

**«Systèmes de modification des primes a posteriori »
systèmes bonus-malus” : Poisson-Gamma à effet aléatoire
Etude empirique (Cas de la SAA)**

Dr. LATRECHE Abdelouahab^{*}

Dr. BENLAIB Boubakeur^{**}

Abstract :

The insurance is an operation by which the insurer commits him paying a service in the event of realization of a preset dubious event realizing the payment of a premium by the policy-holder.

A primordial problem to which the companies of insurance are confronted, is the determination of the premium relating to a contract of insurance. One contract of insurance is an assumption of responsibility of risk of ensured by one insurer.

The priori estimate of the risks in insurance for no life, is difficult ; it is obvious that all the policy-holders are not equal in front of the risk. Thus the insurers were brought to introduce systems of modification of the premium a posteriori "bonus-malus systems".

The object of this work is to present and compare the bonus-malus systems for the following laws: Poisson-Gamma and Poisson-Gamma random effect.

Keywords: Counting Process, Mixed Poisson, Bonus-Malus Systems.

^{*} Maître de conférences classe A à École Nationale Supérieure de Statistique et d'Économie Appliquée - Algérie.

^{**} Maître de conférences classe A à École Nationale Supérieure de Statistique et d'Économie Appliquée - Algérie.

Résumé: L'assurance est une opération par laquelle l'assureur s'engage à payer une prestation en cas de réalisation d'un événement incertain prédéfini moyennant le paiement d'une prime par l'assuré.

Un problème primordial auquel les compagnies d'assurances sont confrontées, est la détermination de la prime relative à un contrat d'assurance. Un contrat d'assurance est une prise en charge d'un risque de l'assuré par un assureur.

L'estimation a priori des risques, en assurance non vie, est difficile ; il est évident que tous les assurés ne sont pas égaux devant le risque. Donc les assureurs ont été amenés à introduire des systèmes de modification des primes a posteriori "systèmes bonus-malus".

L'objet de ce travail est de présenter et de comparer les systèmes de bonus-malus pour les lois suivantes: loi de Poisson-Gamma et loi de Poisson-Gamma à effet aléatoire.

Mots-clés : Processus de comptage, Poisson-mélange, Système de bonus-malus.

1. Introduction

Les systèmes bonus-malus sont fréquemment utilisés en assurance automobile. Ils ont pour fonction de répartir plus équitablement les coûts entre les bons et les mauvais risques.

L'analyse des systèmes de bonus-malus conduite par les actuaires repose sur l'estimation des lois du nombre d'accidents individuels, pour l'ensemble de la collectivité d'assurés.

L'introduction de tel système en assurance RC auto se justifie principalement par le fait que le nombre N de sinistres déclarés par un assuré dans une période donnée (l'année) ne suit pas une loi de Poisson simple. Cela conduit naturellement à traduire la diversité des assurés en supposant que N suit une loi de Poisson mélange (Poisson-Gamma)

L'objet de notre travail consiste à modéliser le risque d'accident en s'appuyant sur les techniques qui n'ont pas encore été utilisées en Algérie. Sur ce sujet, alors que des résultats sont déjà disponibles en France et au Canada (D.Richaudeau 1997; G.Dionne, C.Vanesse 1989).

Ces techniques utilisent des données individuelles et, en particulier, une variable dépendante dont la valeur est le résultat du dénombrement des réalisations d'un certain événement, ici le nombre d'accidents.

2. Modélisation de la fréquence des sinistres

Dans cette section, nous proposons plusieurs distributions généralement utilisées pour modéliser la survenance d'accidents. La plupart d'entre-elles sont de type Poisson mélange qui présentent l'avantage de mieux appréhender l'hétérogénéité naturellement présente dans un portefeuille d'assurés représentant ainsi de manière satisfaisante l'éventail des comportements au volant des différents types de conducteurs.

2.1. Distribution de Poisson simple : Portefeuille homogène

La distribution de Poisson est souvent utilisée pour la description des événements indépendants tels que les accidents automobiles.

