

Modélisation d'un phénomène financier irrégulier par le mouvement Brownien fractionnaire.

Aboulkacem CHIKH SALAH^(*), Abdelouahab LATRECHE^(**)

École National Supérieur de Statistique et d'Economie Appliquée
11, Chemin Doudou Mokhtar Ben Aknoun, Alger, Algérie.

* *okaci2010@yahoo.fr*, ** *latreche_abdelouahab@hotmail.com*.

Résumé : L'objectif de cet article est de faire une synthèse des différents résultats et techniques statistiques, de modélisation du phénomène financier irrégulier avec le mouvement Brownien fractionnaire ; un processus Gaussien centré caractérisé par l'indice d'auto-similarité de Hurst H . Ce processus Brownien tient compte des effets de longue mémoire ; une propriété de persistance qui s'adapte mieux à l'analyse de certains indices financiers. Dans la partie d'application : quelques méthodes de simulation de la trajectoire du mouvement Brownien fractionnaire sont présentées, et une modélisation Brownienne fractale du taux de change est élaborée.

Mots-clés : Processus Gaussien, mouvement Brownien fractionnaire, auto-similarité, dépendance à long term, simulation de trajectoire, modélisation du taux de change.

AMS subject classification (2000) : 60G10, 60G18, 62M09, 65C30.

1 Introduction

L'étude des phénomènes irréguliers a pris une place très importante dans beaucoup de domaines scientifiques. Les spécialistes de ces domaines font souvent appel aux mathématiciens, pour leur fournir des modèles permettant des calculs simples, et qui soient proches des expériences. Un vaste problème en finance est de quantifier l'irrégularité d'un phénomène (évolution du cours d'une action en Bourse, séries chronologiques financières, .. etc.) de manière à la fois

précise et efficace. Les phénomènes financiers possèdent souvent, et contrairement au mouvement Brownien (BM) standard, une propriété de dépendance de leurs accroissements. Les statisticiens ont été contraints à abandonner les modèles fondés sur la linéarisation ou, plus généralement, le calcul différentiel classique. Peltier (13)(1998).

Mandelbrot, avec ses travaux en Finance, met en évidence la dépendance à long terme. Il a proposé avec Van Ness en (11)(1968) un modèle Gaussien à accroissements à dépendance à long terme, en introduisant la notion fractale; théorie géométrique largement utilisée dans (10)(1984), le mouvement Brownien fractionnaire (FBM). Cette famille de processus rentre dans le cadre des processus Gaussien centrés, ce qui simplifie la description de sa loi, car il suffit de déterminer sa dispersion pour définir complètement le modèle.

2 Définitions et propriétés

2.1 Mouvement Brownien fractionnaire

Un FBM de paramètre $H \in (0, 1)$ est un processus Gaussien réel centré noté $\{B_t^H : t \in \mathbb{R}\}$, défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, à une trajectoire continue, issue de 0 ($B_0^H = 0$) et vérifiant :

- $\mathbb{E}[(B_t^H)^2] = |t|^{2H}, \forall t \in \mathbb{R}$. Le processus $B^{\frac{1}{2}}$ correspond à un BM standard.
- B^H à accroissements stationnaires, pour $s, t \in \mathbb{R} : B_t^H - B_s^H = B_{t-s}^H$.
- Le fonction de covariance du FBM (de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}), est symétrique, semi-définie positive et définie par :

$$R_H(s, t) = \mathbb{E}[B_t^H B_s^H] = \frac{1}{2}(|s|^{2H} + |t|^{2H} - |t - s|^{2H}). \quad (1)$$

- Le FBM de paramètre H est autosimilaire d'ordre $H \in (0, 1) : \{B_{\alpha t}^H : t \in \mathbb{R}\}$ et $\{\alpha^H B_t^H : t \in \mathbb{R}\}$ sont deux processus Gaussiens, centrés de la même fonction de covariance (loi invariante par changement d'échelle). Voir Savy (15) (2003).

2.2 Bruit Gaussien fractionnaire

Les accroissements $\{Y_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ du FBM B_t^H sont définis pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $s, t \in \mathbb{R}$ et $H \in (0, 1)$, par : $Y(n) = B^H(n+1) - B^H(n)$. Le processus des accroissements, appelé *bruit Gaussien fractionnaire* (FGN); il constitue une série chronologique stationnaire, et suit une loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. On appelle σ le facteur d'échelle de processus $B^H(t)$. Si $\sigma^2 = 1$, le processus B^H est appelé FBM standard. Dans une version continue du FBM, on a pour $t \in \mathbb{R}$:

$$B^H(t+h) - B^H(t) \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2 h^{2H}). \quad (2)$$

2.3 Processus à longue mémoire

Étant donné un processus $\{X_t, t \in \mathbb{R}\}$, la suite $\{r(n) = \mathbb{E}[X_{n+s}X_s, n \in \mathbb{N}^*]\}$ ne dépend pas de s . On dit que X est à dépendance à long terme si : $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \gamma(n) = +\infty$.
On dit que B_t^H est à dépendance à long terme si :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \gamma(n) = \mathbb{E}[Y(0)Y(n)] = \frac{1}{2}[(n+1)^{2H} - 2n^{2H} + (n-1)^{2H}] = +\infty. \quad (3)$$

Ceci implique que, les accroissements du FBM sont à *dépendance à long terme* si et seulement si $\frac{1}{2} < H < 1$. On dit aussi qu'ils sont *positivement corrélés*. La propriété de longue mémoire peut se traduire par des comportements de persistance au niveau des données. En présence de la propriété de longue mémoire dans un phénomène, les données restent corrélées longtemps. Voir Beran (1) (1994).

