

# IDENTIFICATION NON PARAMETRIQUE D'UN PROCESSUS NON LINEAIRE HETEROSCEDASTIQUE

Mohamed CHIKHI<sup>1</sup>

## RÉSUMÉ

Cet article vise à identifier un processus non linéaire par la méthode du noyau. Cette identification nécessite une sélection rigoureuse des coefficients de Markov et le choix de la fenêtre qui détermine le degré de lissage de l'estimateur.

### Mosts-clef

Erreur de prédiction finale, noyau, fenêtre, processus autorégressif fonctionnel.

## ABSTRACT

This paper aims to identify a nonlinear process by the kernel methodology. This identification requires the selection of the Markov coefficients and the choice of bandwidth, which determines the degree of estimator's smoothing.

### Keywords

Final Prediction Error, kernel, bandwidth, functional autoregressive process.

## 1 INTRODUCTION

Avec la reconnaissance de la complexité de la dynamique de nombreuses séries financières, il est apparu nécessaire de recourir à de nouvelles procédures économétriques pour modéliser les processus générateurs. Il en est ainsi de l'existence de phénomènes de non-linéarité mis en évidence dans diverses études récentes [voir par exemple Kyrtsou et Terraza (2000)]. Cependant, l'utilisation des méthodes paramétriques dans ces cas montre la faible puissance des tests qu'elles utilisent pour sélectionner les modèles. Le développement des méthodes de régression non paramétriques donne une base théorique solide à l'analyse non linéaire des séries temporelles comme l'indique Robinson (1983) dans l'introduction de son ouvrage. Elles peuvent donc être considérées comme une alternative au problème de la prise en compte de la non-linéarité.

Les méthodes non paramétriques ont connu un essor important depuis les travaux de Bosq (1979), Collomb (1980) et Robinson (1983). Leur efficacité pratique a été analysée par Bosq et Lecoutre (1992), Härdle (1990), Gannoun

---

<sup>1</sup> Université de Ouargla & LAMETA/CNRS, Université Montpellier I. Adresse: Faculté des Sciences Economiques, Espace Richter, Avenue de la Mer, C.S. 79606, 34960 Montpellier Cedex 2, France. Tel.: 33 (0)4.67.15.84.16, mobile: +213 (0)6.66.95.97.00 Fax.: 33 (0)4.67.15.84.67, E-mail: [chikhi@lameta.univ-montp1.fr](mailto:chikhi@lameta.univ-montp1.fr).

(1991), Rosa (1993) et Matzner-Lober (1997). En 1990, Auestad et Tjostheim les ont appliquées pour estimer la moyenne et la variance conditionnelles d'un processus autorégressif non linéaire. Ils choisissent les critères de la variance résiduelle et du *FPE* « *Final Prediction Error* » pour déterminer leurs coefficients de Markov. Cheng et Tong (1992) proposent un critère de validation croisée et Vieu (1995) celui de la validation croisée pénalisée. Cependant, ce n'est qu'en 1998 que Tschernig et Yang suggèrent d'utiliser le critère *FPE* non paramétrique corrigé en introduisant un nouveau terme dans le critère *FPE* retenu par Auestad et Tjostheim (1990).

Notre article s'insère dans la lignée de ces travaux et s'intéresse plus particulièrement à l'analyse non paramétrique de modèles non linéaires conditionnellement hétéroscédastiques.

Nous présentons dans la section 2 l'estimateur non paramétrique de Nadaraya-Watson (1964) et l'estimateur linéaire local du processus autorégressif fonctionnel de Doukhan (1994). Nous proposons alors une procédure de sélection d'un modèle non paramétrique et nous l'appliquons à l'action France Télécom (section 3).

## 2 ESTIMATEUR A NOYAU D'UN PROCESSUS NARCH

L'estimateur non paramétrique du processus autorégressif non linéaire  $\{Y_t\}_{t \geq 0}$  avec erreur *ARCH* s'écrit sous la forme :

$$Y_t = f(X_t) + \sigma^{1/2}(X_t)\varepsilon_t$$

(1)

Où  $X_t = (Y_{t-i_1}, \dots, Y_{t-i_k})^T$  est le vecteur de toutes les variables retardées,  $i_1 < \dots < i_k$  et  $\varepsilon_i \sim IID(0,1)$ . Notons que la fonction  $f(\cdot)$  représente l'espérance conditionnelle  $E(Y_t | X_t)$ .

