

corrigés. Tout au plus, elle s'identifie au constat selon lequel le pays membre financièrement assisté fait ou a fait des *efforts raisonnables* pour reprendre ses remboursements.

«Une position viable de la balance extérieure note le Fonds, signifie un déficit des comptes courants qui peut être soutenu par des entrées de capitaux à des conditions compatibles avec les perspectives de développement du pays et sans que celui-ci ait à recourir à des restrictions aux échanges et aux paiements qui accentuent plutôt qu'elles ne corrigent les distorsions existantes. La stratégie corrective prévoit une réorientation de l'économie vers la croissance durable et évite des politiques purement déflationnistes qui pourraient avoir un effet délétère sur l'investissement et ne pas encourager le transfert requis de ressources vers le secteur extérieur».⁴

Cette longue observation précise davantage ce qu'attend le Fonds du pays membre, lorsqu'il lui apporte son assistance financière : *dégager la capacité de s'acquitter de ses obligations internationales*.

L'échec ou la réussite des actions d'ajustement doit donc s'analyser seulement par rapport à cette *ordonnance*. Les conséquences intérieures de ce type d'actions ne semble pas déranger, outre mesure, les autorités internationales, bien que leurs déclarations se nourrissent du souhait de voir les économies débiteuses parvenir à un niveau de croissance qui les mette à l'abri de crises graves.

⁴ F.M.I., Bulletin de Sept. 1985, P.1.

La tarification par l'expérience a posteriori ; système bonus - malus. Etude empirique : cas de la S.A.A.

A. Latrèche

Introduction

L'objet de ce travail consiste à modéliser le risque d'accident en s'appuyant sur des techniques qui n'ont pas encore été utilisées en Algérie, alors que celles-ci ont déjà donné des résultats dans certains pays développés, notamment la France et le Canada (D.Richaudeau 1997; G.Dionne, C.Vanessa 1989; J.C Besson et C.Partrat1992).

Ces techniques utilisent des données individuelles et, en particulier, une *variable dépendante* dont la valeur est le résultat du dénombrement des réalisations d'un certain événement ; ici, le nombre d'accidents.

1. Modèle de base : l'analyse statistique

La distribution de Poisson est souvent utilisée pour la description des événements indépendants, tels que les accidents automobiles.

Soit la variable aléatoire X_i représentant le nombre d'accidents sur une période pour un individu i alors la distribution de X_i est donnée par:

$$P_{\lambda}(X_i = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \quad x=0, 1, 2, \dots (1).$$

x est la réalisation de la variable aléatoire X_i pour l'individu i sur une période donnée et λ , un paramètre inconnu à estimer¹. λ est le nombre moyen d'accidents par période. (La variance étant aussi égale à λ)

La formulation précédente (1) présente deux inconvénients. D'une part, le modèle repose sur une hypothèse d'indépendance entre les

¹ Chargé de cours-INPS.

² Le paramètre λ peut être estimé par la méthode des moments ou par la méthode du maximum de vraisemblance

événements successifs, et d'autre part, l'espérance et la variance de X_i sont égales, ce qui implique que chaque individu a le même risque moyen.

Ces deux propriétés ne correspondant pas aux observations réalisées sur les accidents de la route.

1.1. Loi inverse Gaussienne généralisée (IGG)

A. Fonction de Bessel de 3^e espèce modifiée

La fonction de Bessel de 3^e espèce modifiée K_ξ d'indice ξ réel, définie sur $\mathfrak{R}^+$, a pour expression (ERDELYI-MAGNUS, 1953)

$$K_\xi(u) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} s^{\xi-1} e^{-\frac{u}{2}\left(s + \frac{1}{s}\right)} ds$$