2.4 Représentation du FBM

On propose, dans cette section, une représentation intégrale du FBM par rapport à un BM ordinaire. Cette représentation fait le lien entre le BM classique, riche en propriété, et le FBM beaucoup plus pauvre (propriété non Markovienne). Voir Samorodnitsky et Taqqu (14) (1994). Soit $0 < H < 1$, B un BM ordinaire ; une représentation intégrale du FBM est donnée par l'intégrale stochastique suivante :

$$B^H(t) = c \int w^H(t, u) dB(u), \quad (4)$$

où $c > 0$, $H \in (0, 1)$ et $w^H(t, u)$ une fonction qui peut prendre trois formes : pour $u \geq t$, $w^H(t, u) = 0$; pour $0 \leq u < t$, $w^H(t, u) = (t-u)^{H-\frac{1}{2}}$ et pour $u < 0$, $w^H(t, u) = (t-u)^{H-\frac{1}{2}} - (-u)^{H-\frac{1}{2}}$. Voir Mishura (12) (2008).

3 Modélisation d'un FBM

Lors de l'application d'un modèle FBM à un cas concret, il convient dans un *premier temps* de se soucier du caractère géométrique fractal des trajectoires. Des méthodes ont déjà été proposées pour s'assurer de l'adéquation entre le modèle FBM et les trajectoires réelles : Jennane et al. (7) (1996)

Dans un *deuxième temps*, il est nécessaire d'estimer le paramètre de Hurst H . Il existe de nombreuses approches qui permettent de réaliser cette tâche. Une synthèse sur ce sujet peut se trouver dans Jennane et al. (2001) (8). La méthode la plus utilisée pour estimer H , en disposant des observations d'un échantillon $\{X_H(\frac{kT}{n}), 0 \leq k \leq n\}$ de $\{X_H(t), 0 \leq t \leq T\}$, est basée sur l'analyse de Hurst (voir Hurst (6) (1955)). Toutefois, ses performances sont loin d'être optimales et, depuis l'introduction de cette méthode, plusieurs autres approches

ont été proposées pour H , dont ils ont été distinguées en cinq : méthodes spectrales, méthodes de maximum de vraisemblance, méthode de décomposition en ondelettes, méthodes temporelles, et méthodes basées sur les propriétés de la géométrie fractale.

4 Applications

4.1 Simulation de la trajectoire du FBM

On note B_H le FBM standard discrétisé aux instants i/N , avec $i = 0, \dots, N-1$. Généralement, les méthodes de simulation de la trajectoire du B_H peuvent se distinguer, suivant leurs approches, en deux :

- Simulation directe du FBM, en tenant compte l'une de ses différentes représentations.
- Simulation du processus des accroissements (FGN), après la discrétisation de la trajectoire en N instants ; le FBM est généré par les sommes cumulées aux instants i/N du FGN.

On s'est basé sur une étude de Coeurjolly (4) (2000) ; une étude qui a mis en évidence une procédure pour juger la qualité de l'approximation de la trajectoire du FBM, pour extraire les méthodes qui rassemblent les plus performantes. On a conclu que les méthodes les plus stables (en matière d'algorithme) sont : la méthode de Choleski (de la première approche) et la méthode de Wood et Chan (de la deuxième). Voir Wood et Chan (5) (1994).

4.1.1 Simulation d'un vecteur aléatoire Gaussien :

La simulation informatique au hasard a de multiples applications ; théoriquement, la génération de nombres aléatoires suivant une loi donnée se ramène à la génération de suites de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $]0, 1[$.

La plupart des logiciels ou les langages de programmation possèdent un générateur de nombres pseudo-aléatoires ayant une distribution U uniforme sur $]0, 1[$. On cherche donc une fonction transformant ces nombres. Pour simuler des variables Gaussiennes centrées réduites, on prend la fonction réciproque $\Phi^{-1}(U)$ de la fonction de répartition de la variable aléatoire uniforme sur $]0, 1[$. Cependant, cette méthode ne permet pas de connaître l'expression analytique de Φ et de Φ^{-1} , et l'inversion numérique est assez coûteuse.

En revanche, Box et Muller (1958) dans (2) fournissent l'algorithme suivant : si U_1 et U_2 sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi uniforme sur $]0, 1[$, alors les variables aléatoires

$$X := \sqrt{(-2 \ln U_1)} \cos(2\pi U_2) \quad \text{et} \quad Y := \sqrt{(-2 \ln U_1)} \sin(2\pi U_2).$$

sont indépendantes, de même loi $\mathcal{N}(0,1)$ et les variables aléatoires : $X' := \mu + \sigma X$, $Y' := \mu + \sigma Y$ sont indépendantes, et suivent la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Pour *simuler un vecteur aléatoire Gaussien* $X = (X_1, X_2, \dots, X_N)$ à valeurs dans \mathbb{R}^N , caractérisé par le vecteur de moyenne m et par la matrice de variance-covariance Γ (matrice carrée d'ordre N , symétrique définie positive), on suit les étapes suivantes :