Nous donnons quelques hypothèses sur le processus (1) (Doukhan, 1994) :

(H1) Pour tout entier  $M \geq i_k$ , le processus  $X_{M,t} = (Y_{t-1}, \dots, Y_{t-M})^T$  est strictement stationnaire et  $\beta$ -mélangeant avec  $\beta(n) \leq c_0 n^{-(2+\delta)/\delta}$ ,  $\delta > 0, c_0 > 0$  :

$$\beta(n) = E \sup \left\{ |P(A | \mathfrak{R}_M^k) - P(A)| : A \in \mathfrak{R}_{n+k}^\infty \right\}$$

Où  $\mathfrak{R}_t^i$  est  $\sigma$ -algèbre de  $X_{M,t}, X_{M,t+1}, \dots, X_{M,t^i}$ .

(H2) La distribution stationnaire du processus  $X_{M,t}$  a une densité  $\mu_M(x_M), x_M \in R^M$ , continue.

(H3) La fonction  $f(\cdot)$  est deux fois continûment différentiable tandis que  $\sigma(\cdot)$  est continue et positive.

(H4) Les quatre premiers moments de  $\{\varepsilon_t\}_{t \geq i_k}$  sont finis.

Une technique non paramétrique est proposée pour estimer la fonction de la moyenne conditionnelle et celle de la volatilité : l'estimateur linéaire local  $\hat{f}(x)$

Notons :

$$X_t = (Y_{t-i_1}, Y_{t-i_2}, \dots, Y_{t-i_k})^T = (X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_k})^T$$

et  $Y = (Y_{i_k}, Y_{i_{k+1}}, \dots, Y_n)^T$

Pour tout  $x \in R^k$ , l'estimateur s'écrit donc comme suit :

$$\hat{f}(x) = e^T (Z^T W Z)^{-1} Z^T W Y$$

où :

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ X_{i_k} - x & \dots & \dots & X_n - x \end{pmatrix}^T$$

$$e = (1 \quad 0_{1 \times k})^T$$

$$W = \text{diag} \left\{ \frac{1}{n} K_h(X_i - x) \right\}_{i=i_k}^n$$

avec :  $n' = n - i_k + 1$

(H5)  $K : R \rightarrow R$  est un noyau positif symétrique et  $h = h_n$  est un nombre positif avec  $h \rightarrow 0, nh^k \rightarrow \infty$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

Notons :  $\|K\|_2^2 = \int K^2(u) du, \sigma_K^2 = \int K(u) u^2 du$ . Pour tout  $x \in R^k$ , nous avons :

$$K_h(x) = \frac{1}{h^k} \prod_{j=1}^k K\left(\frac{x_j}{h}\right)$$

La convergence et la normalité asymptotiques de l'estimateur linéaire local de ce modèle sont données par :

$$\sqrt{n' h^k} \left\{ \hat{f}(x) - f(x) - h^2 b_i(x) \right\} \xrightarrow{D} N(0, V(x))$$

(2)

quand  $n \rightarrow \infty$ , avec le biais asymptotique :

$$b_c(x) = \frac{\sigma_K^2}{2} \left\{ \frac{2 \nabla f(x)^T \nabla \mu(x)}{\mu(x)} \right\}$$

(3)

$$b_i(x) = \frac{\sigma_K^2}{2} \text{Tr}[\nabla^2 f(x)]$$

(4)

et la variance asymptotique :

$$V(x) = \frac{\sigma(x)}{\mu(x)} \|K\|_2^{2k}$$

(5)

où  $\|K\|_2^2 = \int K^2(x_j) dx_j$  and  $\sigma_K^2 = \int x_j^2 K(x_j) dx_j$

Le taux de convergence de cet estimateur dépend de la dimension de la matrice des régresseurs. Il nécessite la continuité de la densité pour un taux de convergence optimale (Härdle *et al*, 1998).

Afin d'appliquer l'estimateur linéaire local du modèle *NAR-ARCH*, nous spécifions la fenêtre  $h$  et les coefficients de Markov  $i_1, \dots, i_k$ . Le choix de la fenêtre est crucial pour la qualité de l'estimation puisqu'il détermine le niveau de lissage de la fonction estimée. Pour estimer une fenêtre optimale, les spécialistes optent régulièrement pour la méthode de validation croisée de (Vieu, 1994). Une approche alternative basée sur le critère (*FPE*) asymptotique est

proposée ici, puisque ce dernier donne une meilleure vitesse de convergence que le critère de validation croisée habituel.