Soit la variable aléatoire N_i représentant le nombre d'accidents sur une période pour un individu i alors la distribution de N_i est donnée par:

$$p_{\lambda}(n) = P_{\lambda}(N_i = n) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

Où n est la réalisation de la variable aléatoire N_i pour l'individu i sur une période donnée et λ est un paramètre inconnu à estimer¹. λ est le nombre moyen des accidents par période (la variance étant aussi égal à λ)

La formulation précédente (1) présente deux inconvénients. D'une part, le modèle repose sur une hypothèse d'indépendance entre les événements successifs, et d'autre part l'espérance et la variance de N_i sont égales, ce qui implique que chaque individu a le même risque moyen. Ces deux propriétés ne correspondant pas aux observations réalisées sur les accidents de la route.

2.2. Distribution de Poisson mélange : Portefeuille hétérogène

Nous supposons ici que les assurés ne sont pas tous égaux devant le risque. Le comportement des assurés est hétérogène et justifie l'introduction d'un système bonus-malus.

L'introduction de tel système en assurance RC auto se justifie principalement par le fait que le nombre N de sinistres déclarés par un assuré dans une période donnée (l'année) ne suit pas une loi de Poisson

¹ Le paramètre λ peut être estimé par la méthode des moments ou par la méthode du maximum de vraisemblance.

simple. Cela conduit naturellement à traduire la diversité des assurés en supposant que N suit une loi de Poisson mélange² caractérisée par

Ces choix se justifient plus pour des raisons de facilité mathématique que pour des objectives liées aux observations. En effet, l'observation porte sur le nombre de sinistres déclarés sur une période de temps (l'année en pratique).

$$p_k = P(N_i = n) = \int_0^{+\infty} p_\lambda(n) dU(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} dU(\lambda), n \in \mathbb{N}$$

3. Système de bonus-malus

Depuis leur introduction il y a quelques années, les clauses de bonus-malus constituent un élément important de la tarification en assurance automobile.

Le principe de ces clauses est d'une part d'offrir une diminution de prime aux assurés n'ayant déclaré aucun accident responsable, et d'autre part de pénaliser les assurés accidentés en fonction du nombre de leurs accidents.

3.1 La prime de Bayes

Soit un risque dont la fréquence annuelle des accidents est distribuée selon une loi de Poisson-mélange. Si pour tout j entier on désigne par N_i^j cette fréquence pour la j^{eme} année de la i^{eme} individu, on dispose de la réalisation $(n_i^1, n_i^2, \dots, n_i^t)$ du variable aléatoire $(N_i^1, N_i^2, \dots, N_i^t)$ correspondant à l'observation de ce risque pendant t années.

La règle optimale du système Bonus-Malus donnera, connaissant l'information sur les t années $(N_i^1, N_i^2, \dots, N_i^t)$ le meilleur estimateur des nombres d'accidents moyen à la période $(t+1)$. Notant cet estimateur par $\tilde{\lambda}_i^{t+1}(N_i^1, N_i^2, \dots, N_i^t)$

La quantité $\tilde{\lambda}_i^{t+1}(N_i^1, N_i^2, \dots, N_i^t)$ (Estimateur de Bayes: l'espérance mathématique a posteriori de λ est donnée par:

$$\tilde{\lambda}_i^{t+1}(N_i^1, N_i^2, \dots, N_i^t) = \int_0^{+\infty} \lambda f(\lambda / N_i^1, N_i^2, \dots, N_i^t) d\lambda$$

² Généralement on fait choix de la fonction U (fonction de structure) pour trouver la loi de X : Lemaire(1995), Dionne-Vanasse(1989) ont choisi la loi gamma pour U .