- On génère un vecteur aléatoire Z à N composantes Gaussiennes centrées réduites et indépendantes. Z a pour moyenne le vecteur nul et pour matrice de variance-covariance la matrice d'identité de taille N .
- On écrit la matrice de covariance Γ sous la *factorisation de Choleski* : $\Gamma = LL^t$, où L est une matrice triangulaire inférieure (la racine carrée de la matrice de covariance Γ).
- Le vecteur $X = m + LZ$ suit une loi normale multidimensionnelle (de taille N) de moyenne m et de variance-covariance Γ . LZ est un vecteur Gaussien centré, et

$$\mathbb{E}[(LZ)(LZ)^t] = \Gamma.$$

4.1.2 Méthode de Choleski :

Soit Γ la matrice de covariance de B_H standard, telle que pour $i, j = 0, \dots, N-1$

$$(\Gamma)_{i,j} = \Gamma\left(\frac{i}{N}, \frac{j}{N}\right) = \begin{cases} \text{cov}(B_{\frac{i}{N}}, B_{\frac{j}{N}}) & \text{si } i \neq j \\ \text{var}(B_{\frac{i}{N}}) & \text{si } i = j \end{cases}$$

Il est clair que Γ est une matrice symétrique définie positive ou semi-définie positive, donc elle admet *une décomposition de Choleski*.

On simule la trajectoire du FBM aux instants $1, \dots, N-1$, car par définition, le FBM est issu de 0 ($B_0 = 0$). On prend la matrice $\Gamma_{N,N}$ privée de sa première ligne et de sa première colonne, et on la note $\Gamma'_{N-1, N-1}$, $\mathbb{E}(B_H(t)B_H(0)) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$. Simuler une trajectoire discrétisée d'un FBM aux instants i/N pour $i = 1, \dots, N-1$ revient alors à générer un vecteur Z de $(N-1)$ variables aléatoires indépendantes Gaussiennes standards.

D'après le dernier paragraphe de la section 4.1.1, on voit clairement que le vecteur LZ est un vecteur Gaussien centré, et représente la trajectoire du FBM aux instants $1, \dots, N-1$, tel que L est une matrice triangulaire inférieure (la racine carrée de la matrice de covariance Γ'). Le vecteur $B_H = (0, (LZ)^t)^t$ définit la trajectoire du FBM, simulée par *la méthode de Choleski*.

4.1.3 Méthode de Wood et Chan :

Cette méthode se base sur la simulation d'un vecteur X qui désigne les composantes d'un FGN simulé aux instants i/N , $i = 0, \dots, N-1$. On note par G

la matrice de covariance de processus X , c'est-à-dire, la matrice d'autocovariance du FBM B_H , telle que :

$$(G)_{i,j} = \mathbb{E}(X(i/N)X(j/N)) = \gamma\left(\frac{j-i}{N}\right), \quad i, j = 0, \dots, N-1.$$

Ceci implique que :

$$\mathbb{E}(B(i/N)B(j/N)) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N (G)_{i,j} = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \gamma\left(\frac{j-i}{N}\right), \quad i, j = 1, \dots, N-1.$$

Pour simuler le vecteur Gaussien X , on cherche la racine carrée de la matrice de covariance G , et pour la trouver, on fait intervenir une *matrice circulante* C . L'idée de la méthode de Wood et Chan est de plonger G dans une *matrice circulante* C de dimension m (plus grande que N); une matrice carrée dans laquelle, on passe d'une ligne à la suivante par permutation circulaire (décalage vers la droite) des coefficients. On effectue cette extension C (de G), car les systèmes circulants peuvent être résolus très efficacement par la transformée de Fourier rapide (*FFT : Fast Fourier Transform*). Voir Rjasanow (16) (1994).

La matrice C est circulante symétrique définie positive de taille $m = 2^g$, $g \in \mathbb{N}^*$. Cette taille a été choisie de telle sorte que l'exécution de l'algorithme soit rapide. On donne la matrice C par

$$C = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_{m-1} \\ c_{m-1} & c_0 & c_1 & & c_{m-2} \\ c_{m-2} & c_{m-1} & c_0 & & c_{m-3} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_0 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad c_j = \begin{cases} \gamma\left(\frac{j}{N}\right) & \text{si } 0 \leq j < \frac{m}{2}, \\ \gamma\left(\frac{m-j}{N}\right) & \text{si } \frac{m}{2} < j < m-1. \end{cases}$$

Générer le vecteur $X = (X_0, \dots, X_{N-1})^t \stackrel{\mathcal{L}}{\underline{=}} \mathcal{N}(0, G)$ revient à la génération du vecteur $X' = (X_0, \dots, X_{m-1})^t \stackrel{\mathcal{L}}{\underline{=}} \mathcal{N}(0, C)$.

La matrice C est diagonalisable dans la base de Fourier, c'est-à-dire, il existe une matrice D , telle que $C = PDP^{-1}$, où D est une matrice diagonale (de valeurs propres d_j), et P est la matrice unitaire des vecteurs propres à valeurs complexes. On peut dire que $C = PD^{1/2}D^{1/2}P^{-1}$, telle que

$$D^{1/2} = \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{d_2} & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{d_m} \end{pmatrix}.$$

La matrice de la racine carrée de C est donc la matrice $L = PD^{1/2}P^{-1}$.

Le vecteur du FGN (recherché) est le vecteur $X' = LZ = PD^{1/2}P^{-1}Z$, tel que $X' \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}(0, C)$, et Z est un vecteur aléatoire simulé au hasard : $Z \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}(0, I_m)$. (Voir la section 4.1.1). Les N premières composantes du vecteur X' constituent le vecteur du FGN X .