Soit  $\{\tilde{Y}_t\}$  d'autres séries ayant la même distribution que  $\{Y_t\}$ , mais indépendantes de  $\{Y_t\}$ . Le critère  $FPE$  d'un estimateur  $\hat{f}$  de  $f$  est défini par :

$$FPE(\hat{f}) = \lim_{t \rightarrow \infty} E \left[ \left\{ \tilde{Y}_t - \hat{f}(\tilde{X}_{M,t}) \right\}^2 w(\tilde{X}_{M,t}) \right]$$

(6)

(H6) Pour la fonction du poids  $w: R^M \rightarrow R$ , elle est continue positive et son support est compact, nous supposons aussi que  $\mu(x_M) > 0$  pour tout  $x_M \in \text{supp}(w)$ .

Quand le processus  $\{Y_t\}$  est asymptotiquement non linéaire stationnaire et  $\hat{f}$  est un estimateur non paramétrique, le critère  $FPE$  est non linéaire.

Pour cet estimateur, nous avons :

$$FPE(h) = AFPE(h) + o(h^4 + \frac{1}{n h^k})$$

(7)

où :

$$AFPE(h) = A + b(h)B + c(h)C$$

avec :

$$A = \int \sigma(x) w(x_M) \mu(x_M) dx_M, B = \int \sigma(x) w(x_M) \mu(x_M) / \mu(x) dx_M,$$

$$C = \int r^2(x) w(x_M) \mu(x_M) dx_M$$

$$r(x) = Tr \left\{ \nabla^2 f(x) \right\}$$

où :

$$b(n) = \|K\|_2^{2k} n^{-1} h^{-k}, c(h) = \sigma_K^4 h^4 / 4$$

La première partie de la formule (7) présente l'espérance de la variance du bruit blanc des processus  $\{Y_t\}$  et  $\{\tilde{Y}_t\}$ . Le deuxième terme  $B$  donne l'espérance de la variance de l'estimateur non paramétrique  $\hat{f}$  ; alors que le troisième capture son biais estimé. Cependant, pour un échantillon donné de taille  $n$ , nous obtenons une expression qui détermine une fenêtre optimale  $h_{opt}$  en minimisant la somme du deuxième et du troisième terme :

$$h_{opt} = \left\{ k \|K\|_2^{2k} B n^{-1} C^{-1} \sigma_K^{-4} \right\}^{1/(k+4)}$$

(8)

Et le critère  $AFPE$  minimal est :

$$AFPE_{opt} = A + \left( k^{-k/(k+4)} + \frac{1}{4} k^{4/(k+4)} \right) \left\{ \|K\|_2^{8k} B^4 n^{-1} C^k \sigma_K^{4k} \right\}^{1/(k+4)}$$

L'équation (8) est nécessaire pour obtenir l'estimateur de  $h_{opt}$  et l'expression (7) contient des valeurs inconnues  $A$ ,  $B$  et  $C$ . Il est extrêmement important d'estimer ces trois valeurs afin d'estimer le critère  $AFPE$ , et ainsi la fenêtre optimale associée :

$$\hat{A} = n^{-1} \sum_{i=i_k}^n \left\{ Y_i - \hat{f}(X_i) \right\}^2 w(X_{M,i})$$

(9)

$$\hat{B} = n^{-1} \sum_{i=i_k}^n \{Y_i - \hat{f}(X_i)\}^2 w(X_{M,i}) / \hat{\mu}(X_i)$$

(10)

L'estimateur  $\hat{f}$  utilise des fenêtres d'ordre  $n^{-1/(k+4)}$  et  $\hat{\mu}(X_i)$  est un estimateur à noyau de la densité.

Sous les hypothèses (H1)-(H6), quand  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\hat{A} = A + \left\{ \|K\|_2^{2k} - 2K(0)^k \right\} n^{-1} h^{-k} B + C \sigma_K^4 h^4 / 4 + o\{h^4 + n^{-1} h^{-k}\} + O_p\{n^{-1/2}\}$$

(11)

Notons qu'avec une fenêtre  $h$  de la forme  $cn^{-1/(k+4)}$ , l'estimateur non paramétrique  $\hat{A}_a$  converge vers  $A$  et sa convergence est de l'ordre  $\sqrt{n}$  si  $k \leq 4$ . Le deuxième et le troisième terme seront de l'ordre  $O\{n^{-1/2}\}$ .