B. Fonction densité de la loi IGG

La densité de la loi IGG (JORGENSEN, 1982) est exprimée en fonction de la fonction K_ξ :

$$f_\xi(s) = \frac{1}{2\mu^\xi K_\xi(\mu/\beta)} s^{\xi-1} e^{-\frac{1}{2\beta}\left(s + \frac{\mu^2}{s}\right)}, s > 0 \quad (\xi \in \mathfrak{R}, \mu > 0, \beta > 0)$$

Et pour moyenne $\mu \frac{K_{\xi+1}(\mu/\beta)}{K_\xi(\mu/\beta)}$

1.2. Loix de Poisson-mélange

Soit la variable aléatoire X_i représentant le nombre d'accidents sur une période pour un individu i . Dans le paragraphe (II.1) X_i est supposé distribué selon une loi de poisson $\wp(\lambda)$, λ étant la réalisation

d'une variable aléatoire réelle $\Lambda > 0$ dite variable de structure de la classe.

Si Λ a pour densité g_θ , dépendant d'un paramètre $\theta \in \Theta$, la loi X_i est donnée par :

$$p_x = P(X_i = x) = \int_0^{+\infty} P_x(X_i = x) g_\theta(\lambda) d\lambda, \quad x \in \mathbb{N}$$

De moyenne $m = E(X_i) = E(\Lambda)$ et de variance $\sigma^2 = V(X_i) = V(\Lambda) + E(\Lambda)$

A. Loi de Poisson-Gamma

Si on suppose, pour l'ensemble des individus, que le paramètre de la loi de Poisson satisfait à une loi Gamma $\gamma(r, \alpha)$, de paramètre $\theta = (r, \alpha)$: $r, \alpha > 0$ de densité :

$$g_\theta(\lambda) = \frac{\alpha^r}{\Gamma(r)} \lambda^{r-1} e^{-\alpha\lambda}, \quad \lambda > 0$$

($\Gamma(r)$ étant la fonction Gamma), avec $E(\Lambda) = \frac{r}{\alpha}$, $V(\Lambda) = \frac{r}{\alpha^2}$. Alors le nombre d'accidents à une période donnée se répartit selon une loi binomiale négative $BN\left(r, \frac{\alpha}{\alpha+1}\right)$ telle que :

$$p_x = P(X_i = x) = \frac{\Gamma(x+r)}{x! \Gamma(r)} \frac{\alpha^r}{(1+\alpha)^{x+r}}, \quad x \in \mathbb{N}$$

avec $m = E(X_i) = \frac{r}{\alpha}$, $\sigma^2 = V(X_i) = \frac{r}{\alpha} \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)$

B. Loi de Poisson inverse Gaussienne Généralisée

Cette loi est appelée aussi loi de Sichel, elle est obtenue quand Λ est distribuée selon une loi $IGG(\xi, \mu, \beta)$ par:

$$p_\lambda = P(X_i = x) = \frac{\mu^x}{x!} \frac{K_{\xi+x} \left(\frac{\mu}{\beta} [1+2\beta]^{1/2} \right)}{K_\xi \left(\frac{\mu}{\beta} (1+2\beta)^{\frac{\xi+x}{2}} \right)}$$

$$\text{avec } m = E(X_i) = \mu \frac{K_{\xi+1} \left(\frac{\mu}{\beta} \right)}{K_\xi \left(\frac{\mu}{\beta} \right)},$$

$$\sigma^2 = V(X_i) = \frac{\mu}{K_\xi \left(\frac{\mu}{\beta} \right)} \left[K_{\xi+2} \left(\frac{\mu}{\beta} \right) - \frac{K_{\xi+1} \left(\frac{\mu}{\beta} \right)}{K_\xi \left(\frac{\mu}{\beta} \right)} \right]$$