3.2. L'estimateur de Bayes de la loi Poisson mélange

3.2.1 Poisson-Gamma

En appliquant la loi binomiale négative (Poisson-Gamma)³, la distribution à posteriori de λ est la loi Gamma, de densité :

$$f(\lambda / N_i^1, N_i^2, \dots, N_i^t) = \frac{(\alpha + t)^{r + \tilde{N}_i} \lambda^{r + \tilde{N}_i - 1} e^{-\lambda(\alpha + t)}}{\Gamma(r + \tilde{N}_i)}$$

$$\text{D'où } \tilde{\lambda}_i^{t+1}(N_i^1, N_i^2, \dots, N_i^t) = \frac{r + \tilde{N}_i}{\alpha + t}$$

$$\text{Où } \tilde{N}_i = \sum_{j=1}^t N_i^j$$

3.2.2 Binomiale Négative à effet aléatoire

Si on suppose, pour l'ensemble des individus, que le paramètre de la loi de Poisson satisfait à la forme $\lambda = \exp(x\beta + \varepsilon)$ où $\exp(\varepsilon)$ suit la loi Gamma de paramètres 1 et 1/a.

Dans ce cas, l'estimateur de Bayes est donnée par l'expression suivante :

$$\tilde{\lambda}_i^{t+1}(N_i^1, N_i^2, \dots, N_i^t; x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^{t+1}) = \bar{\bar{\lambda}}_i^{t+1} \left[\frac{a + \bar{N}_i}{a + \bar{\lambda}_i} \right] \text{ Où}$$

$$\bar{\lambda}_i = \sum_{j=1}^t \bar{\lambda}_i^j, \text{ avec } \bar{\lambda}_i^j = \exp(x_i^j \beta) \text{ et } \bar{N}_i = \sum_{j=1}^t N_i^j$$

³ On suppose, pour l'ensemble des individus, que le paramètre de la loi de Poisson satisfait à une loi Gamma $\mathcal{Y}(r, \alpha)$, de paramètre $\theta = (r, \alpha)$ de densité : $u_\theta(\lambda) = \frac{\alpha^r}{\Gamma(r)} \lambda^{r-1} e^{-\alpha\lambda}$, $\lambda > 0$.

3.3. Estimation des paramètres

3.3.1 Poisson-Gamma

Ce cas particulier détaillé dans (Lemaire, 1985). L'estimateur $(\tilde{r}, \tilde{\alpha})$ de (r, α) est donné par la méthode des moments :

$$\tilde{r} = \frac{\overline{n}^2}{\hat{\sigma}_n^2 - \overline{n}}, \quad \tilde{\alpha} = \frac{\overline{n}}{\hat{\sigma}_n^2 - \overline{n}}$$

3.3.2 Poisson-Gamma à effet aléatoire

La loi binomiale négative (P-G) a pour paramètre a et $\exp(x_i\beta)$ Sa moyenne est $E(N_i) = \exp(x_i\beta)$ et sa variance $V(N_i) = \exp(x_i\beta) \left[1 + \frac{\exp(x_i\beta)}{a} \right]$.

La variance est alors une transformation croissante convexe de la moyenne. La vraisemblance associée à cette loi est concave. La difficulté consiste à calculer les dérivées analytiques de logarithme népérien d'une fonction gamma.

La méthode d'estimation utilisée dans ce paragraphe est l'une des méthodes proposées par C.Gouriéroux (1989).

Méthode des moindres carrés non linéaires : Les estimateurs $\tilde{\beta}$ et $\tilde{a}$ sont obtenus en deux temps. $\tilde{\beta}$ est défini comme solution du problème

de minimisation : $\min_{\beta} \sum_{i=1}^K (n_i - \exp(x_i\beta))^2$

a est alors estimé en utilisant la forme particulière de $V(N_i) = \exp(x_i\beta) + \frac{\exp(2x_i\beta)}{a}$