L'estimateur non paramétrique du *FPE* asymptotique est :

$$AFPE = \hat{A} + 2K(0)^k n^{-1} h_{opt}^{-k} \hat{B}$$

(12)

$\hat{A}_a$  est estimée en utilisant la fenêtre optimale  $h_{opt}$ , alors que  $\hat{B}$  en utilisant n'importe quelle fenêtre de l'ordre  $n^{-1/(k+4)}$ .

Yang et Tschernig (1999) montrent que l'estimateur du critère vérifie toutes les propriétés statistiques. Ils suggèrent d'introduire un facteur de correction pour pénaliser la surestimation des coefficients de Markov :

$$CAFPE = AFPE \left( 1 + \frac{k}{n^{\frac{4}{k+4}}} \right)$$

(13)

Où la correction dépend du nombre des retards  $k$  et le nombre d'observation  $n$ . Il s'agit donc de choisir le sous-ensemble  $\{\hat{i}_1, \dots, \hat{i}_k\}$  sous les hypothèses (H1)-(H6), telle que Tschernig et Yang (1998, p.7) :

$$P\{\hat{k} = k, \hat{i}_l = i, l = 1, \dots, k\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

où

$$e^T = (1 \quad 0_{1 \times k})^T,$$

$$Z_h = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ X_{k-1} - x & \dots & X_{n-h} - x \end{pmatrix}^T$$

$$W_h = \text{diag}\{K_h(X_{i-1} - x) / n\}_{i=k}^{n-h+1}$$

et

$$Y_h = (Y_{k+h-1} \quad \dots \quad Y_n)^T$$

### 3 ANALYSE EMPIRIQUE

Nous appliquons la méthode proposée sur la série de l'action France Télécom en logarithme qui couvre la période du 05/01/1998 à 29/02/2005 [voir FIG.1]. Cette série est caractérisée par la présence d'une racine unitaire (voir tableau 1). Pour la stationnariser, nous avons différencié la série en logarithme [voir FIG. 2]. L'hypothèse de normalité des rendements est clairement rejetée (cf. tableau 2). L'asymétrie constatée peut être le signe de la présence de non-linéarités dans

le processus d'évolution des rendements, les modèles linéaires gaussiens ne pouvant générer que des comportements symétriques de la série (voir aussi FIG.3). Le diagramme de dispersion de la série (FIG. 4) ne se présente pas sous la forme d'un ellipsoïde régulier et confirme la non-linéarité de la série. En outre, d'après le tableau 3, l'hypothèse d'indépendance est clairement rejetée. Les statistiques de Mizrach et de BDS sont strictement supérieures à la valeur critique au seuil 5%. Par conséquent, la série des rendements de l'action France Télécom est prévisible à court terme c'est-à-dire que les mouvements apparaissent comme un résultat d'un choc exogène transitoire. Nous notons également que cette série n'est pas prévisible à long terme puisqu'on rejette l'hypothèse de mémoire longue [cf. tableau 4]. Notre modèle est recherché à travers d'une modélisation non linéaire et comme la structure de ce processus n'est pas connue, nous pouvons utiliser l'approche non paramétrique pour généraliser la classe des modèles non linéaires.

L'identification d'un modèle non paramétrique nécessite une sélection rigoureuse des coefficients de Markov et de la fenêtre qui détermine le degré de lissage de l'estimateur. Il est donc possible d'appliquer le critère non paramétrique *CAFPE* pour identifier le processus des rendements de l'action France Télécom. Pour cela, le nombre maximal de retards à considérer est cinq et le retard le plus grand est huit. Il s'agit d'examiner  $1 + \sum_{j=1}^5 \binom{8}{j}$  combinaisons différentes de retards pour la procédure de recherche. Dans cette approche, nous sélectionnons les retards et la fenêtre qui minimisent le critère *CAFPE*.

Nous choisissons donc une fenêtre qui équilibre asymptotiquement le biais et la variance et qui minimise le critère. Pour estimer l'espérance de  $b_c(X_t)$ , nous estimons les dérivées secondes de (4) en utilisant l'estimateur quadratique local avec la fenêtre :

$$h = 2 \text{var}(Z_t) \left( \frac{4}{k+10} \right)^{\frac{1}{k+12}} n^{-\frac{1}{k+12}}$$

Pour calculer les résidus et la densité qui sont utilisés pour estimer l'espérance de la variance de l'estimateur non paramétrique  $\hat{f}$ , nous calculons la fenêtre de Silverman (1986), eq. (4.14), p. 86) :

$$h_s = \text{var}(Z_t) \left( \frac{4}{k+2} \right)^{\frac{1}{k+4}} n^{-\frac{1}{k+4}}$$

(17)

De plus, la méthode "*grid search*" est appliquée pour estimer la fenêtre optimale où la grille couvre l'intervalle  $[0, 2h_s, 2h_s]$  dans 24 pas. Nous choisissons alors le noyau gaussien puisque l'utilisation des autres noyaux nécessite celle d'une fenêtre beaucoup plus grande.