Les probabilités p_λ peuvent se déduire par la relation de récurrence suivante:

$$\left\{ \begin{aligned} p_0 &= \frac{K_\xi \left(\frac{\mu}{\beta} [1+2\beta]^{1/2} \right)}{K_\xi \left(\frac{\mu}{\beta} [1+2\beta]^{\xi/2} \right)} \\ p_1 &= \mu \frac{K_{\xi+1} \left(\frac{\mu}{\beta} [1+2\beta]^{1/2} \right)}{K_\xi \left(\frac{\mu}{\beta} [1+2\beta]^{\frac{\xi+1}{2}} \right)} \\ p_x &= \frac{2\beta(x-1)(\xi+x-1)}{(1+2\beta)x(x-1)} p_{x-1} + \mu^2 p_{x-2}, \quad x \geq 2 \end{aligned} \right.$$

2. Système de bonus-malus

Depuis leur introduction il y a quelques années, les clauses de bonus-malus constituent un élément important de la tarification en assurance automobile.

Le principe de ces clauses est d'une part, d'offrir une diminution de prime aux assurés n'ayant déclaré aucun accident responsable, et d'autre part, de pénaliser les assurés accidentés en fonction du nombre de leurs accidents.

Soit un risque dont la fréquence annuelle des accidents est distribuée selon une loi de Poisson-mélange. Si pour tout j entier on désigne par X_j^i cette fréquence pour la $j^{ème}$ année du $i^{ème}$ individu, on dispose de la réalisation $(x_1^i, x_2^i, \dots, x_j^i)$ du variable aléatoire

$(X'_1, X'_2, \dots, X'_t)$ correspondant à l'observation de ce risque pendant t années.

La règle optimale du système Bonus-Malus donnera, connaissant l'information sur les t années $(X'_1, X'_2, \dots, X'_t)$ le meilleur estimateur des nombres d'accidents moyen à la période $(t+1)$. Notant cet estimateur par $\tilde{\lambda}_t^{t+1}(X'_1, X'_2, \dots, X'_t)$

La quantité $\tilde{\lambda}_t^{t+1}(X'_1, X'_2, \dots, X'_t)$ (Estimateur de Bayes:

l'espérance mathématique a posteriori de λ est donnée par:

$$\tilde{\lambda}_t^{t+1}(X'_1, X'_2, \dots, X'_t) = \int_0^{+\infty} \lambda f(\lambda / X'_1, X'_2, \dots, X'_t) d\lambda$$

3. Détermination de l'estimateur de Bayes pour la loi Poisson-mélange

A. La variable de structure $\Lambda \rightarrow \gamma(r, \alpha)$

En appliquant la loi binomiale négative, la distribution à posteriori de λ est la loi Gamma, de densité :

$$f(\lambda / X'_1, X'_2, \dots, X'_t) = \frac{(\alpha + t)^{r+\tilde{X}_t} \lambda^{r+\tilde{X}_t-1} e^{-\lambda(\alpha+t)}}{\Gamma(r+\tilde{X}_t)}$$

D'où

$$\tilde{\lambda}_t^{t+1}(X'_1, X'_2, \dots, X'_t) = \frac{r+\tilde{X}_t}{\alpha+t} = \frac{r}{\alpha} \left[\frac{r+\tilde{X}_t}{r+t} \right] \frac{1}{\alpha}$$

$$\text{Où } \tilde{X}_t = \sum_{j=1}^t X'_j$$

B. La variable de structure $\Lambda \rightarrow IGG(\mu, \xi, \beta)$

Dans ce cas, la loi a posteriori de λ connaissant les $X'_1, X'_2, \dots, X'_t$ est la fonction densité :

$$f(\lambda / X'_1, X'_2, \dots, X'_t) = \frac{e^{-\lambda a_t(\theta)} \lambda^{\tilde{X}_t} g_\theta(\lambda)}{\int_0^{+\infty} e^{-\lambda a_t(\theta)} \lambda^{\tilde{X}_t} g_\theta(\lambda) d\lambda}$$

$$\text{Où } a_t(\theta) = \sum_{i=1}^t g^{i-1} = \begin{cases} t & \text{si } g = 1 \\ \frac{1-g^t}{1-g} & \text{si } g \neq 1 \end{cases}$$

