie sur la face 1 : fixation U_x et des rotations θ_y et θ_z ,

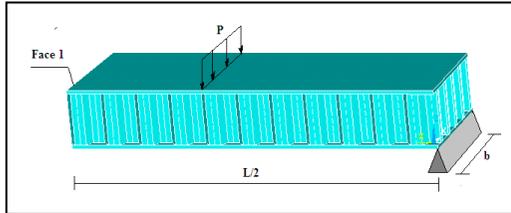


Fig. 11. Modélisation de la flexion 4 points sur Ansys.

La poutre sandwich est constituée:

- de deux peaux en aluminium 5056 ;
- une âme en nid d'abeille Auxétique en aluminium 5056.

Les caractéristiques mécaniques de la peau sont : $E_s = 70$ GPa, $G_s = 26,677$ GPa, $\nu_s = 0,312$

- Le modèle de base à géométrie exacte constitué d'une âme de dimensions et distribution réelle des cellules (Fig.12)

$E_s = 70$ GPa, $G_s = 26,677$ GPa, $\nu_s = 0,312$

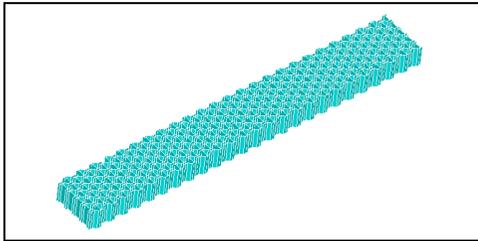


Fig. 12. Âme de dimensions et géométrie réelle.

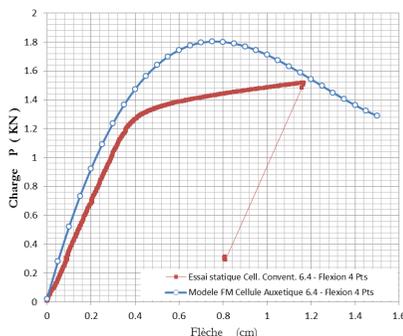


Fig. 13. Courbe charge déplacement de l'essai statique et la simulation numérique

La figure 13 présente la comparaison entre les résultats de la simulation numérique de Nida auxétique et l'essai statique en flexion 4 points.

VII. Résultats

La comparaison des résultats du modèle analytique proposé par [1] avec ceux obtenus par simulation numérique permet de mieux cadrer les valeurs des modules élastiques dans le plan. On peut constater que la détermination du module d'Young E_1 par les deux méthodes analytique et numérique est acceptable, car l'écart entre le modèle de [1] et la simulation numérique atteint 2% pour E_1 et 7 % pour E_2 . Par contre l'erreur sur les coefficients de Poisson est un peu importante pour ν_{12} (17%) et 19% pour ν_{21} . Pour ce qui concerne le reste des modules, sont obtenus uniquement par simulation numérique.

Les résultats des essais statiques de cisaillement sont comparés aux résultats d'un modèle éléments finis développé sur Ansys avec des éléments de base 3D et des éléments de plaque 2D capable de représenter la distribution géométrique des cellules et les principaux modes de déformation en flexion 4 points. L'amplitude de la charge de flexion appliquée se diffère notablement du modèle conventionnel à cellules hexagonales au modèle auxétique. On note cependant que pour le modèle auxétique la charge P et la pente de la courbe sont plus importantes (1.8 KN) que pour le modèle conventionnel. On remarque aussi que les résultats de la simulation numérique sont cohérents avec ceux des essais statiques en flexion 4 points.

VIII. Conclusion

Les Structures cellulaires auxétiques sont considérées comme un matériau orthotrope. Du fait de sa géométrie bien spécifique, il est assez difficile de caractériser son comportement mécanique. Le calcul numérique permet

d'avoir une première approche des réactions de matériaux un peu variables tels que le nida auxétique, qui ne se prêtent pas toujours à des modélisations analytiques simplifiées.

Une homogénéisation des nids d'abeilles a été faite avec la méthode analytique basée sur la théorie de l'élasticité et par une simulation numérique par éléments finis. Cette homogénéisation nous a permis de trouver la matrice de rigidité de cette structure hexagonale. La corrélation entre les deux méthodes montre le bon accord des résultats. Le modèle comportant 94 cellules paraît satisfaire la résolution des modules d'élasticité et des coefficients de Poisson. Ce modèle ne permet pas une évaluation du module de cisaillement transverse.

Le modèle analytique basé sur la mécanique des structures permet de faire une meilleure prévision des modules élastiques dans le plan

Le modèle numérique donne également une estimation acceptable des modules d'élasticité dans le plan (x_1, x_2). Ce modèle constitue donc un outil de base pour l'estimation des propriétés élastiques du nida.

L'analyse des résultats numérique en flexion quatre points permet de cerner le comportement sous chargement statique des sandwichs en nid d'abeille auxétiques en aluminium. Nous constatons que la nouvelle conception de la cellule présente une rigidité en flexion plus importante surtout dans la direction L que celle obtenue par la flexion des sandwichs en Nida régulier.

IX. Références

- [1]. Bezazi A, Scarpa F, Remillat C. *Analytical modelling of new honeycomb structures having negative Poisson's ratio*. In: Conférence internationale de mécanique avancée (CIMA_04), Boumerdes, Algeria, 28 November–02 December 2004
- [2]. L. J. Gibson & M. F. Ashby, "*Cellular solids, structure and properties*", Pergamon Press., 1988.
- [3]. C. C. Chamis, R. A. Aiello, L. N. Murthy, *Fiber composite sandwich thermo structural behaviour:*

Computational simulation, Journal of composites technology&research, vol. 10, p. 93-99,1988.

- [4]. L. Al Bachi, *Etude numérique et expérimentale du comportement d'une structure cellulaire périodique, application aux structures sandwichs*, thèse INPT de Toulouse, juillet 2002.
- [5]. Zinker, D. *An Introduction to Sandwich Construction*. Emas Publishing, UK
- [6]. Allen H. G. *Analysis and design of Structural Sandwich Panels*, Pergamon Press, Oxford,
- [7]. D. Zenkert, "*An Introduction to sandwich construction*", EMAS, Solihull, UK, 1995