Méthode pratique de résolution de jeux : $m \times n$

Pr./ MILOUDI Boubakeur*

ملخص:

تعرف نظرية الألعاب كاداة بحث تسمح بتحليل المواجهة (القرارات) لأعوان اقتصاديين أو أكثر (لاعبين)، قد تكون مصالحهم متباينة وحيث يعتمد كسب واحد على سلوك آخر.
في هذه المقالة، قمنا بدراسة قرارات المؤسسات، في حالة احتكار القلة، بالمقارنة مع منافسيها. وقد يتفق البعض على أسواق معينة؛ ومن ناحية أخرى، يتنافس آخرون في أسواق أخرى. مما سمح لنا باقتراح طريقة جديدة لحل الألعاب في الحالة $m \times n$.

الكلمات المفتاحية: نظرية الألعاب، قرارات المؤسسات.

Abstract:

La théorie des jeux est définie comme un instrument de recherche qui permet d'analyser l'affrontement (décisions) de deux ou plusieurs agents économiques (joueurs), dont les intérêts peuvent être divergents et où le gain de l'un dépend du comportement de l'autre.
Nous avons étudié, dans cet article, les décisions des entreprises, dans une situation oligopolistique, par rapport à ses concurrents. Certaines peuvent s'entendre sur certains marchés ; par contre, d'autres se font concurrence sur d'autres marchés. Ce qui nous a permis de proposer une nouvelle méthode de résolution de jeux au cas : $m \times n$.

Mots clés: Théorie des jeux, Décisions des entreprises.

* **Professeur, Université Alger 3**

Plan:

Introduction
1) Les notions de base
2) Méthode de résolution des jeux 3×3 :
Conclusion

Introduction:

Depuis plusieurs années, les applications de la théorie des jeux ont connu un développement important en microéconomie. Il faut rappeler que celle-ci est apparue au début de l'année 1944 avec les travaux de J. Von. Neumann et O. Morgenstern sur la stratégie militaire. Il faut souligner que le champ d'application de la théorie des jeux s'est étendu à de nombreux domaines (économique, politique, militaire, théologique, etc.).

La théorie des jeux est définie comme un instrument de recherche qui permet d'analyser l'affrontement (décisions) de deux ou plusieurs agents économiques (joueurs), dont les intérêts peuvent être divergents et où le gain de l'un dépend du comportement de l'autre.

Nous allons approfondir les notions de base de la théorie des jeux, connaitre la méthode de résolution des jeux : 3×3. Il s'agit, par la suite **de proposer une nouvelle méthode de résolution de jeux au cas : $m \times n$.**

1- Les notions de base :

Tout d'abord nous allons clarifier certaines notions de base comme : stratégies, jeux.

Une **stratégie** dans la théorie des jeux sert à indiquer un plan d'action global qui prend en considération tous les plans d'actions possibles de l'autre joueur (entreprise).

Ce plan doit analyser et prévoir les résultats d'une confrontation avec le plan d'action de l'autre entreprise. Chaque entreprise a la possibilité de faire son choix entre divers plans d'actions globaux, c'est-à-dire entre différentes stratégies.

L'entreprise choisira une stratégie qui lui permettra d'obtenir le résultat le plus avantageux en supposant que le concurrent dispose aussi d'une stratégie qui lui est favorable.

L'objectif recherché dans ce plan d'action est de permettre d'atteindre **la maximisation des gains (utilités) espérés** : ce qu'on appelle **la stratégie optimale,** il faut distinguer aussi stratégie pure et stratégie mixte qui peuvent être optimales.

La stratégie pure est une stratégie simple utilisée dans un jeu à un seul coup. Par contre, la **stratégie mixte** consiste pour un joueur à choisir aléatoirement entre deux ou plusieurs possibilités compte tenu de l'ensemble de probabilités données.

La stratégie optimale consiste à maximiser le gain espéré d'un joueur.

