GESTION OPTIMAL DES FINANCES PUBLIQUES

MEDJTOH DIB Fatiha
Maitre de conférence classe B a l' ENSSEA

RESUME :

La conduite de la politique budgétaire et l'appréciation du déficit acceptable et des marges de manœuvre en fonction du cycle économique et de la dette publique accumulée sont des sujets réguliers de controverse. Tout changement de cette conduite entraine une dépense d'énergie importante et constitue un risque pour la crédibilité de la politique économique. Ceci suggère que le Gouvernement est soumis à des coûts d'ajustements importants sur les taux d'imposition comme sur les montants et l'orientation de la dépense.

Pour cela ce présent travail consiste à déterminer pour chaque année une séquence de dépenses et de recettes pour le gouvernement en réduisant au maximum les coûts d'ajustements liés à cette nouvelle politique budgétaire et aussi de quantifier leur impact sur l'évolution de la dette, durant une période donnée.

Mots clés : dépenses publique – recettes publiques- dette- taux d'ajustement structurel-contrôle optimal

INTRODUCTION :

L'effondrement du prix du pétrole sur le marché mondial en 2014 a révélé au grand jour la crise profonde de l'économie Algérienne.

Cette crise est antérieure à la chute brutale des recettes d'exportation du pays mais elle devenue plus évidente depuis cette date.

Désormais, l'économie Algérienne se trouve dans une situation caractérisé par :

- Les prix à la consommation ont augmenté de 8,1% depuis août 2015 à juillet 2016.
- Le rythme annuelle d'inflation (août 2015 à juillet 2016/ août 2014 à juillet 2015) se situe à 5,5% et que les prix à la consommation ont augmenté de 6,3% durant les sept premiers mois de 2016. Au rythme actuel, le taux d'inflation devrait dépassait les 10% à la fin de l'année.

Ainsi, l'inflation accélère et contrarie le discours du gouvernement qui pense pouvoir contenir le déficit budgétaire en dévaluant la monnaie nationale.

Devant l'approfondissement continu de ces déséquilibres, l'Etat se voit contraint d'adopter une politique d'ajustement de son économie.

Parmi les instruments nécessaires qu'utilise l'Etat afin de corriger ces déséquilibres est la politique budgétaire, SAMUELSON la définit comme suit :

« Par politique budgétaire active, nous entendant le processus consistant à manipuler les impôts et les dépenses publiques aux fin de :

Contribuer à amortir les oscillations économiques.

Favoriser le maintien d'une économie progressive assurant un degré élevé d'emploi, affranchie de toute poussée excessive d'inflation »

L'ajustement au niveau de la politique budgétaire se traduit par la détermination de niveau et structure de dépenses, de même, pour les recettes, par un nouveau taux de taxation ; toutefois, cette réforme est difficile à exécuter à cause de son coût élevé par l'ajustement du taux de taxation au niveau désiré entraine une révision coûteuse des règles de fiscales, en terme de crédibilité aussi parce qu'elles conduiront à la révision du rythme de croissance des dépenses entraine des coûts d'ajustement liés à des rigidités institutionnelle, à des coût d'installation qui génèrent des délais de mise en œuvre, ce qui provoquera une baisse d'investissement et de l'activité économique en cours.

L'existence des coûts élevés conduit à des corrections progressives en termes de recettes et de dépenses de façon à tendre vers son objectif.

Ce présent travail consiste à déterminer pour chaque année une séquence de dépenses et de recettes pour le gouvernement en réduisant au maximum les coûts d'ajustements liés à cette nouvelle politique budgétaire et aussi de quantifier leur impact sur l'évolution de la dette, durant une période donnée.

A- <u>Exposé théorique du problème</u>

On suppose que le gouvernement a un objectif à long terme, à la fois sur les dépenses et sur les recettes, exprimées en pourcentage du PIB (g*, t*) ; l'existence de coûts d'ajustement importants le conduit à corriger progressivement sa situation de façon à tendre vers sa cible (g*, t*).

Les principales hypothèses du modèle :

H_1 : On admet un ajustement exponentiel de la forme :

$$t_t^{opt} = \varphi_1 t_{t-1} + (1-\varphi_1)t^*$$

$$\text{Avec : } 0 < \varphi_1 < 1$$

t_i : Recettes publiques exprimées en part du PIB à la date t.

Le gouvernement supporte sur les recettes un coût instantané quadratique à la trajectoire optimal qui s'écrit pour la période t :

$$c_{1t} = (1-c)\left[t_t - t_t^{opt}\right]^2$$

$$c_{1t} = (1-c)[(t_t - t^*) - \varphi_1(t_{t-1} - t^*)]^2$$

H_2 : On suppose que le mode d'ajustement sur les dépenses publiques exprimées en part du PIB (g_t) est symétrique à celui sur les recettes publiques :

$$g_t^{opt} = \varphi_0 g_{t-1} + (1-\varphi_0)g^*$$

$$\text{Avec : } 0 < \varphi_0 < 1$$

g_t : Dépenses publiques exprimées en part du PIB à la date t.