Notons $\tilde{u}_i = n_i - \exp(x_i\tilde{\beta})$ le résidu d'estimation, a est estimé par le coefficient de régression de $\tilde{u}_i^2 - \exp(x_i\tilde{\beta})$ sur $\exp(2x_i\tilde{\beta})$

i.e

$$\tilde{a} = \left[\sum_{i=1}^K (\tilde{u}_i^2 - \exp(x_i\tilde{\beta})) \exp(2x_i\tilde{\beta}) / \sum_{i=1}^K \exp(4x_i\tilde{\beta}) \right]^{-1}$$

3.4. Analyse empirique

3.4.1 Description de l'échantillon

L'échantillon aléatoire⁴ contient de l'information sur 1000 assurés. Pour chaque assuré, nous connaissons : le nombre des accidents de l'individu ainsi ses caractéristiques (Sexe, Age, Expérience, Code usage, Puissance & Age de véhicule) durant l'année (01; 02; 03).

3.4.1-a Modèle de Poisson-Gamma

L'estimateur $(\tilde{r}, \tilde{\alpha})$ de (r, α) est donné par la méthode des moments :

$$(r = 0.6357, \alpha = 6.325)$$

3.4.1-b Modèle de P-Gamma à effet aléatoire

L'estimation de paramètre α est : $\tilde{\alpha} = 1.236$ et l'estimation de paramètre β est donnée par le tableau suivant :

Tableau 1 : Moindres carrées non linéaires-binomiale négative

Variable	Coefficient	Variable	Coefficient	Variable	Coefficient
SEXM	0.6021	EXP3-5	0.7526	Cod-P3	0.7002
A20-25	0.322	EXP7-9	-0.1403	AGE-V3-4	0.0235
A25-30	0.3912	EXP9-11	-0.4182	AGE-V4-5	0.1374
A30-35	-0.1182	EXP11	-0.3201	AGE-V5-6	0.2102
A35-40	-0.3599	Cod1	0.0985	AGE-V6-7	0.2121
A40-45	-0.5562	Cod2	-0.4910	AGE-V7-8	0.3254
A50-55	-0.6661	Cod3	0.2125		
A55	-0.7103	Cod-P1	1.3524		

⁴ Données obtenues par la SAA

Notant que : SEXM (sexe masculin), A (âge), EXP (expérience), Cod (Code usage), Cod-P (puissance) et AGE-V (âge de véhicule)

Après les tests effectués sur les paramètres ci-dessus, les groupes des classes⁵ retenues sont : Sexe, Age : A20-25 ; A25-40 ; A40, Expérience : EXP3-5 ; EXP5 (plus de 5 ans)

Tableau 2 : Ratio test-binomiale négative

Variable	SEXM	A20-25	A25-40	EXP3-5
Coefficient(β_i)	0.5114	0.2206	0.1005	0.6212

3.4.2 Comparaison des fréquences observées et théoriques Poisson-Gamma :

Tableau 3 : Fréquences observées et théoriques .P-Gamma.

Nombre d'accident	Fréquence observée	Loi de Poisson	Loi de P-Gamma
		Fréquence théorique	Fréquence théorique
0	810	817.09	814.1
1	180	165.05	170
2	8	16.67	15.5
3	2	1.12	0.4
≥ 4	0	0	0
Total	1000	1000	1000
		$\chi^2_c = 4.83$	$\chi^2_c = 2.80$
		$\chi^2_{1;0.95} = 3.84$	$\chi^2_{1;0.95} = 3.84$

La méthode des moments nous conduit à estimer le paramètre λ de la distribution par la moyenne observée. En ajustant la distribution observée par une distribution Poisson de paramètre $\tilde{\lambda} = 0.2020$, nous obtenons des fréquences théoriques très éloignées des fréquences observées.

