

## LA VALEUR A RISQUE A LA CHOQUET (VaRC)

### VALUE AT RISK AT CHOQUET (VaRC)

**Issouf ABDOU**

*Université des Comores, BP 2585, Moroni, rue de la Corniche Comores*  
[abdouissouf8631@gmail.com](mailto:abdouissouf8631@gmail.com)

**MAMY Raoul Ravelomanana**

*Université d'Antananarivo, Faculté de Droit, d'Economie, de Gestion et de Sociologie*  
*Ankatso, 101 Madagascar*  
[ironmamy@outlook.fr](mailto:ironmamy@outlook.fr)

**RIVO Rakotozafy**

*Université de Fianarantsoa, BP 1264, Andrainjato, 301 Fianarantsoa, Madagascar*  
[rrakotoz@yahoo.fr](mailto:rrakotoz@yahoo.fr)

**Reçu le: 22/11/2022 Accepté le :07/04/2024 Publication en ligne le: 18/04/2024**

**ABSTRACT:** These papers present a risk management model in a complex environment such as that of microfinance. These environments have not yet benefited from any suitable risk assessment model. Inspired by the utility à la Choquet dependent on the state of nature, this model makes it possible to incorporate the economic context in the evaluation of the value at risk. It is a subjective model and an extreme risk measurement tool.

**Keywords:** Risk, Subjective Preferences, Utility, Choquet Integral, , Complex Environment

**JEL Classification :**B23

**RESUME :** Ces papiers présentent un modèle de gestion de risque dans un environnement complexe comme celui de la micro finance. Ces environnements ne bénéficient jusqu'à nos jours d'aucun modèle d'évaluation de risque adapté. En s'inspirant de l'utilité à la Choquet dépendante de l'état de la nature, ce modèle permet d'incorporer le contexte économique dans l'évaluation de la valeur en risque. Il est un modèle subjectif et un outil de mesure de risque extrême.

**Mots clés :** Risque, Préférences Subjectives, Utilité, Intégrale de Choquet, Environnement complexe

## 1. INTRODUCTION

Le risque est lié à la survenance d'un événement qu'il n'est pas possible de prévoir et aux conséquences importantes sur le portefeuille d'une firme. Donc il revêt un caractère

aléatoire et imprévisible. Maîtriser le risque, donc leur caractère aléatoire et imprévisible laisse des stressés dans le monde des placements.

La volatilité accrue des marchés financiers et le développement des instruments de couverture toujours plus complexes ont permis, à la VaR, depuis deux décennies, de devenir l'outil clé pour prévoir les pertes plausibles à brève échéance dans le monde du placement. Mais cette mesure trouve ses limites dans un environnement incertain où la décision d'investissement dépend du contexte économique.

C'est ainsi qu'en se basant sur le modèle d'utilité à la Choquet dépendante l'état de la nature (A. Issouf 2021), nous proposons la mesure de la valeur en risque à la Choquet qui est capable d'incorporer le contexte économique. Comparé à la simulation historique, le modèle est bien un outil de mesure risque extrême.

## **2. TRAVAUX CONNEXES**

L'optimisation des risques par des instruments de mesure classiques se distingue de ceux des nouveaux instruments, notamment la VaR (Value at Risk) et ses extensions. La durée et la convexité sont au centre d'intérêt de la gestion des risques du rendement d'un portefeuille. Les mesures de dispersion de Fong et Vasicek (Fong et Vasicek 1984) et de Balbas et Ibanez (Balbas et Ibanez 1998) font apparaître cette distinction. Les mesures classiques du risque de rendement ne considèrent pas le vrai comportement des rendements au moyen de données historiques ou simulées. Ceci impose une limitation dans l'optimisation du portefeuille que les mesures modernes essayent de résoudre. La VaR est une méthodologie de mesure de risque bien connue, qui a été employée comme base pour l'industrie du règlement, voir (Jorion 1996), (Pritsker 1997) et (Szego 2002). Dans cette ligne, le problème de "simple immunization" a été présenté par Fischer et Weil (Fischer et Weil 1971). Après une analyse comparative, la VaR est l'instrument qui minimise le risque d'un portefeuille, en fonction du niveau de confiance et de l'horizon choisi.