Le gouvernement sur les dépenses un coût symétrique à celui sur les recettes publiques, qui s'écrit pour la période t :

$$c_{2t} = c\left[g_t - g_t^{opt}\right]^2$$

$$= [(g_t - g^*) - \varphi_0(g_{t-1} - g^*)]^2$$

Donc la fonction du coût s'écrit à la date t :

$$c_t = \sum_{t=1}^{\infty} \left[\frac{(1+n)}{(1+\zeta)}\right]^t \left[c\big((g_t - g^*) + \varphi_0(g_{t-1} - g^*)\big)^2 + (1-c)\big((t_t - t^*) - \varphi_1(t_{t-1} - t^*)\big)^2\right]$$

Tel que : $\frac{(1+n)}{(1+\zeta)}$ est le facteur d'actualisation exprimé en part du PIB ;

Où : ζ : est le taux d'actualisation

n : est le taux de croissance de l'économie à long terme.

H_3 : Le taux de croissance à long terme de l'économie(n), le taux d'actualisation (ζ) et le taux d'intérêt sur la dette publique (r) sont supposés constants :

$$n_t = n, \qquad t = 1,2,\dots,N$$
$$r_t = r, \qquad t = 1,2,\dots,N$$
$$\zeta_t = \zeta, \qquad t = 1,2,\dots,N$$

H_4 : Le gouvernement finance sa dépense publique par l'impôt et par émission d'emprunt.

Dans ce modèle, on suppose que l'émission monétaire et la vente d'actifs publics font partie d'une ressource fiscale.

$\boldsymbol{H_5}$: On suppose que le gouvernement n'est soumis qu'à deux contraintes :

1- La contrainte budgétaire inter temporelle :

La contrainte budgétaire du Gouvernement à l'instant $\boldsymbol{t}$ s'écrit :

$$\boldsymbol{B_t - B_{t-1} = G_t - T_t + rB_{t-1}}$$
$$\boldsymbol{= D_t + rB_{t-1}}$$

Où : $\boldsymbol{B_t}$: La dette publique à la datte $\boldsymbol{t}$ $\boldsymbol{T_t}$: Les recettes publiques à la datte $\boldsymbol{t}$

$\boldsymbol{G_t}$: Les dépenses publiques à la datte $\boldsymbol{t}$ $\boldsymbol{r}$: Le taux d'intérêt sur la dette publique.

La contrainte budgétaire du Gouvernement en part du PIB s'écrit :

$$\boldsymbol{\frac{B_t}{PIB_t} - \frac{B_{t-1}}{(1+n)PIB_t} = \frac{D_t}{PIB_t} + \frac{rB_{t-1}}{(1+n)PIB_t}}$$
$$\boldsymbol{b_t - \frac{1}{1+n} b_{t-1} = d_t + \frac{r}{1+n} b_{t-1}}$$
$$\boldsymbol{b_t - b_{t-1}} = d_t + \boldsymbol{\frac{r-n}{1+n} b_{t-1}}$$

En résolvant par récurrence cette équation pour t>1, et en passant à la limite, on obtient quand le taux d'intérêt $(\boldsymbol{r})$ est supérieur au taux de croissance$(\boldsymbol{n})$, la contrainte budgétaire intertemporelle.

$$\boldsymbol{c_1 = \frac{1+r}{1+n_0} b_{-1} = \sum_{t=1}^{\infty} [(1+n)(1+r)]^t (t_t - g_t)}$$

Elle indique que la somme actualisé des surplus primaires futurs $(\boldsymbol{t_t - g_t})$ doit permettre le remboursement de la dette publique initiale.

Remarques

La contrainte budgétaire inter temporelle n'a de sens que si le taux d'intérêt est supérieur au taux de croissance de l'économie car si $(\boldsymbol{r})$ est supérieur à $(\boldsymbol{n})$, le ratio $\frac{\boldsymbol{dette}}{\boldsymbol{PIB}}$ croit mais à un taux décroissant jusqu'à ce qu'il arrive à un niveau stationnaire qui dépend de l'importance du déficit.

Cette contrainte budgétaire intertemporelle soulève des problèmes même dans le cas où le taux d'intérêt est supérieur au taux de croissance, car elle n'interdit pas à priori que la dette croisse à l'infini ; elle impose seulement que la dette augmente à un rythme inférieur à $\frac{\boldsymbol{1+r}}{\boldsymbol{1+n}}$ or cette situation est irréaliste, surtout quand elle est exprimée en part du PIB. Une façon de contourner partiellement cette difficulté consiste à imposer explicitement des contraintes sur les niveaux des recettes et des dépenses.