Le terme **jeu** indique une concurrence entre deux joueurs (entreprises). Il consiste à effectuer un ou plusieurs déplacements par chacun des joueurs.

On classe les jeux selon le **nombre** de participants, il peut exister des jeux à un, deux, trois, jusqu'à (n) personnes, dont les intérêts sont souvent divergents.

Si, on revient à la théorie des jeux, elle consiste à étudier l'affrontement de deux ou plusieurs joueurs, dont la caractéristique essentielle est leur **rationalité.**

Les décisions rationnelles d'un agent économique dépendent des décisions rationnelles d'un autre agent.

Donc, **les décisions rationnelles** d'un agent dépendant de ses préférences, des informations dont il dispose, de ses contraintes financières et des actions des autres agents.

Au cours d'un jeu, les deux entreprises peuvent disposer d'un nombreux déterminé de stratégies. Par exemple, l'entreprise (A) dispose de deux (2) stratégies et l'entreprise (B), dispose de trois (3) stratégies.

On peut calculer le résultat de la rencontre de chaque stratégie de A contre celle de B, soient six (6) résultats que nous appelons : **gains.**

Maintenant il s'agit de déterminer les gains. On définit les gains comme les résultats de la rencontre des stratégies opposées prises deux à deux. Il faut noter qu'il existe deux sortes de gains :

- dans une situation plus favorable : on attribue un **gain positif ;**
- et dans situation moins favorable : on attribue un **gain négatif.**

Il s'agit aussi de définir des jeux à somme nulle qu'on appelle **point-selle** et des jeux à **somme non nulle** :

-**Dans les premiers,** le gain du joueur (A) est exactement égal en valeur absolue à la perte du joueur (B) ou inversement, leur somme algébrique est égale à zéro quel que soit la stratégie adoptée.

Dans ce cas il faut souligner que tout gain pour une entreprise s'accompagne d'une perte pour l'autre. On dit que le jeu est à **somme nulle.**

On écrira sous forme matricielle de jeu que le gain de (A) **ligne** est l'opposé de la perte de (B) **colonne**.

- **Par contre, dans les seconds**, le gain de l'entreprise (A) n'est pas nécessairement égal en valeur absolue à la perte de l'autre. Dans ce cas le résultat final du jeu est différent de zéro, on dit que ce jeu est à **somme non nulle** où **le point-selle** n'existe pas.

Soit un jeu avec $m \times n$ stratégies sous forme matricielle de l'entreprise (A) en ligne et de l'entreprise (B) en colonne :

$$\begin{array}{cc} & \textbf{Stratégies de } B \\ \textbf{Stratégies de } A & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots\dots & a_{1j} & \dots\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots\dots & a_{2j} & \dots\dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots\dots & a_{ij} & \dots\dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots\dots & a_{mj} & \dots\dots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

où : a_{ij} représente le gain de (A) si, l'entreprise (A) emploie sa $i^{ème}$ stratégie et (B) sa $j^{ième}$ stratégie.

Comme le jeu est à somme nulle, le gain de (B) est : $(-a_{ij})$
Soit l'exemple suivant :

(B)

(A)

10	20	30
5	10	20

- Si (A) : choisie d'utiliser sa 1ère stratégie (1ère ligne) son gain est (30), (B) utilise sa 1ère stratégie soit (10) qui est une perte, donc il minimise ses pertes.
- Si (A) : emploie sa 2ème ligne, son gain est 20 et (B) : emploie sa 1ère colonne (5) : en minimisant ses pertes.

Le résultat final dépend des stratégies des deux joueurs et aucun n'a le pouvoir d'imposer ce qu'il préfère.

2- Méthode de résolution des jeux 3×3 :

Soit la matrice des jeux 3×3 qui ne doit comporter ni lignes dominés ou colonnes dominantes, ni point-selle.