Les détracteurs de la VaR trouvent, en cette métrique de risque deux, limites majeures. La première est liée au concept lui-même. En effet, la VaR par définition ne fournit en prévision aucune indication sur l'ampleur des pertes éventuelles, pouvant résulter des variations adverses des facteurs de marché. C'est, d'ailleurs, pour cette raison que les autorités de régulation des marchés imposent aux institutions financières de mener des analyses de scénarios catastrophes (stress testing) en complément de la prévision de la VaR.

La deuxième critique et, de loin, la plus référencée dans la littérature, concerne la violation de la propriété de sous-additivité. Pour la VaR, cette propriété n'est pas toujours vérifiée, en particulier, dans le cas de distributions non elliptiques, ce qui est contraire au principe de diversification. La VaR ne satisfait donc pas aux critères de définition d'une mesure cohérente du risque (Artzner et al., 1999).

Par ailleurs, pour les tenants de la VaR, ces deux limites n'enlèvent rien au fait que la VaR est, conceptuellement, simple et facile à interpréter. De plus, elle présente au contraire

l'avantage des mesures de risque traditionnelles, comme la variance d'être du type downside<sup>1</sup>. Elle est alors compatible avec une représentation cohérente du choix de projets d'investissements en contexte d'incertitude. La représentation correspond à celle du principe de Safety First initialement introduit par Roy (Roy 1952). En effet, la rationalité face à l'incertitude consisterait, pour un individu averse au risque à limiter avant tout la probabilité du désastre de son portefeuille d'investissements, plutôt que de maximiser à la Von Neumann et Morgenstern (Von Neumann et Morgenstern 1944) une quelconque fonction d'utilité. Au travers de la réserve formulée par Roy, une justification de la préférence de la VaR à la variance comme outil réglementaire d'évaluation du risque de marché est entrevue. Enfin, Danielsson (Danielsson et al 2005) montrent que la VaR est, généralement, sous-additive pour des portefeuilles caractérisés par des propriétés similaires aux faits stylisés repris dans la littérature (distributions leptokurtiques).

De plus, il est possible de s'interroger, d'une part sur le choix du niveau  $\varphi$ , et d'autre part, sur le niveau réel des pertes, lorsque la VaR est dépassée. Pour remédier aux défauts de la VaR, d'autres instruments y liés ont vu le jour qui sont des extensions de la VaR notamment la méthode WCS (Worst Case Scenario) ou Maximum loss, la VaR Conditionnelle (CVaR), la Tail Value at Risk (TVaR), la Conditional Tail Expectation (CTE) (J-C. Bouetté and J-F. Chassagneux, 2005), l'Expected Shortfall (ES) et les mesures de Wang (J-C. Bouetté and J-F. Chassagneux, 2005) liées à la VaR.

Tous ces instruments de mesure de risques n'incorporent pas le contexte économique et de nos jours avec les crises chroniques, un modèle de décision sera efficace s'il arrive à tenir compte des facteurs exogènes.

### 3. CALCUL DE LA VaRC

La VaRC est une mesure de la perte potentielle qui peut survenir à la suite des mouvements adverses des prix de marché. Elle permet de répondre à la question suivante :

Combien l'établissement financier peut-il perdre avec une probabilité  $\varepsilon$  pour un horizon de temps  $T$  fixé par rapport à un état de la nature quelconque?

En plus de deux éléments du calcul de VaR, nous ajoutons un troisième élément qui paraît indispensable pour l'évaluation du risque. Ces éléments sont :

1. la période de détention  $T$  ou "holding period" qui correspond à la période sur laquelle la variation de valeur du portefeuille est mesurée ;
2. le seuil de confiance  $\varepsilon$  du chiffre VaRC qui correspond à la probabilité de ne pas dépasser cette mesure du risque;
3. le contexte par lequel s'inscrit l'investissement.