Sur le plan algorithmique, on suit les procédures suivantes pour construire le processus du FGN :

1. On calcul les valeurs propres de C , en utilisant la transformée de Fourier rapide, par la forme matricielle suivante :

$$d_k = \sum_{j=0}^{m-1} c_j \exp\left(-2i\pi \frac{jk}{m}\right) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j \exp\left(2i\pi \frac{jk}{m}\right), \quad \text{pour } k = 0, \dots, m-1.$$

2. On simule la partie $P^{-1}Z = W$ (Gaussienne) de X' , en la décomposant en partie réelle et imaginaire, par les deux sous-étapes suivantes :
 - 2.1 Générer U, V deux variables aléatoires Gaussiennes standards, et écrire $W_0 = U$ et $W_{\frac{m}{2}} = V$.
 - 2.2 Générer U_j, V_j deux variables aléatoires Gaussiennes standards pour tout $1 \leq j \leq \frac{m}{j}$, et écrire les autres composantes de W

$$\begin{aligned} W_j &= \frac{1}{\sqrt{2}}(U_j + iV_j) \\ W_{m-j} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(U_j - iV_j). \end{aligned}$$

3. On construit le vecteur X' , en écrivant la forme matricielle de $PD^{1/2}W$:

$$X' \left(\frac{k}{N} \right) = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{j=0}^{m-1} \sqrt{d_j} W_j \exp\left(-2i\pi \frac{jk}{m}\right), \quad \text{pour } k = 0, \dots, m-1.$$

4. On utilise, encore une fois, la transformée de Fourier rapide inverse pour trouver le vecteur X' , et ses N premières composantes constituent le vecteur X .

On fait l'approximation du FBM par la somme cumulée des composantes de processus des accroissements X :

$$\begin{aligned} B_H(0) &= 0 \quad (\text{par définition}) \\ B_H(i/N) &= \sum_{k=0}^i X(k/N), \quad i = 1, \dots, N-1. \end{aligned}$$

Cette méthode, méthode de Wood et Chan, existait pour une grande classe de processus Gaussiens stationnaires ; elle a été introduite et améliorée par Wood et Chan dans (5) (1994). Pour l'ensemble de cette partie, voir Coeurjolly (4) (2000).

4.1.4 Exemples :

- La figure 1 représente une simulation d'un FGN de taille $N = 1000$, discrétisée aux instants $k/1000$ avec $k = 1 : 1000$, généré par la méthode de Wood et Chan, pour un paramètre d'autosimilarité de Hurst $h = 0,3$.

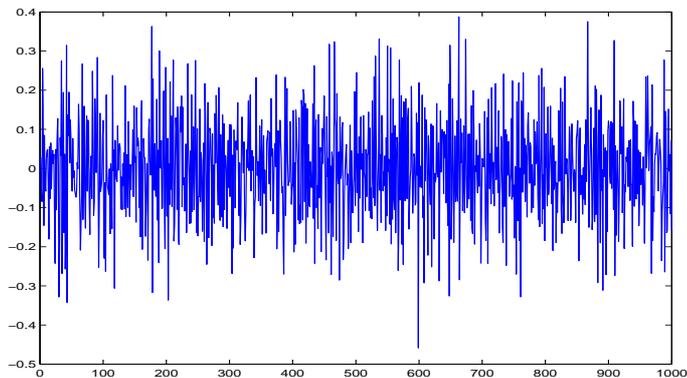


FIG. 1 – Simulation d'un FGN par la méthode de Wood and Chan

- La figure 2 représente une simulation d'une trajectoire de taille $N = 1000$ discrétisée aux instants $k/1000 : k = 1 : 1000$, d'un FBM (correspondant au bruit 1), généré par la méthode de Wood and Chan pour un paramètre d'autosimilarité de Hurst $h = 0,3$.
- Dans les figures 2, 3 et 4 sont trois trajectoires d'un FBM simulés par la méthode de Choleski. Elles sont représentées pour différentes valeurs de paramètre de H . Cette valeur caractérise la forme fractale des graphiques comme suit : plus H est petit dans $]0, 1[$ plus l'irrégularité de la trajectoire est grande, et plus H augmente plus le graphe devient lisse.

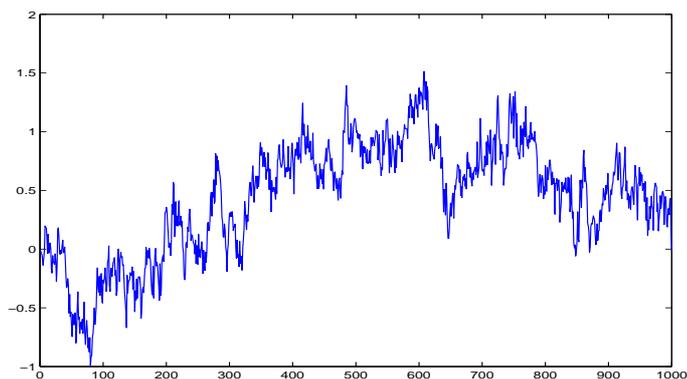


FIG. 2 – Simulation d'une trajectoire FBM, $H = 0.3$

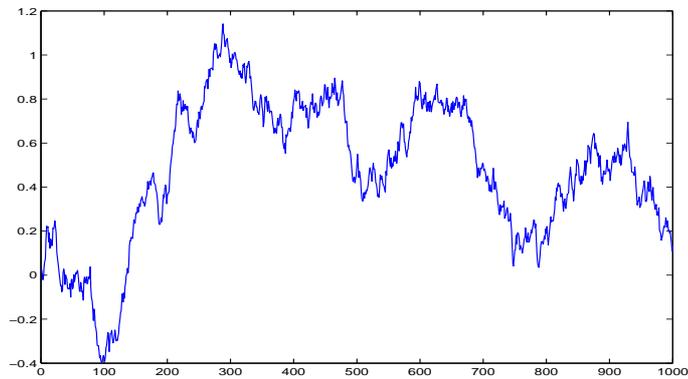


FIG. 3 – Simulation d'une trajectoire FBM, $H = 0.5$ (BM classique)