Avec g : le paramètre représentant le taux de variation de la fréquence moyenne des accidents de la classe d'une année à l'autre

La loi de Λ sachant $X'_1 = x'_1, X'^2 = x'_2, \dots, X'_t = x'_t$ est donc une loi Inverse Gaussienne généralisées (J.L.BESSON, C.PARTRAT, 1992)

$$1. \quad IGG\left(\sum_{j=1}^t x'_j - \frac{1}{2}, \mu[1 + 2\beta a_t(\theta)], \beta[1 + 2\beta a_t(\theta)]^{-1}\right)$$

De l'expression de la moyenne d'une loi Gaussienne Généralisée donnée en (II.1.1.b). On déduit :

$$\mu^{t+1}(X'_1, X'_2, \dots, X'_t) = \mu[1 + 2\beta a_t(\theta)] \frac{K_{\sum_{j=1}^t x'_j + \frac{1}{2}}(\mu[1 + 2\beta a_t(\theta)] / \beta[1 + 2\beta a_t(\theta)])}{K_{\sum_{j=1}^t x'_j - \frac{1}{2}}(\mu[1 + 2\beta a_t(\theta)] / \beta[1 + 2\beta a_t(\theta)])}$$

4. Estimation des paramètres

Si k est la plus grande valeur observée de X_i et ν_j le nombre d'observation de X_i égales à j ($j = 0, 1, \dots, k$) avec $\sum_{j=0}^k \nu_j = K$ où K est la taille d'échantillon.

La moyenne et la variance empirique de X_i sont respectivement:

$$\bar{x} = \frac{1}{K} \sum_{j=0}^k j \nu_j, \quad \hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{K} \sum_{j=0}^k \nu_j (j - \bar{x})^2$$

A. Poisson-Gamma

Ce cas particulier détaillé dans (LEMAIRE, 1985). Pour K - échantillon $(\hat{\sigma}_x^2 > \bar{x})$ l'estimateur $(\tilde{r}, \tilde{\alpha})$ de (r, α) est donné par la méthode des moments :

$$\tilde{r} = \frac{\bar{x}^2}{\hat{\sigma}_x^2 - \bar{x}}, \quad \tilde{\alpha} = \frac{\bar{x}}{\hat{\sigma}_x^2 - \bar{x}}$$

B. Poisson-IGG

L'estimateur $\tilde{\theta} = (\tilde{\xi}, \tilde{\mu}, \tilde{\beta})$ de $\theta = (\xi, \mu, \beta)$ par la méthode des moments est déterminé par les moments factoriels (WILLMOT, 1986)

$$m_{[j]} = E(X(X-1)\dots(X-j+1)) = \mu^j \frac{K_{\xi+1} \left(\frac{\mu}{\beta} \right)}{K_{\xi} \left(\frac{\mu}{\beta} \right)}, \quad j \geq 1$$

5. Analyse empirique

A. Description de l'échantillon

L'échantillon aléatoire² contient de l'information sur 1000 assurés. Pour chaque assuré, nous connaissons: le nombre des accidents des individus durant l'année (91, 92, 93).

B. Analyse des résultats

B1. Modèle de Poisson-Gamma

L'estimateur $(\tilde{r}, \tilde{\alpha})$ de (r, α) donné par la méthode des moments est:

$$\tilde{r} = 0.6789, \quad \tilde{\alpha} = 7.0350$$

B2. Modèle de Poisson-IGG

L'estimateur $\tilde{\theta} = (\tilde{\xi}, \tilde{\mu}, \tilde{\beta})$ de $\theta = (\xi, \mu, \beta)$ donné par la méthode des moments est:

$$\tilde{\xi} = 0.9176, \quad \tilde{\mu} = 0.1321, \quad \tilde{\beta} = 0.2112$$

C. Comparaison des fréquences observées et théoriques

C1. Poisson-Gamma ($\tilde{r} = 0.6789, \tilde{\alpha} = 7.0350$)

² Données obtenues par la SAA: unité de Belcourt.
Les 1000 Données ont été choisies de manière aléatoire (en utilisant la table des nombre au hasard) parmi 8340 données.