---

<sup>1</sup>On entend généralement par downside risk une estimation de la probabilité que la valeur d'un actif ou d'un investissement baisse en réaction à de mauvaises conditions de marché. Le terme est parfois associé au montant de la perte potentielle

En considérant un actif dont la valeur à un instant  $t$  notée  $U_t(s')$  dépendante de l'état de la nature, définissons alors la perte subie sur cet actif durant une période  $[t_1; t_2]$  par :

$$Per_{t_1 t_2}(s') = U_{t_2}(s') - U_{t_1}(s') \quad (1)$$

Supposer, par ailleurs, que la valeur de cet actif et donc les pertes associées à cet actif évoluent de manière stationnaire. Ainsi, il est possible de remplacer l'intervalle  $[0, t_2 - t_1]$  et la variable  $Per$  n'aura plus pour indice que la seule durée de l'intervalle. La valeur en risque de l'actif pour la durée  $t$  et de niveau de probabilité  $\varepsilon$  et dépendante de l'état de la nature se définit comme la perte encourue maximale sur cet actif durant l'intervalle  $[0, t]$  pour une probabilité  $1 - \varepsilon$ .

$$Pr[Per_t(s') > VaRC] = 1 - \varepsilon \iff Pr[Per_t(s') \leq VaRC] = \varepsilon \quad (2)$$

Il existe donc trois paramètres dans la définition de la VaRC: la durée  $t$ , la probabilité  $\varepsilon$  et l'état de la nature  $s'$ .

$$VaRC_\varepsilon(s') = \text{Max}(U : Pr[Per_t \leq U(s')] \leq \varepsilon) \quad (3)$$

Si la variable aléatoire  $Per(s')$  suit une loi normale de moyenne  $\mu$  et d'écart type  $\sigma$ , il est possible d'écrire:

$$Pr\left[\frac{Per_t(s') - \mu}{\sigma} \leq \frac{VaRC - \mu}{\sigma}\right] = \varepsilon$$

et en notant  $Z_\varepsilon$  le quantile d'ordre  $\varepsilon$  de la distribution normale, une formule très simple de la VaR est obtenue:

$$VaRC_\varepsilon(s') = \mu + Z_\varepsilon \sigma \quad (4)$$

Comme dans la simulation historique, nous supposons que la passé se rapporte à l'horizon choisi pour cerner la distribution anticipée.

Dans l'hypothèse où les variations de prix des différents facteurs de risques sont stationnaires (J.P. Gueyié, G. Charest, et F. Mensah, 2008), il convient de bien identifier les facteurs de risque qui permettront de déterminer la valeur des actifs en portefeuille. Evaluer ensuite les variations relatives de chaque facteur de risque:

$$\Delta_t = \frac{U_t(s') - U_{t-1}(s')}{U_t(s')}, t = -T + 1, \dots, 0$$

où  $U_t(s')$  est l'utilité à la Choquet dépendante de l'état de la nature,  $v$  une mesure floue qui dans notre cas, une capacité 2-additive (B. Mayag 2008) et  $u_t(s')$  sont les Cash flows attendus au cours des années  $t = 1, \dots, T$  pour un projet d'investissement par rapport à l'état de la nature.

Les cash flows pour les différents contextes et le calcul de l'utilité à la Choquet sont donnés dans le tableau suivant :

Dans le cas discret, l'utilité à la Choquet dépendante de l'état de la nature (A. Issouf 2021) se calcule de la manière suivante :

$$U_t(s') = u(s'_0) + \sum_{i=1}^n (u(s'_i) - u(s'_i))v(u \geq u(s'_i))$$

Le tableau suivant résume le calcul de l'utilité à la Choquet dépendante de l'état de la nature