⁵ la détermination des classes est donnée par le test de rapport du maximum de vraisemblance (Ratio test : LRT) & Wald voir LATRECHE (2007) www.laid3.usthb.dz/road/horizontal/road1507.pdf

Le test χ^2 ($\chi_c^2 = 4.83 > \chi_{1;0.95}^2 = 3.84$) confirme la très mauvaise qualité de l'ajustement, ce qui nous amène à rejeter le modèle. L'hypothèse d'homogénéité du portefeuille ne résiste pas l'analyse. Par contre l'ajustement de la distribution observée par une loi binomiale négative est excellent, car $\chi_c^2 = 2.80 < \chi_{1;0.95}^2 = 3.84$ (les fréquences théoriques sont très proche des fréquences observées)

Binomiale Négative à effet aléatoire

L'ajustement de la distribution observée par une distribution Poisson-Gamma à effet aléatoire est meilleur car

$$\chi_c^2 = 1.51 < \chi_{1;0.95}^2 = 3.84$$

Tableau 4 : Fréquences observées et théoriques P-Gamma à effet aléatoire.

Nombre d'accident	Fréquence observée	Loi de Poisson	Loi de P-Gamma à effet aléatoire
		Fréquence théorique	Fréquence théorique
0	810	817.09	818
1	180	165.05	169
2	8	16.67	10.10
3	2	1.12	2.9
≥ 4	0	0	0
Total	1000	1000	1000
		$\chi_c^2 = 4.83$	$\chi_c^2 = 1.51$
		$\chi_{1;0.95}^2 = 3.84$	$\chi_{1;0.95}^2 = 3.84$

3.4.3 La prime pure a Posteriori (la prime de Bayes)

- **Modèle de Poisson-Gamma** ($\tilde{r} = 0.6357$, $\tilde{\alpha} = 6.325$)

La prime pour l'année $t+1$ est proportionnelle à l'espérance de Bayes de λ : ($\hat{\lambda} = \tilde{r} / \tilde{\alpha} = 0.1005$)

$$\tilde{P}_i^{t+1}(n_i^1, \dots, n_i^t) = 100 \left[\frac{\tilde{r} + \bar{n}}{\tilde{r} + t\hat{\lambda}} \right]$$

Où la prime de base est égale à 100

Tableau 5: Calcul de la prime-Modèle de Poisson-Gamma

$t \backslash \bar{n}$	0	1	2	3	4
0	100				
1	86.35	222.18	358.01	493.85	629.68
2	76.00	114.51	315.01	434.53	554.05
3	67.83	174.53	281.23	387.93	494.63

- **Modèle de Poisson-Gamma à effet aléatoire**

La prime est donnée par (Dionne, G., Vanasse, C. (1989):

$$\tilde{P}_i^{t+1}(n_i^1, \dots, n_i^t, x_i^1, \dots, x_i^{t+1}) = M \frac{\hat{\tilde{\theta}}^{t+1}}{\tilde{\theta}^{t+1}} \left[\frac{\tilde{a} + \bar{n}}{\tilde{a} + \hat{\tilde{\theta}}^{t+1}} \right]$$

Où $\frac{\hat{\tilde{\theta}}^{t+1}}{\tilde{\theta}^{t+1}} = \exp(x^{t+1} \tilde{\beta})$, $\hat{\tilde{\theta}} = \sum_{j=1}^t \exp(x^j \tilde{\beta})$ et la valeur de $M = \frac{100 K}{\sum_i \frac{\hat{\tilde{\theta}}^{t+1}}{\tilde{\theta}^{t+1}}}$

Tableau 6: Calcul de la prime-Modèle de Poisson-Gamma à effet aléatoire

$t \backslash \bar{n}$	0	1	2	3	4
0	215				
1	180	200.12	210.58	255.36	270.00
2	163	178.26	195.28	243.60	259.66
3	140	165.00	184.56	210.11	230.98

- Comparaison des primes

Tableau 7: Calcul de la prime-Modèle de Poisson-Gamma à effet aléatoire (SEXM, A20-25, EXP3-5)

$t \backslash \bar{n}$	0	1	2	3	4
0	215				
1	182	193	200	244.75	283.23
2	161	170	182.17	207.00	243.60
3	143	152	168.03	195.12	210.55