Soit la matrice de jeu suivante:

		B: 1	2	3
A	1	2	2	3
	2	2	4	0
	3	3	0	2

1) On procède comme suit pour A (colonnes) :

On retranche la 1ère colonne de la 2ème colonne et la 2ème colonne de la 3ème colonne, on a :$(1)-(2)$ et $(2)-(3)$:

On obtient la matrice :

		B	
A	1	0	-1
	2	-2	4
	3	3	-2

La fréquence de A_1 (on élimine la 1ère ligne), il reste la matrice suivante :

-2	4
3	-2

On fait la différence entre la multiplication des diagonales, on prend les chiffres en valeur absolue :

$$A_1 = (-2)(-2) - (3)(4) = -8 \Rightarrow \mathbf{8}$$

$$A_2 = (0)(-2) - (-1)(3) = 3 \Rightarrow \mathbf{3}$$

$$A_3 = (0)(4) - (-1)(-2) = -2 \Rightarrow \mathbf{2}$$

La stratégie mixte de A est : 8 : 3 : 2

1) Pour B (ligne)

On retranche : la 1ère ligne de la 2ème ligne, et la 2ème moins la 3ème ligne, on a :

$$\left.\begin{matrix}(1)-(2): \text{ligne} \\ (2)-(3): \text{ligne}\end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

0	-2	3
-1	4	-2

$$B_1 = (-2)(-2) - (4)(3) = 8 \Rightarrow \mathbf{8}$$

$$B_2 = (0)(-2) - (3)(-1) = 3 \Rightarrow \mathbf{3}$$

$$B_3 = (0)(4) - (-2)(-1) = -2 \Rightarrow \mathbf{2}$$

Les stratégies mixtes de B sont 8 : 3 : 2.

Examinons si ces stratégies mixtes sont la solution du jeu.

Si on revient à la matrice de jeu qui contient les stratégies pures, on obtient :

la 1ère colonne : $\frac{2\times 8+2\times 3+3\times 2}{8+3+2}=\frac{28}{13}$

la 2ème colonne : $\frac{2\times 8+4\times 3+0\times 2}{13}=\frac{28}{13}$

la 3ème colonne : $\frac{3\times 8+0\times 3+2\times 2}{13}=\frac{28}{13}$

Egalement on procède pour le joueur (A) : sa stratégie mixte contre chaque stratégie pure de B, on a :

la 1ère ligne donne : $\frac{2\times 8+2\times 3+3\times 2}{8+3+2}=\frac{28}{13}$

la 2ème ligne : $\frac{2\times 8+4\times 3+0\times 2}{13}=\frac{28}{13}$

la 3ème ligne : $\frac{3\times 8+0\times 3+2\times 2}{13}=\frac{28}{13}$

Donc, **la solution du jeu est :** $\frac{28}{13}$

Les stratégies de A : 8, 3, 2, contre **les stratégies de B : 8, 3, 2**

Méthode pratique de résolution de jeux : $m \times n$

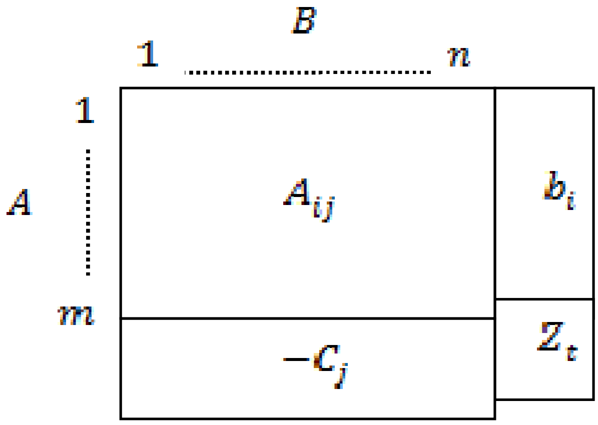
Soit la matrice de jeux : $m \times n$

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots\ldots & a_{1j} & \ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots\ldots & a_{2j} & \ldots\ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} \ldots\ldots & a_{ij} & \ldots\ldots a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots\ldots & a_{mj} & \ldots\ldots a_{mn} \end{pmatrix}$$