Tableau 1. *Tableau de calcul de l'utilité à la Choquet*

**Table N° 01 : Tableau de calcul de l'utilité à la Choquet**

| $S'$   | $s'_0$           | $s'_1$           | ...   | ... | ...   | ...      | ... | $s'_m$           | $U_t(s')$  |
|--------|------------------|------------------|-------|-----|-------|----------|-----|------------------|------------|
| $S$    | $s_1$            | ...              | $s_j$ | ... | $s_n$ | $s_{12}$ | ... | $s_{ij}$         |            |
| $-T$   | $u_{-T}(s'_0)$   | $u_{-T}(s'_1)$   | ...   | ... | ...   | ...      | ... | $u_{-T}(s'_m)$   | $U_{-T}$   |
| $-T+1$ | $u_{-T+1}(s'_0)$ | $u_{-T+1}(s'_1)$ | ...   | ... | ...   | ...      | ... | $u_{-T+1}(s'_m)$ | $U_{-T+1}$ |
| ...    | ...              | ...              | ...   | ... | ...   | ...      | ... | ...              | ...        |
| 0      | $u_0(s'_0)$      | $u_0(s'_1)$      | ...   | ... | ...   | ...      | ... | $u_0(s'_m)$      | $U_0$      |

Les données présentes nous permettent alors d'estimer la distribution des valeurs futures des facteurs de risque.

$$U_t = U_0(s') \cdot (1 + \Delta_t), t = -T + 1, \dots, 0.$$

et donc la distribution de perte encourue est:

$$L_t = U_0(s') - U_t(s') = -\Delta_t \cdot U_0(s'), t = -T + 1, \dots, 0 \quad (5)$$

La VaR correspond à la valeur de la perte subie au seuil choisi se trouvant, après un arrangement par ordre croissant au rang  $(\alpha \times N)$ .

#### 4. ILLUSTRATION ... :

Calculons la valeur en risque pour les projets suivants : commercialisation du Riz ( $P_1$ ), production de pomme de terre ( $P_2$ ) et commercialisation de pomme de terre ( $P_3$ ). L'utilité est représentée par le cash flow brut des années futur et ceci en tenant compte des états de la nature qui sont représentés par : Cyclone, Inondation, Sécheresse et Crise politique. Prenons comme "état de la nature" les phénomènes suivants: Cyclone( $s_1$ ), Insécurité ( $s_2$ ), Sécheresse( $s_3$ ) et Crise politique( $s_4$ ) et ces interactions possibles et susceptibles d'apparaître.

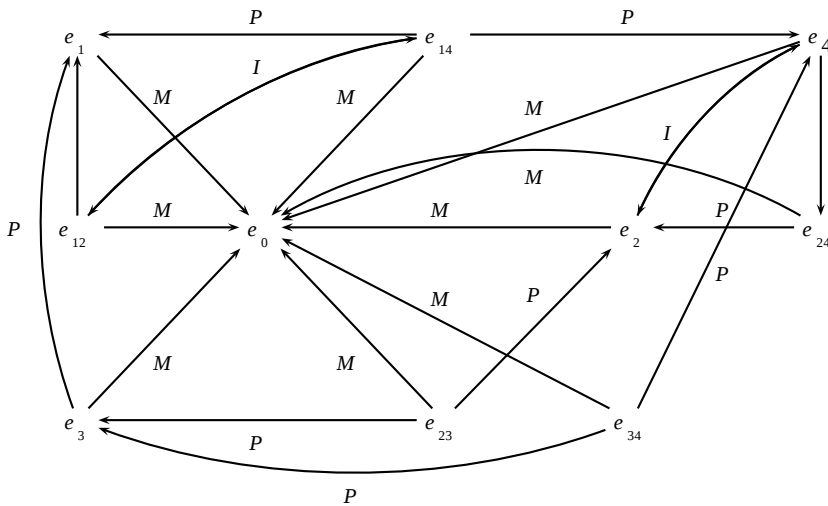
Tableau 2. *Exemple de choix de projet à la Choquet*