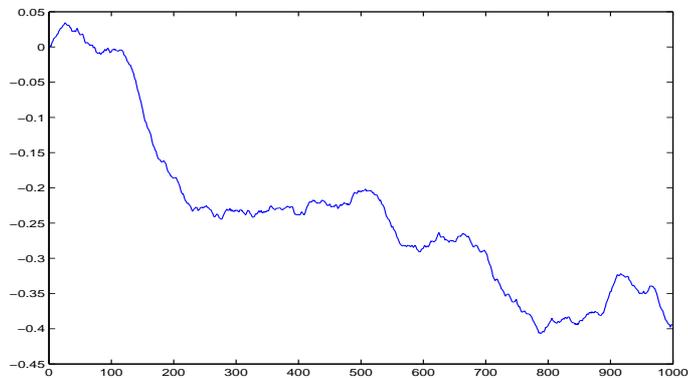


FIG. 4 – Simulation d'une trajectoire FBM, $H = 0.9$

- La propriété d'ausimilarité est présente dans les figures 2, 3 et 4 ; l'irrégularité est semblable de dimension $H = 0,3$, $H = 0.5$ et $H = 0.9$.
- La propriété de la langue mémoire est présente dans la figure 4 ; une trajectoire d'un FBM caractérisé par $H = 0.9 > 0,5$.

4.2 Modélisation d'une série du taux de change par le FBM

L'étude menée dans cette application porte sur le taux de change quotidien entre le dollar canadien (CAD) et le dollar américain (USD) ; du début de mars 2002 à la fin de février 2009. La fréquence de données est quotidienne et l'échantillon est de taille 1756 jours (observations).

4.2.1 Étude descriptive du taux de change :

On représente les variations quotidiennes de la paire CAD/USD par le graphique 5.¹ Les graphes montrent que le taux de change CAD/USD varie d'une

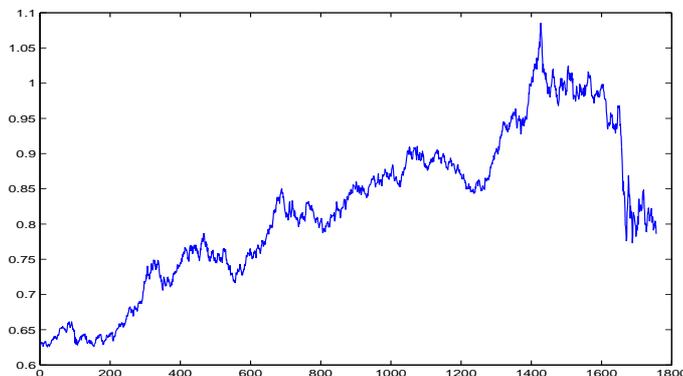


FIG. 5 – Représentation du taux de change quotidien

façon très rapide et marque une aspérité. On peut distinguer *deux phases* : *une première phase d'allure croissante de début de mars 2002 jusqu'au novembre 2007, et une seconde phase de décroissance après cette période*. Pour l'ensemble de la période des sept ans étudiées, on enregistre une moyenne journalière de 0,8200, une dispersion de 0,0122 et une augmentation de 0,1581 (soit 25,18%).

Il est clair que le taux de change du dollar canadien par le dollar américain ne cesse globalement d'évoluer du 01/03/2002 jusqu'au 06/11/2007, avec un pic de 1,0852 : 1 CAD = 1,0852 USD (soit 72,83% d'augmentation), mais si on suit cette progression en détail, on note plusieurs remarques :

- Un niveau plus bas (une chute historique du dollar canadien) est enregistré le 01/04/2002 avec un taux de change 0,6255 (soit 62,55 cents) ; une diminution de 0,38% par rapport au premier jour observé.
- Une pose de stabilité relative durant quelques mois, en plusieurs reprises ; comme celle qui est vécue entre mai et novembre 2002, ou entre janvier et mars 2007.
- Une croissance brutale entre le mi-mai et le début de novembre 2007 (deuxième semestre de 2007), où le taux de change a atteint sa valeur extrême, avec une variation de 0,1793 (soit 19,80% d'augmentation) en quelques mois.

Dans *la deuxième phase* étudiée, qui se trouve entre le 06/11/2007 et la fin de février 2009, on voit clairement une décroissance dans l'allure des graphes. Elle

¹Tous les calculs, les simulations et les représentations graphiques de ce chapitre sont réalisées par des fonctions développées et exécutées par l'environnement de programmation Matlab.

était légère : de 1,0852, le début de novembre 2007 jusqu'au 0,9598, le début d'août 2008, avec une parité relative durant le mois de décembre 2007. Puis, subitement on note une baisse à 0,7759 vers la fin d'octobre 2008 (une décroissance de 19.16% dans une période de moins de trois mois). Après cette diminution, on enregistre une stabilité autour du taux de change d'un CAD par 0,8126 USD, jusqu'à la fin de février 2009.