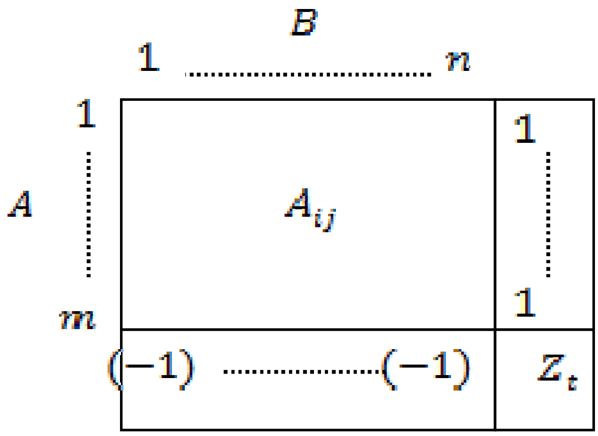
On ajoute à la matrice $A_{m\,n}$:

- une ligne $(-C_j)$ composée d'éléments de valeur (-1), qu'on appelle **la fréquence** ou la stratégie mixte de A.
- une colonne (b_i) composée d'éléments de valeur (1), qui est la stratégie mixte de B.
- et à l'intersection de (C_j) et (b_i) le nombre (Z_t).

On obtient ce qu'on appelle la **matrice élargie** qui, se présente comme suit avec les joueurs A et B :



Egalement qu'on écrit :



1- choix du pivot (p) :

Pour choisir le pivot, on suit le processus suivant :

- on sélectionne la valeur (minimale) la plus petite parmi les éléments de chaque colonne, telle que : $min\left(-\frac{c_j b_i}{a_{ij}}\right)$.
- On choisit parmi les éléments sélectionnés celui qui a la valeur la plus grande (maximale) qu'on appelle le **pivot**.

- Le pivot (p) doit être positif et différent de zéro ($p \geq 0$) tel que : $p = min\left(-\frac{c_j b_i}{a_{ij}}\right)$

2- La ligne et la colonne du pivot :

- Les éléments de la ligne du pivot ne changent pas, sauf le pivot dont la valeur au début est égale à un tel que : $p_0 = 1$.
- Les éléments de la colonne du pivot changent de signes.

3- Si, on extrait, parmi les éléments de la matrice (A_{ij}), la ligne (p) et la colonne (q), on obtient :

$$\begin{array}{c|ccccccc|}
 & 1 & \cdots & j & \cdots & q & \cdots & n \\
\hline
1 & & & \vdots & & \vdots & & \\
\vdots & & & \vdots & & \vdots & & \\
i & \cdots & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{iq} & \cdots & \cdots \\
\vdots & & & \vdots & & \vdots & & \\
p & \cdots & \cdots & a_{pj} & \cdots & a_{pq} & \cdots & \cdots \\
\vdots & & & \vdots & & \vdots & & \\
m & & & \vdots & & \vdots & & \\
\hline
\end{array}$$

Donc, les autres éléments de la matrice sont calculés à partir de la formule suivante :

$$(a_{ij})_i = \frac{(a_{ij})a_{pq} - a_{pj}(a_{iq})}{Z_t}$$

On a alors les éléments calculés :

$(a_{ij})^1$: est la valeur des éléments calculés de la matrice élargie avec le 1er pivotage.

$p_0 = 1$: est la valeur du pivot qui est égale à (un) avant le 1er pivotage.