| $S'$  | $P1$   | $P2$   | $P3$   |
|-------|--------|--------|--------|
| $s_0$ | 36190  | 246310 | 249037 |
| $s_1$ | 366522 | 309581 | 337080 |

|          |         |        |        |
|----------|---------|--------|--------|
| $s_2$    | 100000  | 239190 | 270520 |
| $s_3$    | 342522  | 304671 | 320581 |
| $s_4$    | 370456  | 382925 | 393715 |
| $s_{12}$ | 347377  | 279109 | 365444 |
| $s_{14}$ | 383791  | 223247 | 223667 |
| $s_{23}$ | 1260437 | 227863 | 351226 |
| $s_{24}$ | 339029  | 285474 | 374863 |
| $s_{34}$ | 366506  | 296213 | 387963 |

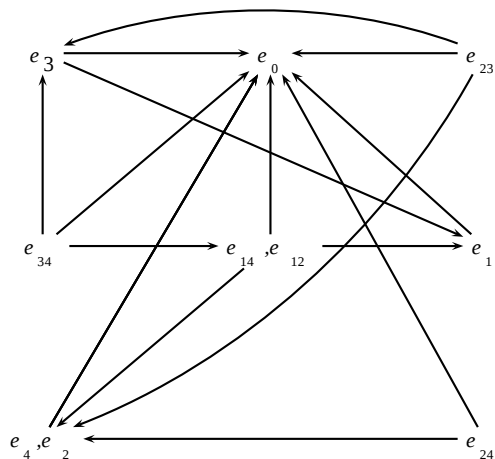
Dans notre exemple où  $N = 4$ , le graphe de préférences, des indifférences et des monotonies pour l'agent décideur sont donnés par le graphe suivant.

**Figure N°01 : Graphe G**



En vérifiant la propriété de monotonie de l'information préférentielle [19] et en construisant l'ensemble de toutes les composantes fortement connexes du graphe G, nous obtenons le graphe  $G'$  suivant :

Figure N°02 : Graphe G'



Et d'après ce graphe, nous avons calculé les valeurs de  $\mu$  et  $\nu$  (équations ?? et ?? présentées dans la section 3).

Table N° 03 : Tableau de calcul de l'utilité à la Choquet

| $S'$      | $s'_0$     | $s'_1$          | $s'_2$          | $s'_3$           | $s'_4$          |
|-----------|------------|-----------------|-----------------|------------------|-----------------|
| $\varphi$ | $\{\Phi\}$ | $\{1\}$         | $\{2\}$         | $\{3\}$          | $\{4\}$         |
| $\mu$     | 0          | 8               | 8               | 64               | 8               |
| $\nu$     | 0          | $\frac{8}{144}$ | $\frac{8}{144}$ | $\frac{64}{144}$ | $\frac{8}{144}$ |
| -2        | 36190      | 366522          | 100000          | 342522           | 370456          |
| -1        | 246310     | 309581          | 239190          | 3046671          | 382925          |
| 0         | 249037     | 337080          | 270520          | 320581           | 393715          |

Suite du Table N° 03

| $s'_{12}$        | $s'_{14}$        | $s'_{23}$        | $s'_{24}$        | $s'_{34}$        | $U_i(s)$   |
|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------|
| $\{1,2\}$        | $\{1,4\}$        | $\{2,3\}$        | $\{2,4\}$        | $\{3,4\}$        |            |
| 64               | 64               | 64               | 64               | 64               |            |
| $\frac{64}{144}$ | $\frac{64}{144}$ | $\frac{64}{144}$ | $\frac{64}{144}$ | $\frac{64}{144}$ |            |
| 347377           | 383791           | 1260437          | 339029           | 366506           | 779845,444 |
| 279109           | 223247           | 227863           | 285474           | 296213           | 360953.383 |
| 365444           | 223667           | 351226           | 374863           | 387963           | 545014.222 |

En application de l'algorithme de simulation historique sur les utilités à la Choquet dépendante de l'état de la nature, la valeur en risque est de :  $-708813.14$ .