La fonction du poids sera spécifiée comme suit :

$$w(X_t) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \text{ if } \begin{cases} \hat{\mu}(X_t) \geq c \\ \hat{\mu}(X_t) < c \end{cases}$$

où la constante  $c$  est déterminée telle que  $n''$  observations sont exclues et  $n'$  présente le plus grand nombre entier prochain de  $0,05n'$ .

Dans notre exemple, nous allons utiliser le noyau gaussien puisque comme l'a noté Matzner-Lober (1997), l'utilisation des autres noyaux nécessite celle d'une fenêtre beaucoup plus grande. La fonction du poids  $w()$  est spécifiée de la façon suivante :

$$w(X_t) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \text{ si } \begin{cases} \hat{\mu}(X_t) \geq c \\ \hat{\mu}(X_t) < c \end{cases}$$

Où la constante  $c$  est déterminée telle que  $n''$  observations sont exclues et  $n'$  est notée le plus grand nombre entier prochain de  $0,05n'$ .

Le tableau 3 donne les résultats de l'identification du processus des rendements de l'action France Télécom. Il contient aussi les retards sélectionnés, les valeurs du critère et de la fenêtre optimale estimées. Les retards sont sélectionnés par rapport à leur contribution pour minimiser le critère. Utilisant ce modèle non paramétrique, le critère estimé est 0.9392 et les retards sélectionnés sont : 2, 5 et 8. Notons que l'estimateur utilisé est celui de l'estimateur linéaire local. Nous remarquons que les résidus (cf. FIG. 4) présentent une structure de dépendance car les statistiques de Mizrach et de BDS (voir aussi tableau 6) nous ont conduit à rejeter l'hypothèse nulle générateur *iid* pour certaines dimensions de plongement. Les résidus peuvent être modélisés par les modèles *ARCH* car les résultats des tests *ARCH LM* sur les résidus du modèle confirment la présence d'un effet *ARCH* ( $nR^2 = 19.82 > \chi^2(2)$ ). Nous estimons donc la volatilité des rendements de l'indice France Télécom par la méthode du noyau. Le tableau 7 présente les résultats d'estimation de la volatilité des rendements de l'indice France Télécom. Il contient les retards sélectionnés, la valeur du critère et la fenêtre optimale. Nous avons utilisé aussi l'estimateur linéaire local pour identifier la volatilité conditionnelle. Les retards sont alors 4, 6 et le critère estimé associé est 0.989508. Nous pouvons remarquer que les résidus du modèle *ARCH* forment un bruit blanc et ne présentent aucune corrélation sérielle (cf. tableau 8). De plus, il y'a des signes de non linéarité (cf. FIG. 8) où la série a un comportement dynamique asymétrique. Ces graphiques indiquent qu'il existe des dépendances non linéaires.

Nous pouvons alors penser, du fait de la prévisibilité des rendements d'après les résultats du test de Mizrach sur les rendements, qu'il est possible *a priori* d'établir des stratégies rémunératrices sur le marché puisque les mouvements de l'action apparaissent comme le résultat de chocs exogènes venant affecter le marché [voir Chikhi et Terraza, 2002].

## 4 CONCLUSION

Dans cet article, nous avons étudié un processus non paramétrique en identifiant sa nature et sa structure par l'analyse du comportement cyclique de la série France Télécom. Il y'a un problème en estimation fonctionnelle ; il s'agit du choix des coefficients de Markov. La méthode empirique utilisée pour sa détermination ne repose actuellement sur aucun théorème de validation. Les résultats existants admettent en général au moins implicitement que le processus observé est markovien d'ordre  $k$  ; hypothèse difficile à vérifier en pratique.

Malgré cette difficulté, les méthodes non paramétriques restent toujours un outil puissant pour étudier les séries temporelles. Si la structure du processus non

linéaire n'est pas connue, nous pourrions donc au travers d'une modélisation non paramétrique, tenter de réduire notre ignorance et de minimiser la part du hasard. Nous avons perfectionné notre conception de l'aléatoire en évaluant quantitativement le degré d'aléatoire des systèmes dynamiques utilisés pour modéliser une chronique.