Dans la suite de l'étude, on exclura le cas où $(\boldsymbol{n})$ est supérieur à$(\boldsymbol{r})$.

2- Les contraintes sur les dépenses et les recettes

Le gouvernement est soumis à des contraintes sur $(\boldsymbol{g})$ et $(\boldsymbol{t})$; ne peut indéfiniment augmenter $(\boldsymbol{t})$ et diminuer $(\boldsymbol{g})$ car à un niveau de dépenses trop faible aura pour effet la baisse du rythme de croissance de l'économie, de même qu'un taux d'imposition trop élevé, pour cela il est nécessaire de fixer un niveau de dépenses incompressibles $\boldsymbol{g_{inf}}$ et un taux d'imposition maximal $\boldsymbol{t_{sup}}$.

La difficulté soulevée par ces contraintes est qu'elles jouent à chaque période c'est-à-dire que dans chaque période on a un niveau de dépenses minimal $\boldsymbol{g_{inf}}$, et un taux d'imposition maximal $\boldsymbol{t_{sup}}$ différents de ceux de la période précédente.

Une solution à ce problème consiste à considérer qu'elles ne sont jamais saturées et à rechercher les conditions sur les paramètres $(\boldsymbol{n})$, $(\boldsymbol{r})$ et $(\boldsymbol{\zeta})$, permettant d'obtenir ce résultat.

$$\boldsymbol{c_2}: \boldsymbol{t_{sup}} \geq \boldsymbol{t_t}$$
$$\boldsymbol{c_3}: \boldsymbol{g_t} \geq \boldsymbol{g_{inf}}$$

B- Résolution du modèle

1- Cas où il n'y a pas de coûts d'ajustement $(\boldsymbol{\theta_0} = \boldsymbol{\theta_1} = \boldsymbol{0})$

Le problème est de minimiser $\sum_{t=1}^{\infty} \left[\frac{(1+n)}{(1+\zeta)}\right]^{t} c_t$, ce qui revient à maximiser $\sum_{t=1}^{\infty} -\left[\frac{(1+n)}{(1+\zeta)}\right]^{t} c_t$

En l'absence de coûts d'ajustement, le programme s'écrit :

$$\boldsymbol{MAX} \sum_{t=1}^{\infty} -\left[\frac{(1+n)}{(1+\zeta)}\right]^{t} c_t$$

Avec :

$$c_t = c(g_t - g^*)^2 + (1 - c)(t_t - t^*)^2$$

Sous contraintes :

$\boldsymbol{c_1}$: ***la contrainte budgétaire intertemporelle***

$$c_2 : t_{sup} \geq t_t$$

$$c_3 : g_t \geq g_{inf}$$

g_{inf} : Un niveau de dépenses incompressibles t_{sup} : Un taux d'imposition maximal

a- <u>Le Gouvernement n'est pas solvable</u>

$$c_4 : \left[\frac{1+r}{1+n_0}\right] b_{-1} > \sum_{t=1}^{\infty} \left[\frac{1+n}{1+r}\right]^t \left(t_{sup} - g_{inf}\right)$$

En se plaçant immédiatement dans la situation la plus favorable (impôt maximal, dépenses minimales), le gouvernement est incapable de rembourser son endettement initial. On exclura par la suite cette situation d'insolvabilité complète.

b- <u>Le gouvernement est assez riche pour réaliser immédiatement ses objectifs</u>

Cette situation s'écrit :

$$c_5 : \left[\frac{1+r}{1+n_0}\right] b_{-1} < \sum_{t=1}^{\infty} \left[\frac{1+n}{1+r}\right]^t (t^* - g^*)$$

En se plaçant immédiatement à sa cible $(t = t^*, g = g^*)$, le Gouvernement parvient à rembourser intégralement son endettement initial, son comportement n'est donc soumis, en pratique, à aucune contrainte.

c- <u>Le Gouvernement n'est pas riche et la contrainte budgétaire est active</u>

Ce cas est le plus intéressant, car il pose la question de la conduite optimale de la politique budgétaire.