En ignorant le contexte économique le calcul de la valeur en risque par simulation historique nous donne en moyenne une valeur en risque de  $-439143.056$ . Comparer à la valeur en risque dépendante de l'état de nature, nous avons une mesure de risque extrême.

### 5. CONCLUSION :

Ces dernières années, après les faillites bien connues de certaines grandes banques, plusieurs institutions financières, dont les activités de finance internationale peuvent se chiffrer en milliards de dollars, commencèrent à adopter la VaR pour gérer, quantifier et établir des informations correctes sur les portefeuilles qu'elles détiennent. La mesure de la VaR fut également promue par le Comité de Bâle, dans ses amendements de 1996 sur les modèles Internes de mesure du risque. L'utilisation de la VaR à des fins de contrôle de risque interne par les banques s'est surtout répandue, après les événements du mois de février 1994. Avant cette date, une banque exerçant des activités obligataires pouvait raisonnablement évaluer le risque de ses positions à quelques pourcents près et espérer compenser partiellement la perte dans une monnaie par un gain dans une autre.

Aujourd'hui, les économies sont plus que jamais en situation d'inquiétude et ces crises incessantes alimentent les doutes sur les modèles économiques. La contribution de tout un chacun dans l'analyse de ces modèles permettra à répondre, d'une manière efficace, aux questions économiques. Ce modèle de risque que nous venons de développer permettra non seulement, aux institutions comme la microfinance de posséder des instruments capables de répondre à leur besoin et assurer une gestion efficace.

Cette mesure se démarque des autres par sa capacité à incorporer le contexte économique dans la mesure du risque. C'est un modèle est subjectif dans le sens où le gérant doit, dans la définition de la mesure floue, préciser ces préférences. La subjectivité du modèle implique l'accompagnement de cette intelligence artificielle par l'homme d'où la complémentarité homme machine

### BIBLIOGRAPHIE :

#### Ouvrage :

1. **BOUETTE J.C. AND CHASSAGNEUX J. F.**, « *Mesures de risque et allocation optimale de capitale* », ENSAE 2005 pp-66.
- 2.

#### Articles :

3. **ABDOU I.**, « *Utilité à la Choquet dépendante de l'état de la nature*», Revue Africaine de Recherche en Informatique et Mathématiques Appliquées, 17 décembre 2021, Volume 32 - 2019 - 2021 - <https://doi.org/10.46298/arima.5898> pp. 1-12
4. **BALBÂS A., IBNANEZ A.**, « *When can you Immunize a Bond Portfolio* Journal of Banking & Finance Volume 22, Issue 12, December 1998, Pages 1571-1595
5. **FONG G. H.,VASICEK. A. O** , « *A Risk Minimizing Strategy for Portfolio Immunization*», The Journal of Finance
6. **JORION P.**« *Risk2: Measuring the risk in value at risk*», Financial Analysts Journal; Nov/Dec 1996; 52, 6; ABI/INFORM Global pp. 47
7. **PRITSKER M** « *Evaluating Value at Risk Methodologies: Accuracy versus Computational Time*», Journal of Financial Services ( 1997 ) Research 12, 201–242
8. **SZEGO G.**, « *Measures of risk*», Journal of Banking & Finance , 2002, vol. 26, numéro 7, 1253-1272
9. **ARTZNER P, DELBAEN F, EBER J-M, HEATH D.** « *Coherent Measures of Risk*», Finance mathématique 1999
10. **Roy, A.D.**, « *Safety First and the Holding of Assets*», Econometrica, (1952) 20, 431-449. <http://dx.doi.org/10.2307/1907413>
11. **NEUMANN J. V. AND MORGENSTERN O.**, « *Theory of Games and Economic Behavior*», Princeton University Press 1994
12. **DANIELSSON J, BN JORGENSEN, S MANDIRA.**, « *Subadditivity re-examined: the case for Value-at-Risk*», 2005 - [ecommons.cornell.edu](http://ecommons.cornell.edu);