## REFERENCES

- [1] Akaike, H., *Statistical Predictor Identification*, Annals of Institute of Statistical Mathematics, 22, 203-217. (1970)
- [2] Auestad, B. and Tjostheim, D. (1990), *Identification of nonlinear time series: first order characterization and order determination*, Biometrika, 77, 4, 669-687. (1990)
- [3] Bosq, D et Lecoutre, J.P., *Analyse et prévision des séries chronologiques*, Masson, Paris. (1992)
- [4] Bosq, D., *Sur la prédiction non paramétrique de variables aléatoires et mesures aléatoires*, Pub. Interne, UER de Mathématiques, Lille. (1979)
- [5] Bosq, D., *Nonparametric statistics for stochastic processes*, Lecture Notes in statistics, 110, Springer-verlag. (1996)
- [6] Box, G and Pierce, D., *Distribution of residual autocorrelation in autoregressive integrated moving average time series models*, J, Ann., Statist., 6, 461-464. (1970)
- [7] Brockmann, M., *Locally adaptive bandwidth choice for kernel regression estimators*, J. Amer. Statist. Assoc., 88, 1302-1309. (1993)
- [8] Cheng, B. and Tong, H., *On consistent nonparametric order determination and chaos*, Journal of The Royal Statistical Society, Series B, 54, 427-449. (1992)
- [9] Chiu, S.T., *Bandwidth selection for kernel estimates with correlated noise*, Statist. Probab. Lett., 8, 347-354. (1989)
- [10] Collomb, G., *Estimation non paramétrique de probabilités conditionnelles*, C.R. Acad. sci. Paris Sér I Math., 291, 427-430. (1980)
- [11] Doukhan, P., *Mixing: Properties and examples*, New York; Springer-Verlag. (1994)
- [12] Engle, R.F., *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation*, Econometrica, 50(4) 987-1007. (1982)
- [13] Gannoun, A., *Prédiction non paramétrique : médianogramme et méthode du noyau en estimation de la médiane conditionnelle*, Statistique et Analyse des données, 16(23), 23-42. (1991)
- [14] Gouriéroux, C., *Modèles ARCH et applications financières*, Economica, Paris. (1992)
- [15] Härdle, W and Chen, R., *Nonparametric Time Series Analysis, a selective review with examples*, Proceedings of the 50<sup>th</sup> session of the ISI, Peking. (1996)
- [16] Härdle, W and Yang, L., *Nonparametric autoregression with Multiplicative Volatility and additive Mean*, Discussion paper 96-62, SFB 373, Humboldt Universität zu Berlin. (1996)

- [17] Härdle, W, Lütkepohl, H and Chen, R., *A review of Nonparametric Time Series Analysis*, Discussion Paper 96-48, SFB 373, Humboldt Universität zu Berlin. (1996)
- [18] Härdle, W, Tsybakov, A. B and Yang, L., *Nonparametric vector autoregression*, Journal of Statistical Planning and Inference 68, 221-245. (1998)
- [19] Härdle, W., *Applied nonparametric regression*, Cambridge university press, Cambridge. (1990)
- [20] Lütkepohl, H. and Kräzig, M., *Applied Time Series Econometrics*. (2003)
- [21] Masry, E and Tjostheim, D., *Nonparametric estimation and identification of non-linear ARCH time series: strong convergence and asymptotic normality*, Econometric Theory, 11, 258-289. (1995)
- [22] Matzner-Lober, E., *Prévision non paramétrique des processus stochastiques*, Thèse de doctorat de l'université de Montpellier II. (1997)
- [23] Mizrach, B., *A Simple Nonparametric Test for Independence*. (1995)
- [24] Nadaraya, E.A., *On estimating regression*, Theory probability and their applications, 9, 134-137. (1964)
- [25] Robinson, P.M., *Nonparametric estimators for time series*, Journal of Time Series Analysis, 4, 185-207. (1983)
- [26] Rosa, M. A. C., *Prévision robuste sous une hypothèse ergodique*, Thèse de Doctorat de l'université de Toulouse I. (1993)
- [27] Schwarz, G., *Estimating the dimension of a Model*, Annals of Statistics, 6,461-464. (1978)
- [28] Silverman, B.W., *Density estimation for Statistics and data analysis*, Chapman & Hall. (1986)
- [29] Stute, W., *On almost sure convergence of conditional empirical distribution function*, Ann. of Prob. , 14, 891-901. (1986)
- [30] Tjostheim, D. and Auestad, B., *Nonparametric identification of nonlinear time series: selecting significant lags*, Journal of American Statistical Association, 89, 1410-1419. (1994b)
- [31] Tschernig, R and Yang, L., *Nonparametric Lag Selection for Time Series*, Journal of Time Series Analysis, forthcoming. (1998)
- [32] Tschernig, R., *Nonlinearities in German Unemployment Rates: A Nonparametric Analysis*, SFB 373 discussion paper 45. (1996)
- [33] Ullah, A., *Nonparametric estimation and hypothesis testing in econometric models*, Empec, 13, 223-249. (1988)
- [34] Vieu, P., *order choice in nonlinear autoregressive models*, statistics, OPA , 26, 307-328. (1995)
- [35] Watson, G.S., *Smooth regression analysis*, Sankhyä, A26, 359-372. (1964)
- [36] Yang, L and Tschernig, R., *Multivariate bandwidth selection for local linear regression*, Journal of the royal statistical Society, Series B, 61, 793-815. (1999)
- [37] Yang, L and Tschernig, R., *Non- and semiparametric identification of seasonal nonlinear autoregression models*, Econometric Theory 18: 1408-1448. (2002)