Notations : λ_t : Multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte c_3 à la date (t)

λ'_t : Multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte c_2 à la date (t)

μ : Multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte c_2 à la date (t)

Soit le Lagrangien :

$$L = \sum_{t=1}^{\infty} -\left[\frac{1+n}{1+r}\right]^t \left[c(g_t - g^*)^2 + (1-c)(t_t - t^*)^2\right] + \mu\left[-\frac{1+r}{1+n}\right] b_{-1} + \sum_{t=1}^{\infty} -\left[\frac{1+n}{1+r}\right]^t [t_t - g_t] + \lambda_t\left[g_t - g_{inf}\right] + \lambda'_t\left[t_{sup} - t_t\right]$$

$$\frac{\delta L}{\delta g_t} = 0 \Rightarrow \lambda_t = 2c\left[\frac{1+n}{1+r}\right]^t (g_t - g^*) + \mu\left[\frac{1+n}{1+r}\right]^t$$

$$\frac{\delta L}{\delta t_t} = 0 \Rightarrow \lambda'_t = 2(1-c)\left[\frac{1+n}{1+r}\right]^t (t_t - t^*) - \mu\left[\frac{1+n}{1+r}\right]^t$$

Comme on l'a vu précédemment, on veut exclure les cas où les contraintes $\boldsymbol{c_2}$ et $\boldsymbol{c_3}$ sont actives.

$\boldsymbol{\lambda'_t = \lambda_t = 0}$, cela revient à rechercher les conditions nécessaires sur les paramètres $\boldsymbol{r, n}$ et $\boldsymbol{\zeta}$ qui conduisent à ce résultat.

Pour résoudre ce programme, on se place dans le cas où le taux d'actualisation $(\boldsymbol{\zeta})$ et le taux de croissance de l'économie $(\boldsymbol{n})$ sont inférieur ou égaux au taux d'intérêt et ou les contraintes $\boldsymbol{c_2}$, $\boldsymbol{c_3}$ sur les dépenses et les recettes ne sont jamais actives $\boldsymbol{\lambda'_t = \lambda_t = 0}$.

Donc, on aura : $\boldsymbol{\lambda_t = 0 \Rightarrow g_t - g^* = \left[\frac{-\mu}{2c}\right]\left[\frac{1+\zeta}{1+r}\right]^t}$

$$\boldsymbol{g_t = g^* - \left[\frac{\mu}{2c}\right]\left[\frac{1+\zeta}{1+r}\right]^t}$$

$$\boldsymbol{\lambda'_t = 0 \Rightarrow t_t - t^* = \left[\frac{\mu}{2(1-c)}\right]\left[\frac{1+\zeta}{1+r}\right]^t}$$

$$\boldsymbol{t_t = t^* + \left[\frac{\mu}{2(1-c)}\right]\left[\frac{1+\zeta}{1+r}\right]^t}$$

Le report de ces résultats dans la contrainte budgétaire intertemporelle $\boldsymbol{c_1}$ conduit à l'équation suivant :

$$\boldsymbol{g_t - g^* = -(1-c)\left[\frac{1+\zeta}{1+r}\right]^t\left[1 - \frac{(1+\zeta)(1+n)}{(1+r)^2}\right]\left[\left(\frac{(1+n)}{(1+n_0)}\right)b_{-1} + (g^* - t^*)\frac{1+r}{r-n}\right]}$$

$$\boldsymbol{t - t^* = c\left[\frac{1+\zeta}{1+n}\right]^t\left[1 - \frac{(1+\zeta)(1+n)}{(1+n)^2}\right]\left[\left(\frac{(1+r)}{(1+n_0)}\right)b_{-1} + (g^* - t^*)\frac{1+r}{r-n}\right]}$$

$$\Rightarrow \qquad \boldsymbol{t - t^* = \frac{-c}{1-c}(g_t - g^*)}$$

Dans ce cas, les dépenses croissent vers la cible de dépenses du gouvernement tandis que les recettes décroissent vers la cible de recettes comme on l'a vu précédemment.

L'écart à la cible à chaque date est une fonction croissante du déficit futur à financer et de la dette initiale accumulée, mais ne dépend de la situation passée des recettes et des dépenses que par l'intermédiaire de la dette initiale.

Donc, le cas limite où $(\boldsymbol{\zeta = r}), (\boldsymbol{n \le r})$, les dépenses, les recettes et le déficit s'écrivent respectivement :

$$\boldsymbol{g_t - g^* = -(1-c)\left[\frac{1+\zeta}{1+r}\right]^t\left[\frac{(r-n)}{(1+n_0)}b_{-1} + (g^* - t^*)\right]}$$

Dans le cas limite, on prend $\boldsymbol{\zeta = n}$ car on a $\boldsymbol{n \le r}$ et $\boldsymbol{r = \zeta \Rightarrow n \le \zeta}$

$$\boldsymbol{\Rightarrow g_t - g^* = -(1-c)\left[\frac{(r-n)}{(1+n_0)}b_{-1} + (g^* - t^*)\right]}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow g_t = g^* - (1-c)\left[\frac{(r-n)}{(1+n_0)}b_{-1} + (g^* - t^*)\right]}$$

$$\Rightarrow \ t_t = t^* + \ c(g^* - t^*)\left[\frac{(r-n)}{(1+n_0)}b_{-1}\right]$$
$$d_t = -\frac{(r-n)}{(1+n_0)}b_{-1}$$

Les recettes et les dépenses s'établissent au niveau de leur cible à laquelle on ajoute ou on retranche un facteur correctif permettant à la fois le remboursement de la dette initiale et le financement des cibles sur les recettes et les dépenses. Le surplus observé est donc juste égal aux intérêts à payer sur la dette initiale ; le déficit global est donc nul.