Tableau 8: Calcul de la prime-Modèle de Poisson-Gamma à effet aléatoire (SEXM, A25-40, EXP3-5)

$t \backslash \bar{n}$	0	1	2	3	4
0	215				
1	175	182.21	193.56	210.06	254.31
2	152	161.29	177.00	188.64	220.22
3	139	147.02	163.25	181.94	199.97

Dans le tableau 7 la prime estimée, pour un homme entre 20 et 25 ans, ayant pour expérience de conduite entre 3 et 5, pour $(t=1, \bar{n}=2)$ est 200

Dans le tableau 8 la prime estimée, pour un homme entre 25 et 40 ans, ayant pour expérience de conduite entre 3 et 5, pour $(t=1, \bar{n}=2)$ est 193.56. Ceci explique l'effet de changement d'âge sur la prime dans le tableau 7.

Conclusion :

Les principales conclusions qui se dégagent de notre analyse pour ce travail sont les suivantes :

- Nos résultats montrent, que le modèle de Poisson-Gamma (ainsi pour le modèle Binomiale négative à effet aléatoire) que la prime ne dépend que du nombre total d'accident sur les t années, et non de leur séquence.
- Le nombre d'observations étant très important, le test du χ^2 rejette l'ajustement par la loi de Poisson.
- Le système bonus-malus pour le modèle Binomial Négatif est optimal c'est-à-dire :

a/ Il est équitable ; il fait payer à chacun à tout moment une prime proportionnelle à sa fréquence propre estimée $\left[\frac{\tilde{r} + \bar{n}}{\tilde{r} + t} \right]$

b/ Financièrement équilibre ; la moyenne des fréquences individuelles des sinistres est égale à la moyenne générale

$\left[\frac{\tilde{r}}{\tilde{\alpha}} \right]$. En d'autres termes, le montant perçu par la compagnie est stationnaire⁶. Mais pour le modèle à effet aléatoire ne l'est pas.

- Dans le tableau 5 la prime estimé, pour $(t=1, \bar{n}=2)$ est 358.01 et dans le tableau 6 la prime estimé pour $(t=1, \bar{n}=2)$ est 210.58. Ceci explique l'effet de changement de la loi à priori sur la prime

Plusieurs extensions à cette étude sont possibles. Une première consisterait à généraliser le modèle par le modèle de Poisson-Gamma Généralisé.

Une deuxième extension serait l'étude de la tarification a posteriori dont les paramètres de la loi a priori sont en fonction du temps (c'est-à-dire l'estimation des paramètres pour chaque période)

⁶ Pour plus de détails voir [7]

Bibliographie

- [1] ACHER, J. (1985). Analyse de la Survenance des Sinistres en Assurance Automobile, Système de Bonus-Malus. Journal de la Société de Statistique de Paris, tome 126, No 2, 55-62.
- [2] BESSON, J.L, PARTRAT, C (1992): Trend et systèmes de bonus-malus. Astin bulletin, vol. 22, No 1, 1992
- [3] DENUIT, M., CHARPENTIER, A. (2005). Mathématiques de L'assurance Non-Vie, Tome2 : Tarification et Provisionnement. Ed. Economica.
- [4] DIONNE. G, C.VANASSE (1989): A généralisation of Automobile Insurance Rating Models: The Negative Binomial Distribution With a Regression component. Astin Bulletin, 19, pp199-212
- [5] GOURIEROUX, C (1989). Économétrie des variables qualitatives, Economica.
- [6] LATRECHE, A. (2007). Estimation de la probabilité d'accident par le modèle Probit dans le cas de l'assurance automobile (Une étude empirique). Les Annales ROAD du Lab LAID3, no 15
- [7] LEMAIRE, J. (1995). Bonus-Malus Systems In Automobile Insurance. Kluwer Academic Publisher, Boston.
- [8] RICHAUDEAU, D (1997). Modélisation du risque d'accident automobile. Cahier de recherche (LAMIA) Paris, pp1 17