## ANNEXES GRAPHIQUES ET STATISTIQUES

Procédure du	En logarithme	En différence première
--------------	---------------	------------------------

test				
Dickey-Fuller	Modèle 3	-1.024* (-3.413)	Modèle 2	-24.814* (-1.939)
Philips-Perron	Modèle 3	-0.836* (-3.413)	Modèle 1	-53.414* (-2.863)
Schmidt-Philips	$Z(Rho)$	-8.5436* (-18.1)	$Z(Rho)$	-124.11* (-18.1)
	$Z(Tau)$	-1.4277* (-3.02)	$Z(Tau)$	-9.057* (-3.02)

Model 1: modèle avec constante

Model 3: modèle avec constante et tendance déterministe

Model 2: modèle sans constante ni tendance déterministe

\* rejet de l'hypothèse nulle de racine unitaire au seuil 5%.

**Tableau 1 – Tests de racine unitaire de Dickey-Fuller, Philips-Perron and Schmidt-Philips**

Série	Skewness	Kurtosis	Stat. de J.B	Stat. de Cramer-Von Mises	Stat. De Watson	Stat. De Anderson-Darling
Rendements de l'action France Télécom	-0.121	22.141	2622.244	2.3214	2.143	13.654

**Tableau 2 – Les tests de normalité de la série des rentabilités de l'action France Télécom**

$m$	Stat. de Mizrach	Stat. de BDS -Fraction of pairs-
1	3.457	-
2	4.214	3.838
3	4.469	4.267
4	3.447	6.559
5	2.845	8.509
6	2.115	9.112
7	2.784	9.871
8	2.487	10.245
9	2.522	10.741
10	2.154	10.984

**Tableau 3 – Les tests non paramétriques de Mizrach et de BDS sur les rentabilités de l'action France Télécom**

Fenêtre	Ordonnées	
	$T^{0.5}$	$T^{0.8}$
GPH	0.0524	-0.0314
	(0.6214)	(-0.2754)
Rectangular.	0.0445	-0.0284
	(0.1461)	(-0.1147)
Bartlett	0.1138	-0.0313

	(0.6681)	(-0.5315)
Daniell	0.0842	-0.0274
	(0.5200)	(-0.4118)
Tukey	0.0844	-0.0345
	(0.5270)	(-0.4154)
Parzen	0.1271	-0.0375
	(0.6849)	(-0.5844)
B-priest	0.0478	-0.0227
	(0.3311)	(-0.2451)
Andrews-	0.0211	-
Guggenberger	(0.1248)	-

**Tableau 4 – L'estimation semi paramétrique du coefficient d'intégration fractionnaire de la série des rentabilités de l'action France Télécom**

Retards	CAFPE	$\hat{h}$
2,5,8	0.9309	03280

**Tableau 5 – Estimation non paramétrique de la moyenne conditionnelle (NAR)**

$m$	Mizrach statistic	BDS statistic
1	0.4258	2.341
2	1.0118	2.784
3	-5.1877	2.984
4	-3.0532	4.784
5	-0.4509	5.847
6	1.5690	7.121