Nombres d'accidents	Fréquence observée	Loi Poisson ----- Fréquence théorique	Loi Poisson-Gamma ----- Fréquence théorique
0	827	825.70	827.10
1	105	105.70	106.00
2	45	46.72	47.11
3	16	17.02	16.20
4	7	4.86	3.59
> 4	0.00	0.00	0.00
Total	1000	1000	1000
		$\chi^2_c = 6.58$	$\chi^2_c = 3.29$
		$\chi^2_{2.95} = 5.99$	$\chi^2_{1.95} = 3.84$

C.2. Poisson-IGG ($\tilde{\xi} = 0.9176$, $\tilde{\mu} = 0.1321$, $\tilde{\beta} = 0.2112$)

Nombres d'accidents	Fréquence observée	Loi Poisson ----- Fréquence théorique	Loi Poisson-IGG ----- Fréquence théorique
0	827	824.70	825.60
1	105	112.30	110.20
2	45	46.21	45.70
3	16	14.60	13.30
4	7	2.19	5.20
> 4	0.00	0.00	0.00
Total	1000	1000	1000
		$\chi^2_c = 30.43$	$\chi^2_c = 1.42$
		$\chi^2_{2.95} = 5.99$	$\chi^2_{1.95} = 3.84$

D. La prime pure à posteriori (La prime de Bayes)

D.1. Modèle de Poisson-Gamma

La prime pour l'année $(t + 1)$ est proportionnelle à l'espérance de Bayes de λ [(G.DIONNE (1989), J.LEMAIRE (1995))]

$$\tilde{P}_t^{t+1}(X_t^1, X_t^2, \dots, X_t^I) = 100 \left[\frac{\tilde{r} + Y}{\tilde{r} + \frac{Y}{\alpha}} \right]$$

où la prime de base est égale à 100

Tableau 1 : Modèle de Poisson-Gamma

$t \setminus \tilde{X}_t$	0	1	2	3	4
0	100				
1	91.83	183.97	264.82	317.60	447.15
2	84.35	155.62	183.75	278.73	421.60
3	74.73	139.37	168.07	240.50	356.14
4	70.72	127.87	133.32	195.16	270.22

D.2.Modèle de Poisson-IGG

La prime pour l'année $(t + 1)$ est donnée par (LUC

TREMBLAY) :

$$\tilde{P}_t^{t+1}(X_t^1, X_t^2, \dots, X_t^t) = 100 \cdot \mu \frac{Q_{\xi}(\mu / \beta)}{Q_{\xi_0}(\mu_0 / \beta_0)}$$

où $Q_{\xi}(\mu / \beta) = \frac{K_{\xi+1}(\mu / \beta)}{K_{\xi}(\mu / \beta)}$ et ξ_0, μ_0, β_0 sont les estimateurs³ de

ξ, μ, β pour l'année $t = 0$

Tableau 2 : Modèle de Poisson-IGG

$t \setminus \tilde{X}_t$	0	1	2	3	4
0	100				
1	78.55	142.45	217.63	234.19	270.25
2	74.25	100.00	129.67	165.32	192.17
3	71.35	82.80	109.82	137.18	160.00
4	60.60	70.45	100.97	129.14	134.12

³ $\xi_0 = 0.7521, \mu_0 = 0.1020, \beta_0 = 0.2559$

Conclusion

Les principales observations qu'appelle notre analyse sont les suivantes:

- Nos résultats montrent pour le modèle Poisson-Gamma que la prime ne dépend que du nombre total d'accidents sur les t années et non de leur séquence.