Pour interpréter ses observations, on doit d'abord mettre en évidence que la relation entre le taux de change, l'économie et la politique monétaire est complexe et relative. Les changements économiques et sociopolitiques des deux pays et du monde jouent sur la relation, comme plusieurs facteurs extérieurs de l'opération financière peuvent jouer. La série a été choisie de telle sorte que quelques nouveaux facteurs financiers entrent en jeu à partir du début de l'année 2002, entre autre, la mise en circulation les pièces et les billets de l'Euro, et le niveau du dollar canadien qui était le niveau le plus bas, jamais atteint dans l'histoire. Dans *la première phase*, quand on voit le dollar canadien continuer à s'apprécier du début de 2002 jusqu'à la fin de 2007 ; ce n'est pas forcément que la monnaie canadienne qui hausse, mais bien la devise américaine qui s'est dépréciée. Ce recul peut s'expliquer par : l'effet de la crise des sub-primes, des déficits jumeaux (double déficit²) des États-Unis et par la baisse des taux de la Réserve Fédérale des États-Unis (FED). La devise américaine a baissée au point où un CAD vaut 1,0852 USD (1 Euro vaut 1,45 USD) le début novembre 2007. En réalité, la crise des sub-primes s'est déclenchée avec le krach des prêts immobiliers hypothécaires aux États-Unis, qui s'est transformée en crise financière mondiale à partir de la fin de l'été 2007 ; ce krach se manifeste clairement dans le graphique, au deuxième semestre de 2007. Ainsi, il y avait l'impact de l'Euro qui commençait à jouer un rôle de monnaie internationale, et qui contribuait au recul du USD ; par exemple : quelques pays acceptent désormais la monnaie européenne comme paiement pour son pétrole, avec une progression de l'utilisation de cette monnaie au chapitre des emprunts internationaux. Ceci provoque une baisse de la demande du dollar américain comme monnaie d'échange. On peut ajouter aussi, comme élément d'analyse, l'évolution de la politique de développement canadienne en faveur de l'emploi et du tourisme.

L'Euro a été la deuxième monnaie au monde pour les transactions, derrière l'USD. La dégradation sans précédente du USD lui permet, et depuis la fin de 2006, d'être la première monnaie au monde pour la quantité de billets en circulation. Ceci a rééquilibré un petit peu la devise américaine dans *la deuxième phase*. En raison de la persistance des troubles conjoncturels, les deux dollars ont été en parité le mi-juillet 2008, au moment où la monnaie américaine a atteint son record historique face à l'euro ($1 = 1,6038$). Depuis cette date, l'USD remonte et le taux de change de la paire CAD/USD se stabilise autour de $1 = 0,8100$ (euro/dollar autour de $1 = 1,45$). Les éventualités mondiales

²désignent la situation d'un pays enregistrant en même temps : un déficit public et un déficit de sa balance courante, c'est-à-dire, une situation dans laquelle les dépenses des administrations publiques excèdent leurs revenus (le solde des finances publiques est alors négatif), et où les importations de biens et de services sont supérieures aux exportations.

économiques varient rapidement et deviennent d'une phase instable entourée par la crise financière mondiale.

La persistance entre les deux dollars suppose la dépendance entre ses variations quotidiennes, et les fluctuations rapides aperçues dans la courbe 5 conduit à une supposition de la possibilité de modéliser ce phénomène financier par un processus Brownien fractal.

4.2.2 Identification par le FBM :

Dans un FBM, les accroissements doivent suivre une loi Gaussienne de moyenne zéro, tel qu'il existe $\sigma > 0$ satisfaisant, pour $t \geq 0$ et $h \geq 0$,

$$B^H(t+h) - B^H(t) \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2 h^{2H}).$$

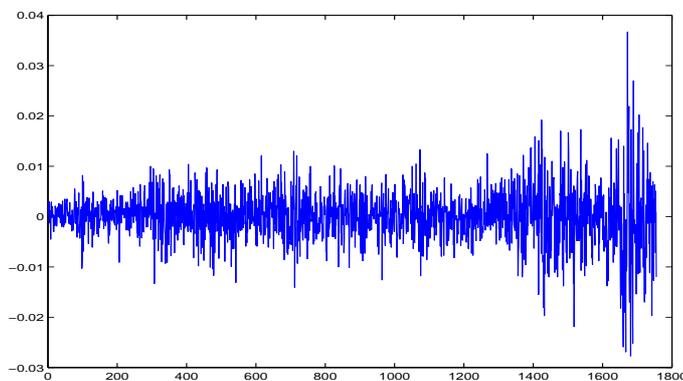


FIG. 6 – Graphique des accroissements de la série des observations

4.2.3 Normalité des accroissements :

Les accroissements $\{Y_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ du FBM B_t^H sont définis pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par :

$$Y(n) = B^H(n+1) - B^H(n). \quad (5)$$

Le vecteur des accroissements des observations du taux de change CAD/USD est calculés en utilisant l'expression 5, et le graphique 6 le représente. En utilisant le test classique de normalité (test de Kolmogorov-Smirnov), le logiciel Matlab confirme directement, ainsi que par le graphique 7, la normalité des accroissement du taux de change, malgré l'existence de quelques valeurs aberrantes de la linéarité (de la répartition théorique de la loi normale).