Dans ce cas, le gouvernement renonce à atteindre ces cibles ; notons qu'il s'agit d'un cas limite de la contrainte budgétaire intertemporelle, puisque la dette initiale n'est jamais remboursée bien que les intérêts de la dette soient payés.

2- cas où il y a coût d'ajustement

Lorsqu'on introduit des coûts d'ajustement sur les recettes et les dépenses, le programme s'écrit ainsi :

$$Min \sum_{t=0}^{\infty}\left[\frac{1+n}{1+\zeta}\right]^t c_t$$

Avec : $c_t = c\left(g_t - g_t^{opt}\right)^2 + (1 - c)\left(t_t - t_t^{opt}\right)^2$

$$g_t^{opt} = \varphi_0 g_{t-1} + (1-\varphi_0)g^*$$
$$t_t^{opt} = \varphi_1 t_{t-1} + (1-\varphi_1)t^*$$

Sous contraintes :

c_1: ***la contrainte budgétaire intertemporelle***

c_2: $t_{sup} \geq t_t$

c_3: $g_t \geq g_{inf}$

On résous le programme dans le cas où le taux d'actualisation et le taux de croissance sont inférieurs au taux d'intérêt $r \geq \zeta$ et $n \geq r$.

Remarque :

En plus le remboursement de sa dette et son déficit budgétaire du long terme, le gouvernement doit maintenant financer l'incidence de son désajustement initial :

Pour les dépenses: $\varphi_0(g_{t-1} - g^*)$ Pour les recettes : $\varphi_1(t_{t-1} - t^*)$

Ce désajustement entraine un coût positif lorsque les dépenses initiales sont supérieures à la cible et que les recettes initiales lui sont inférieures.

Soit le Lagrangien :

$$L = \sum_{t=0}^{\infty}\left[\frac{1+n}{1+\zeta}\right]^t c_t + \mu\left[\frac{1+r}{1+n}\right]b_{-1} - \sum_{t=0}^{\infty}\left[\frac{1+n}{1+r}\right]^t [t_t - g_t]$$

Où μ est le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte budgétaire intertemporelle.

La condition d'optimalité de premier ordre en g_i se calcule :

$$\frac{\delta L}{\delta g_t} = 2c\left[\frac{1+n}{1+\zeta}\right]^t \left((g_t - g^*) - \varphi_0(g_{t-1} - g^*)\right)$$
$$- 2c\left[\frac{1+n}{1+\zeta}\right]^{t+1} \varphi_0(g_{t-1} - g^*) - \varphi_0(g_t - g^*) + \mu\left[\frac{1+n}{1+r}\right]^t$$
$$= 0$$

$$\Rightarrow 2c\left[\frac{1+n}{1+\zeta}\right]^t \left[\left((g_t - g^*) - \varphi_0(g_{t-1} - g^*)\right) - \frac{1+n}{1+\zeta}\varphi_0(g_{t-1} - g^*) - \varphi_0(g_t - g^*)\right] = -\mu\left[\frac{1+n}{1+r}\right]^t$$

$$\Rightarrow \left((g_t - g^*) - \varphi_0(g_{t-1} - g^*)\right) - \frac{1+n}{1+\zeta}\varphi_0[(g_{t-1} - g^*) - \varphi_0(g_t - g^*)]$$
$$= -\frac{\mu}{2c}\left[\frac{1+n}{1+r}\right]^t$$

$$\Rightarrow (g_t - g^*) - \varphi_0 L(g_t - g^*) - \frac{1+n}{1+\zeta}\varphi_0 F(g_t - g^*) + \frac{1+n}{1+\zeta}\varphi_0^2(g_t - g^*)$$
$$= -\frac{\mu}{2c}\left[\frac{1+\zeta}{1+r}\right]^t$$

$$\Rightarrow \left[1 - \varphi_0 L - \frac{1+n}{1+\zeta}\varphi_0 F + \frac{1+n}{1+\zeta}\varphi_0^2 FL\right](g_t - g^*) = -\frac{\mu}{2c}\left[\frac{1+\zeta}{1+r}\right]^t$$

$$\Rightarrow \left[(1 - \varphi_0 L) - \frac{1+n}{1+\zeta}\varphi_0 F(1 - \varphi_0 L)\right](g_t - g^*) = -\frac{\mu}{2c}\left[\frac{1+\zeta}{1+r}\right]^t$$

$$\Rightarrow (1 - \varphi_0 L)\left[1 - \frac{1+n}{1+\zeta}\varphi_0 F\right](g_t - g^*) = -\frac{\mu}{2c}\left[\frac{1+\zeta}{1+r}\right]^t$$