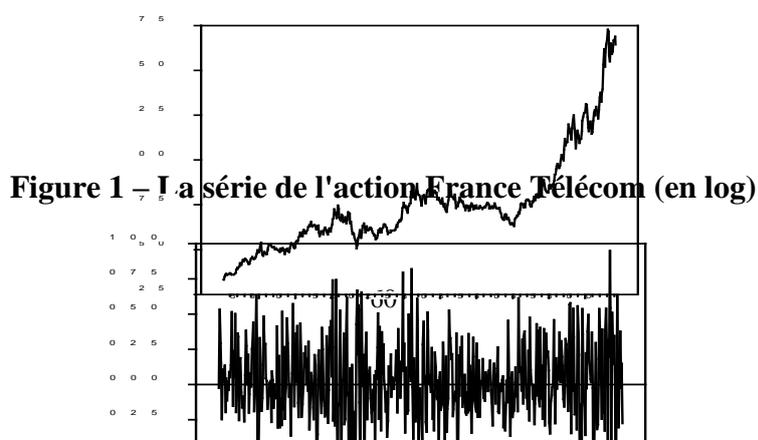
**Tableau 6 – Tests de Mizrach et de BDS sur les résidus d'estimation**

retards	CAFPE	$\hat{h}$
4, 6	0.9895	0.3487

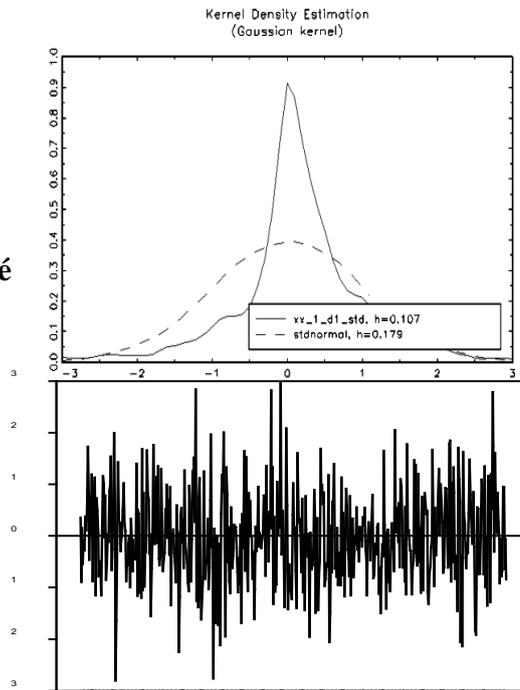
**Tableau 7 – Estimation non paramétrique de la variance conditionnelle (ARCH)**

$m$	Stat. deMizrach	Stat. deBDS
1	0.345	0.114
2	0.021	0.741
3	-0.867	1.015
4	-0.152	1.247
5	-0.129	1.452
6	0.160	1.694

**Tableau 8 – Tests de Mizrach et de BDS sur les résidus standardisés NAR-ARCH**



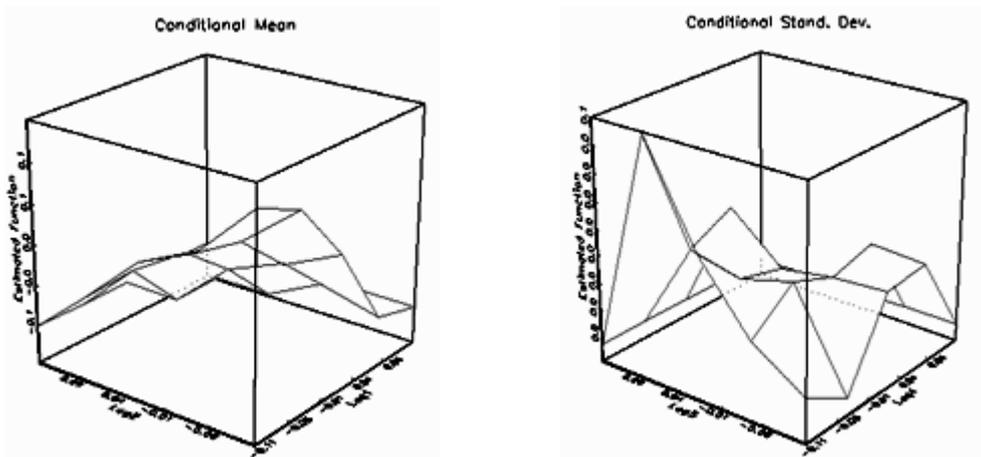
**Figure 2 – La série de l'action France Télécom log-différenciée**



**Figure 3 – noyau de la densité différenciée**

**Estimation à de la série log-**

**Figure 4 – Résidus du processus NAR**



**Figure 5 – Les fonctions de la moyenne et de la variance conditionnelles**