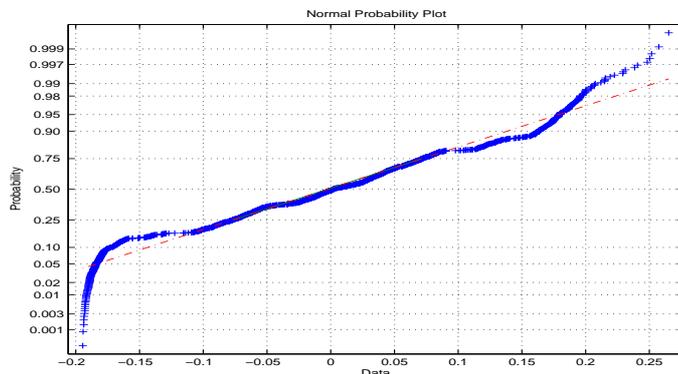


FIG. 7 – Représentation graphique de la normalité

Le processus des accroissements du FBM est appelé *bruit Gaussien fractionnaire*. Il constitue de la série chronologique des incréments, et suit la loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$; une loi normale centrée (le zéro de Data dans le graphique de normalité 7 correspond à la probabilité de répartition $1/2$, $\Phi(0) = 1/2$), avec une variance faible estimée par $\widehat{\sigma}^2 = 2,7 \times 10^{-5}$; ce qui confirme qu'en général, les variations des observations quotidiennes du taux de change durant la période choisie n'enregistrent pas des grands écarts.

La forme géométrique de la trajectoire du taux de change CAD/USD suppose la présence de la notion fractale; le concept de base des processus FBM. En partant de l'observation que l'irrégularité est susceptible d'être autosimilaire (auto-semblable presque tout au long de la courbe), l'estimation de paramètre d'autosimilarité de Hurst doit être entre 0 et 1. La fonction *HurstK* du package *FGN* du logiciel *R*, confirme bien que les observations correspondent à une trajectoire Brownienne fractale discrétisée, de paramètre $\widehat{H} \simeq 0,65$. (Voir Hipel et McLeod (9) (1994)). Ainsi, les comparaisons graphiques avec des trajectoires FBM simulées au hasard confirment que les observations forment bien une trajectoire FBM. Voir le graphe 8 (courbe de comparaison à droite). Cette estimation du paramètre H permet de proposer une modélisation, sous forme d'intégrale stochastique (Voir l'équation 4), pour les observations du taux de change CAD/USD, pour tout instant t dans l'intervalle du temps étudié, par :

$$B^H(t) = \int_{-\infty}^0 [(t-s)^{0.15} - (-s)^{0.15}] dB(s) + \int_0^t (t-s)^{0.15} dB(s),$$

à une constante près, où B est un BM ordinaire. Voir Samorodnitsky et Taqqu (14) (1994). Les observations du taux de change CAD/USD, en tant que modèle Gaussien centré autosimilaire, peuvent être représentées aussi par l'estimation de la matrice de la covariance.

Pour tout t , la variance du FBM correspondant au taux de change peut être estimée par $\mathbb{E}[[B_t^H]^2] = \widehat{\sigma}^2 |t|^{2\widehat{H}}$. En utilisant la formule suivante : $Cov(B_t^H, B_s^H) =$

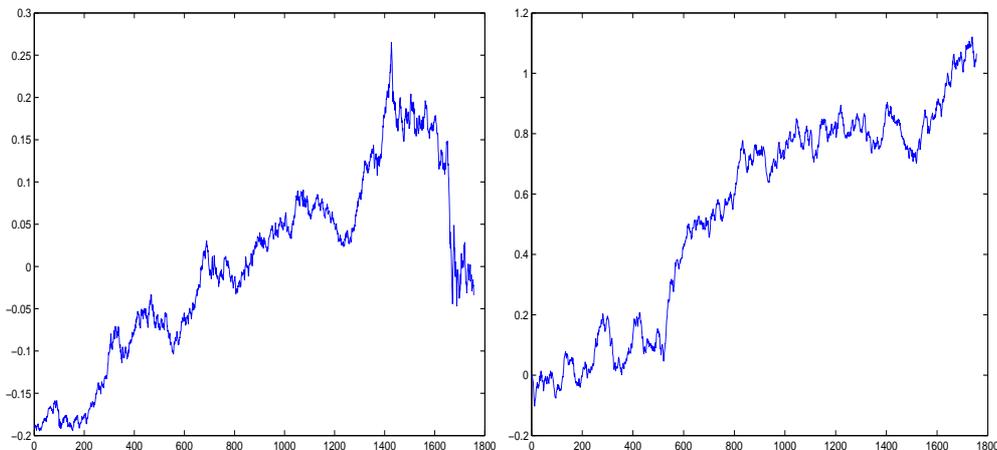


FIG. 8 – Comparaison de la trajectoire observée avec un FBM ($H = 0.65$)

$\mathbb{E}[B_t^H B_s^H] = \frac{\sigma^2}{2} (|s|^{2\hat{H}} + |t|^{2\hat{H}} - |t-s|^{2\hat{H}})$, l'estimation de H et de σ permettent de calculer la matrice de variance covariance, matrice carrée de taille 1756, symétrique et définie positive.

4.2.4 Propriétés du processus des accroissements :

Étant donné que les observations du taux de change CAD/USD représentent un modèle d'un FBM, alors les accroissements correspondants représentés par la figure 6, sont *dépendants et stationnaires* et suivent une loi Gaussienne centrée. L'estimation du paramètre d'autosimilarité et la variance des incréments nous amènent à estimer les autocorrélations entre les observations $Data(i+k)$ et $Data(i)$, par la formule suivante : $\gamma(k) = \frac{\sigma^2}{2} (|k+1|^{2\hat{H}} - 2|k|^{2\hat{H}} + |k-1|^{2\hat{H}})$. Une application développée par Matlab donne les résultats représentés par le graphe 9. Cette courbe de corrélation montre que les accroissements sont positivement corrélés. Ceci vérifie que l'estimation de H qui caractérise le FBM est donnée par une valeur $\frac{1}{2} < \hat{H} < 1$, et la série chronologique en question représente bien un phénomène aléatoire *de structure de dépendance à long terme* ; une corrélation à longue portée caractérisée par l'indice de Hurst $\hat{H} \simeq 0.65$.