- Le nombre d'observations étant très important, le test du χ^2 rejette l'ajustement par la loi de Poisson.

- Dans le tableau 1, la prime estimée, pour $(t = 1, \tilde{X}_t = 2)$ est 264.82 et dans le tableau 2, la prime estimée pour $(t = 1, \tilde{X}_t = 2)$ est 217.63. Ceci explique l'effet de changement de la loi a priori sur la prime

- L'adéquation est donc globalement meilleur pour la loi de Poisson-IGG que pour la loi de Poisson-Gamma (test de ratio)

Deux extensions à cette étude sont possibles.

- Une première consisterait à améliorer la fiabilité statistique des résultats présentés dans ce travail par la construction d'un système bonus-malus permettant d'introduire les caractéristiques des individus à partir de la loi a priori

- Une seconde extension serait l'étude de la tarification a posteriori dont les paramètres de la loi a priori sont en fonction du temps t (c'est-à-dire l'estimation des paramètres pour chaque période)

Le marché financier, un soutien de la croissance et un outil de privatisation.

M.Tehami*

1. La présente note de stratégie se propose de mettre en place un marché des capitaux en Algérie en vue de soutenir :
 - la croissance économique par le dépassement de l'économie d'endettement et l'avènement d'une économie des marchés financiers ;
 - l'ouverture d'opportunités pour la petite épargne de participer directement à la distribution des résultats financiers attendus des programmes de privatisation du secteur public et des nombreuses mesures de mise à niveau de l'entreprise algérienne (privée ou publique) prévues, dans le cadre de sa mise en condition de compétition imminente et ardue avec l'entreprise européenne.

2. Afin d'améliorer la compréhension des expressions utilisées et la définition des outils auxquels il est fait référence tout au long de la présente note, il nous faut rappeler qu'on entendra par :

- *économie d'endettement*, une économie où la source principale de financement des projets d'investissement et des entreprises est le crédit bancaire, sans prise de participation substantielle de leur part au capital ni, par conséquent, au partage des risques financiers (risque de taux d'intérêt et risque de change). des risques commerciaux (risques de prix et de concurrence) et des risques industriels (risques d'innovation) ainsi laissés, totalement, à la seule charge de l'emprunteur - promoteur. Il s'ensuit des rigidités dans les procédures d'accès au crédit (notamment en matière de présentation de cautions et d'hypothèques), des incertitudes dans la programmation de la disponibilité des ressources, l'absence de mécanismes de réajustement des échéanciers de remboursement et - c'est une conséquence - un coût moyen plus élevé de mobilisation des capitaux.

* Maître de conférences-INPS.

Bibliographie

- BESSON (J.L.) et PARTRAT (C)** (1992); Trend et systèmes de bonus-malus. Astin bulletin, vol. 22, No 1, 1992
- DIONNE (G) et VANASSE (C)** (1989); A généralisation of Automobile Insurance Rating Models; The Negative Binomial Distribution With a Regression component. Astin Bulletin, 19, pp199-212
- ERDELYI (A) et MAGNUS (W)** (1953); Higher transcendental functions. Vol. 2, Mac Graw Hill
- JORGENSEN (B)** (1982); Statistical properties of the generalized Inverse Gaussian distribution. Lecture Notes in Statistics, Vol. 9, Springer Verlag.
- LEMAIRE (J)** (1985); Automobile Insurance Actuarial Models, Kluwer Nijhoff Publishing.
- RICHARDEAU (D)** (1997);; Modélisation du risque d'accident automobile. Cahier de recherche (LAMIA) Paris, pp1-17
- TREMBLAY (L)** (1992); Using The Poisson Inverse gaussian in Bonus-Malus Systems. Astin bulletin, Vol. 22, No. 1, 1992
- WILLMOT (G)** (1986); Mixed compound Poisson distributions. Astin bulletin 16-s, 59-79.