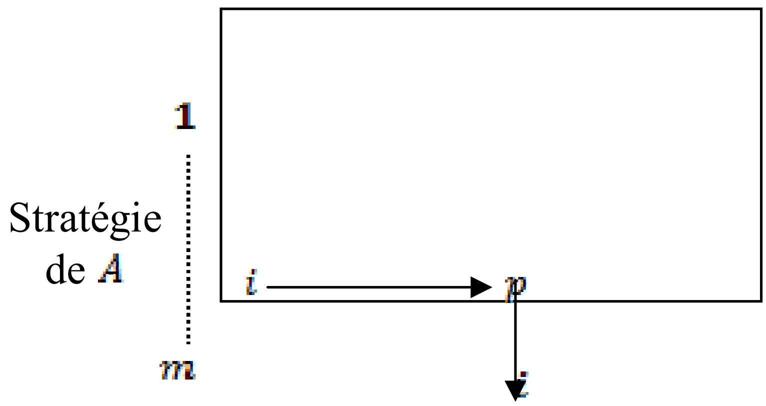
$p_1 = a_{pq}$: est la valeur du pivot qu'on a sélectionné.

a_{pj} : les éléments de la ligne ne changent pas.

a_{iq} : les éléments de la colonne changent de signes.

4- La valeur du nouveau pivot est celle de z_0 de la matrice du jeu précèdent.

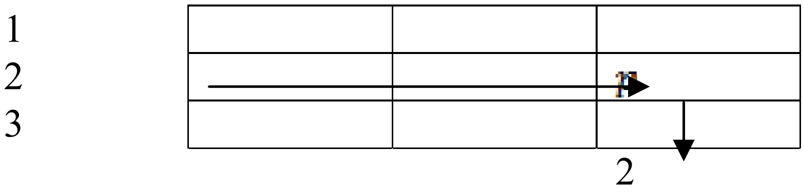
5- Les stratégies des joueurs A et B sont indiquées par les nombres qui se retrouvent à gauche et au dessus de la matrice, comme indiqué ci-dessous.



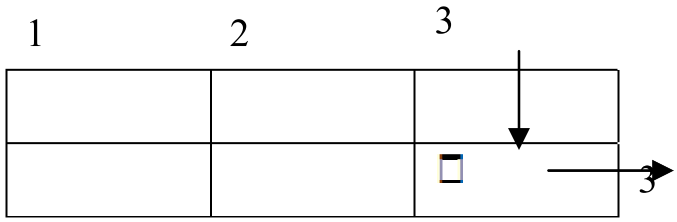
- Après chaque pivotage, le nombre de la stratégie de A qui se trouve à gauche de la ligne du pivot est remplacé par le nombre qui se trouvant au-dessous du pivot, qu'on appelle **les stratégies actives de A.**

- Egalement après pivotage le nombre de la stratégie de B qui se trouve au dessus du pivot est remplacé par le nombre se trouvant à droite du pivot, qu'on appelle **les stratégies actives de B.**
- Par exemple :

Pour A :



Pour B :



6- Si, la ligne des fréquences ($-\square_{\square}$) contient un élément négatif, on continue le pivotage jusqu'à obtenir les ($\square_{\square}$) positif ($\square_{\square} > 0$), ce qui nous permet d'obtenir la matrice de jeu définitive.

Ce jeu se présente comme suit :

□ □□

□		□□			**Stratégies mixtes de □**	**Stratégies actives de □**
				0		
−□□	**Stratégies mixtes de □**				□□	
	Stratégies actives de □					

On obtient alors le jeu définitif :

1) Les (□□) sont positifs et ses éléments sont les stratégies correspondantes de □.
2) Les éléments de (□□) sont les stratégies mixtes de □.
3) La solution du jeu est donné par : $\frac{□□}{□□}$ en considérant que (□□) est le dernier pivot du jeu définitif.

Exemple :

Soit la matrice de jeu :

□

		1	2	3
	1	2	2	3
□	2	2	4	0
	3	3	0	2

On ajoute la ligne $(-□_□)$ et $(□_□)$ ainsi que $□_0$:

□

□		1	2	3	$□_□$	
	1	2	2	3	1	3
	2	2	4	0	1	
	3	3	0	2	1	
	$□_□$	-1	-1	-1	0	$□_0 = 1$

1- On procède au choix du pivot (□) :

On sélectionne la valeur la plus petite pour chaque colonne tel que $□□□\frac{□_□ . □_□}{□_{□□}}$ avec $:(□_□ > 0)$, ce qui donne : $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}$.