D'où :

$$g_t = g^* + \varphi_0^{t+1}(g_{-1} - g^*) - \frac{\mu}{2c}\left[\frac{1}{1-\varphi_0\frac{1+n}{1+r}}\right]\left[\frac{1+\zeta}{1+r}\right]^t \frac{1 - \varphi_0\left[\frac{1+r}{1+\zeta}\right]^{t+1}}{1 - \varphi_0\frac{1+r}{1+\zeta}}$$

La solution obtenue est unique si $\varphi_0(1+n) < (1+\zeta)$

On pose $\lambda = \frac{1+n}{1+r}$

$$\mathcal{B}(\varphi_0, \zeta, r) = \left[\frac{1+\zeta}{1+r}\right]^t \left[\frac{1 - \varphi_0\left[\frac{1+r}{1+\zeta}\right]^{t+1}}{1 - \varphi_0\frac{1+r}{1+\zeta}}\right]$$

Alors : $g_t = g^* + \varphi_0^{t+1}(g_{-1} - g^*) - \frac{\mu}{2c}\frac{1}{(1-\varphi_0\lambda)}\mathcal{B}(\varphi_0, \zeta, r)$…………(a)

Cette solution est unique si $\varphi_0(1+n) < (1+\zeta)$

De façon symétrique, on obtient pour les recettes :

$$t_t = t^* + \varphi_0^{t+1}(t_{-1} - t^*) + \frac{\mu}{2c}\frac{1}{(1-\varphi_1\lambda)}\ \mathcal{B}(\varphi_1, \zeta, r) \text{............(b)}$$

Où $\mathcal{B}(\varphi_1, \zeta, r) = \left[\frac{1+\zeta}{1+r}\right]^t \left[\frac{1-\varphi_1\left[\frac{1+r}{1+\zeta}\right]^t}{1-\varphi_1\frac{1+r}{1+\zeta}}\right]$

Cette solution est unique si $\varphi_1(1+n) < (1+\zeta)$

Le report des équations (a) et (b) dans la contrainte budgétaire intertemporelle permet de calculer le multiplicateur.

$$\mu = 2k_1 k_2 sup[k_0, 0] \text{ ....(c)}$$

Où : $k_0 = \frac{(g^*-t^*)}{(1-\lambda)} + \frac{\varphi_0}{(1-\lambda\varphi_0)}(g_{-1} - g^*) - \frac{\varphi_1}{(1-\lambda\varphi_1)}(t_{-1} - t^*) + \left(\frac{1+r}{1+n}\right) b_{-1}$ ....(d)

$$k_1 = c\frac{[(1-\lambda\varphi_0)^2(1-c)(1-\lambda\varphi_1)^2]}{[c(1-\lambda\varphi_0)^2+(1-c)(1-\lambda\varphi_1)^2]}$$

$$k_2 = 1 - \frac{(1+n)(1+\zeta)}{(1+r)^2}$$

Le report de l'équation (c) dans les équations (a) et (b) permet d'obtenir :

La séquence des dépenses :

$$g_t = g^* + \varphi_0^{t+1}(g_{-1} - g^*) - \mathcal{B}(\varphi_0, \zeta, r)\ k_{1.0}k_2k_0$$

.............................(e)

Où : $k_{1.0} = \frac{[(1-\lambda\varphi_0)(1-c)(1-\lambda\varphi_1)^2]}{[c(1-\lambda\varphi_0)^2+(1-c)(1-\lambda\varphi_1)^2]}$

La séquence des recettes :

$$t_t = t^* + \varphi_1^{t+1}(t_{-1} - t^*) - \mathcal{B}(\varphi_1, \zeta, r)\ k_{1.1}k_2k_0 \text{ ....(f)}$$

Où : $k_{1.1} = \frac{[(1-\lambda\varphi_1)c(1-\lambda\varphi_0)^2]}{[c(1-\lambda\varphi_0)^2+(1-c)(1-\lambda\varphi_1)^2]}$

Les équations (e) et (f) expriment les séquences des recettes $\{t_t\}_t$ et des dépenses $\{g_t\}_t$ en fonction des paramètres $(r, c,\ \varphi_0, \varphi_1)$, des cibles g^*, t^*, des valeurs initiales t_{-1}, g_{-1} et b_{-1} et des variables prévues n_0, n et r.