La présence de la propriété de *longue mémoire* dans le phénomène étudié peut se traduire par des comportements de *persistance* au niveau des variations journalières du taux de change entre le Dollar canadien et le Dollar américain, et qu'ils restent *longtemps* corrélés. On voit cette dépendance dans la *divergence* de la courbe de l'autocovariance pour les observations éloignées. La présence d'une composante de mémoire de long terme dans les séries financières permet d'expliquer la possibilité d'une connexion durable entre les taux de change.

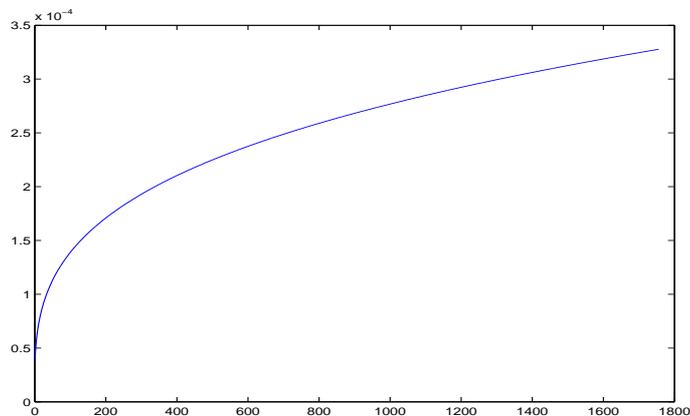


FIG. 9 – Courbe de la corrélation entre les accroissements d'observations

La théorie de mémoire longue est devenue un sujet de recherche intéressant dans le domaine économique et financier, et elle présente des importantes implications dans l'étude de quelques indices boursiers dans les marchés financiers. Voir Cheung (3) (1993).

Remerciements :

Je tiens à remercier mesdames O. E. Moussi et N. Elsaadi, messieurs A. Latreche et A. Bensalma d'avoir bien voulu encadrer et examiner ce travail, qui a été soutenu le 15-10-2009 à l'ENSSEA, pour l'obtention d'un diplôme de Magister en Économie et Statistiques Appliquées, option Statistique Appliquée. Je les remercie infiniment pour leurs précieuses remarques.

Références

- [1] Beran (J.) *Statistics for long memory processes*. Champan and Hall, 1994.
- [2] Box (G. E. P.) , Muller (M. E.) *A Note on the Generation of Random Normal Deviates*, The Annals of Mathematical Statistics, Vol. 29, No. 2 pp. 610-611, 1958.
- [3] Cheung (Y. W.) *Long memory in foreign-exchanges rates*, Journal of Business and Economic Statistics, 11, 93-101, 1993.
- [4] Coeurjolly (J.F.) *Simulation and identification of the fractional Brownian motion : a bibliographical and comparative study*. Journal of Statistical Software, V.5, 2000.

- [5] Chan (G.), Wood (A. T. A.) *Simulation of stationary Gaussian processes in $[0, 1]^d$* . Journal of computational and graphical statistics, Vol. 3, No. 4, p. 409-432, 1994.
- [6] Hurst (H. E.) *Methods of using Long-term storage in resevoirs*. Proc. Institution of Civil Engineers.I, 519-577, 1955.
- [7] Jennane (R.), Harba (R.), Jacquet (G.) *Estimation de la qualité des méthodes de synthèse du mouvement Brownien fractionnaire*. Traitement du Signal, Vol.13, No4, 1996.
- [8] Jennane (R.), Harba (R.), Jacquet (G.) *Méthodes d'analyse du mouvement Brownien fractionnaire : théorie et résultats comparatifs*. Traitement du Signal, V.18, n°5 – 6, 419-436, 2001.
- [9] Hipel (K.W.), McLeod (A.I.) *Time Series Modelling of Water Resources and Environmental Systems*, Elsevier, Amsterdam, The Netherlands, 1994.
- [10] Mandelbrot (B. B.) *Les objets fractals : forme, hasard et dimension*. Deuxième édition, Flammarion, 1984.
- [11] Mandelbrot (B. B.) , Van Ness (J.M.) *Fractional Brownian motion, fractional noises and applications*. SIAM Review, vol. 10, 422-437, 1968.
- [12] Mishura (Y.) *Stochastic calculus for Fractional Brownian Motion and related processes*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008.
- [13] Peltier (R. F.) (direction de thèse : P. Deheuvels) *Processus stochastiques fractals avec applications en finance*. Université Paris 06, France, 1998.
- [14] Samorodnitsky (G.), Taqqu (M. S.) *Stable Non-Gaussian Random Processes*. Chapman and Hall, New York, 1994.
- [15] Savy (N.)(direction de thèse : J. B. Gravereaux) *Mouvement Brownien Fractionnaire, applications aux télécommunications. Calcul stochastique relativement à des processus fractionnaires*, IRMAR - Université de Rennes 1, 2003.
- [16] Rjasanow (S.) *Effective algorithms with circulant-block matrices*, Linear algebra and its applications, vol. 202, pp. 55-69, 1994.