Parmi les éléments sélectionnés, on choisit celui qui la valeur la plus élevée, soit : $\frac{1}{3}$. Comme il y a deux minimums, on sélectionne l'un d'eux.

Donc : $□ = 3$ de $□_1$ et $□_3$.

2- On commence le pivotage suivant la formule précédente telle que :

$$(□_{□□}) = \frac{(□_{□□})(□_{□□}) - □_{□□}(□_{□□})}{□_□}$$

Cette méthode parait compliquée, mais en fait elle est simple.

Par exemple, si on calcule l'élément (2), de $□_2$ et $□_1$, on a :

$$\frac{2\times3-0\times2}{□_0} = \frac{6}{1} = 6$$

Au début, $□_0$ est égale à un. Mais après chaque pivotage, il prend la valeur du pivot précédent. Ainsi, avec la 1er pivotage, $□_1$ devient égale à $3(□_1 = 3)$.

3- La ligne du pivot ne change pas, mais la colonne du pivot change de signes. On obtient le tableau suivant :

□

		1	2	3	$□_□$	
		2	2	1	1	**3**
□		6	**12**	0	3	**2**
	3	5	-4	-2	1	
	$□_□$	-1	-1	-1	1	$□_1 = □$
			2	**1**		

Comme $□_□$ contient des éléments négatifs, on continue le pivotage, on procède suivant le processus précèdent et on obtient le tableau suivant : avec $□ = 12$ comme nouveau pivot

□

					$□_□$	
		4	-2	4	2	**3**
□		6	3	0	3	**2**
	3	**28**	4	-8	8	1
	$-□_□$	-2	1	4	5	$□_2 = □□$
		3	**2**	**1**		

On remarque qu'après chaque pivotage les joueurs □ et □ changent de stratégies :pour □, on a : 1 et 2, pour □, on a : 2 et 3.

Comme les $(-□_□)$ contiennent un nombre négatif (-2) on continue le pivotage.

Le nouveau pivot est : □ = 26 et $□_2 = 12$.

			□	$□_□$	
	-4	-6	12	2	3
□	-6	5	4	3	2
	12	4	-8	8	1
$-□_□$	2	3	8	13	$□_3 = □□$
	3	2	1		

Comme les $□_□$ ne contiennent plus d'éléments négatifs, on obtient :

- **La valeur du jeu : $□_□ = \frac{□□}{□□}$**
- **La stratégie mixte de □ est : 8, 3, 2.**
  et la stratégie mixte de □ est : 8, 3, 2.

Conclusion:

Nous avons étudié, dans cet article, les décisions des entreprises, dans une situation oligopolistique, par rapport à ses concurrents. Certaines peuvent s'entendre sur certains marchés ; par contre, d'autres se font concurrence sur d'autres marchés. Ce qui nous a permis de proposer **une nouvelle méthode de résolution de jeux au cas :$m \times n$.**

Cette méthode consiste à suivre un processus comprenant un certain nombre d'étapes ce qui permet d'obtenir les résultats demandés comme : **la valeur du jeu et les stratégies mixtes de chaque joueur. Cette méthode originale** utilisée est **simple et pratique** et elle présente moins de calculs que la méthode classique.

Références & Bibliographie:

DRESHER Melvin, «Jeux de stratégie – Théorie et applications», Dund, Paris, 1965.
VON NEUMANN, John & MORGENSTERN Oskar, «Theory of games and economic behavior», New York John Wiley & Sons, 1964.
DEMANGE G. & PONSARD Y. P., «Théorie des jeux et analyse économique», PUF, Paris, 1964.
MORROW J. D., «Game theory for Political Scientists», Princeton University Press, 1994.
VEGA-REDONDO F., «Evolution, Games and Economic Behavior», Oxford University Press, Oxford, 1996.