C- <u>résolution du problème avec la méthode du contrôle optimale</u>

<u>1- Présentation de la méthode du contrôle optimale Principe du maximum à base du temps discret</u>

Cette méthode couvre trois aspects essentiels :

- La finalité, exprimée par l'objectif ;
- Les lois qui sont représentées par une unité de conduite (système de contrôle) ;
- La structure du système à contrôler, est décrite par une équation différentielle ou à différences finies ;

On distingue deux sortes de variables :

- ➢ En variable d'état ou de niveau
- ➢ En variable de contrôle ou de décision ;

La notion d'état est utilisée comme un ensemble « qui résume, à chaque instant l'évolution passé du système ; la recherche et le choix de ces variables d'état concrétisent l'étape préliminaire de cette approche. Elles sont appelées aussi variables de niveau en termes économiques.

1-1 <u>Définition d'un problème de contrôle optimal</u>

a. On considère l'évolution d'un système où l'état est caractérisé à chaque instant $(\boldsymbol{t})$ par $\boldsymbol{N}$ variables $(\boldsymbol{X_{1,}X_{2,\ldots,}X_N})$ appelées variables d'état, ces variables sont des fonctions du temps et elles constituent à chaque instant $(\boldsymbol{t})$ le vecteur :

$$\boldsymbol{X(t) = \left(X_1(t), X_2(t), \ldots, X_N(t)\right)}$$

b. L'évolution du système dépend aussi des valeurs prises au cours du temps par des variables $(\boldsymbol{U_{1,}U_{2,\ldots,}U_N})$ dites variables de contrôles, celles –ci forment un vecteur variant dans le temps, qui permettent d'agir sur l'état du système.

On considère en général des vecteurs de commande :

- Définis dans un intervalle de temps ;
- Dont les valeurs appartiennent à un certain domaine $\boldsymbol{U} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{M}}$
- Continu par morceau

c. La fonction économique à optimiser peut être une fonction intertemporelle qui peut prendre la forme d'une intégrale ou bien un critère terminal ne prenant en compte que les valeurs terminales des variables d'état ou les deux, d'où :

$$\boldsymbol{MAX \int f_{0t}(X(t), U(t), \mathrm{t}) \, dt} + G(\boldsymbol{X(t), T})$$

Où $\boldsymbol{G(X(t), T)}$ désigne la valeur des variables d'état à l'instant terminal$(\boldsymbol{T})$.

Notre objectif est de déterminer la trajectoire optimale qui optimise la fonction économique dans l'intervalle $[\boldsymbol{0, T}]$; l'idée première est d'optimiser la fonction économique à chaque instant $(\boldsymbol{T})$ de l'intervalle $[\boldsymbol{0, T}]$ mais le problème qui se pose est qu'une suite optimale de décisions instantanées ne conduit pas forcement à une politique globalement optimale ; une façon de détourner le problème est de déterminer l'effet d'une décision sur la suite des décisions futures.

d. Le mécanisme qui nous permet de voir $\boldsymbol{X(t)}$ et $\boldsymbol{U(t)}$ liés aux différents points de temps est un ensemble d'équations différentielles :

$$\boldsymbol{\frac{\delta X_i}{\delta t} = f_i\left(X_{1,}X_{2,\ldots,}X_N, U_{1,}U_{2,\ldots,}U_N\right)}$$

Ou, plus simplement, $\boldsymbol{X_i = f_i(X, U, t)}$

Les fonctions $(\boldsymbol{f_i})$ mesurent le changement de l'état d'un système ; elles supposées différentielles par rapport à toutes les variables.

Si $\boldsymbol{U(t)}$ est vecteur de commande admissible donné, l'état du système est donc déterminé en résolvant : $\boldsymbol{X = f(X, U, t)}$

Ce qui peut se faire, si l'on s'est donné des conditions initiales.

$$\boldsymbol{X(t_0) = X_0}$$

e. La commande $\boldsymbol{U(t)}$ est généralement soumise à des contraintes définissant un certain domaine $\boldsymbol{U}$.

Le vecteur d'état $\boldsymbol{X(t)}$ peut également être soumis à des contraintes.

Enfin, certaines contraintes peuvent faire intervenir ces deux catégories de variables ; cette contrainte s'appelle « contrainte mixte » ou « contrainte type-goulot d'étranglement ».

Nous allons englober ces trois cas, en considérant des contraintes du dernier typa, soit :

$$\boldsymbol{g_h(X(t), U(t), \mathrm{t}) \geq 0 \quad t \in [t_0, t_1], h = 1, 2, \ldots, q}$$

f. Pour spécifier notre problème, on définit les conditions initiales et finales.

Les conditions initiales consistent très généralement à fixer les valeurs initiales des variables d'état, soit :

$$\boldsymbol{X(t_0) = X_0}$$

Les conditions terminales usuelles sont plus différenciées. On peut d'abord n'imposer aucune condition terminale : on parle d'extrémité terminale libre.

On peut, au contraire, imposer des valeurs terminales aux variables d'état :

$$\boldsymbol{X(t_1) = X_1}$$

Ou bien, des contraintes plus souples du type :

$$\boldsymbol{R_k\big(X(t)\big) \geq 0}. \quad \boldsymbol{k = 1, 2, \dots, r}$$

Ainsi le problème se présente comme suit :

$$(\boldsymbol{I})\begin{cases} \boldsymbol{MAX \int_0^T f_{0t}(X(t), U(t), \mathrm{t})\, dt} \\ \boldsymbol{X_i = f_i\,(X, U, t)}. \quad \boldsymbol{i = 1, 2, \dots N} \\ \boldsymbol{g_h[X(t), U(t), \mathrm{t}] \ \geq 0 \ \ , h = 1, 2, \dots, q \ \ , t \in [t_0, t_1]} \\ \boldsymbol{X(0) = X_0 et\ X(T)\ libre} \end{cases}$$

1-2 <u>Présentation du principe du maximum à base discrète du temps</u>

Le problème de contrôle va conduire à des conditions d'optimalité qui constituent une adaptation du théorème de KHUN et TUCKER à celui de LAGRANGE aux problèmes dynamiques ; ces nouvelles conditions portent généralement la dénomination de « principe du maximum ».

a- <u>Rappel du théorème de KHUN et TUCKER</u>

$\boldsymbol{MAX\ f(X)}$, $\boldsymbol{X}$ vecteur à $\boldsymbol{N}$ dimensions $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{N}}$

Sous contraintes :

$$\boldsymbol{g_j(X) \leq a_j} \qquad \boldsymbol{j = 1, 2, \dots, p}$$

$\boldsymbol{g}$ et $\boldsymbol{f}$ sont des fonctions différentiables par rapport à $\boldsymbol{X}$.

b- <u>Enoncé du théorème de KHUN et TUCKER</u>

Pour que $\boldsymbol{X}^*$soit une solution optimale du programme mathématique précédent, il est nécessaire qu'il existe un vecteur $\boldsymbol{\lambda}$ de composantes $\boldsymbol{\lambda_j}$ $(j = \boldsymbol{1, 2, \dots, p})$ positifs ou nuls.

Tel que :

- $\boldsymbol{\left(\frac{\delta f}{\delta X_i}\right) X^* - \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \left(\frac{\delta g_i}{\delta X_i}\right) X^* = 0 \ \ i = 1, 2, \dots, N}$
- $\boldsymbol{\lambda_j\Big(c_j\big(X^* - a_j\,\big)\Big) = 0}$

Si on a à minimiser $\boldsymbol{f(X)}$, il suffit de mettre $(-\boldsymbol{MAX})$

c- <u>rappel du théorème de LAGRANGE :</u>

$$\boldsymbol{MAXf(X), X} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{N}}$$

Sous contraintes

$$g_j(X) = 0, j = 1, 2, \dots, p$$

- Enoncé du théorème de LAGRANGE

Pour que X^* soit une solution optimale, il est nécessaire qu'il existe des coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ non tous nuls, appelés multiplicateur de LAGRANGE, tel que :

$$\frac{\delta}{\delta X}\left(f(X) + \sum_{j=0}^{p} \lambda_j g_j(X)\right)$$

Avant d'énoncer les conditions d'optimalité (principe du maximum), on va montrer que le théorème de LAGRANGE, généralement utilisé pour résoudre des problèmes statiques, peut être utilisé pour traiter un problème dynamique.

Dans le cas discret, la fonction à maximiser est :

$$(I^*)\begin{cases} MAX \sum_{t=0}^{T-1} f_{0t}(X(t), U(t), \mathrm{t}) \\ X(t) = f_t(X(t), U(t), \mathrm{t}) \\ X_0 \text{ donné} \end{cases}$$

On peut résoudre ce programme mathématique en formant le Lagrangien :

$$L = \sum_{t=0}^{T-1} f_{0t}(X(t), U(t), \mathrm{t}) + \dot{p}_{t+1}\big(X(t) + f_t(X(t), U(t), \mathrm{t}) - X(t+1)\big)$$

Où : $\dot{p}_{t+1} = \big(p_1(t+1), p_2(t+1), \dots, p_N(t+1)\big)$

On suppose que L est concave en X et Uà chaque instant (t).

$$\frac{\delta L}{\delta U(t)} = 0 \; pour \; t = 0, 1, \dots, T-1$$

$$\frac{\delta L}{\delta X(t)} = 0 \; pour \; t = 1, \dots, T$$

$$\frac{\delta L}{\delta \dot{p}_{t+1}} = X(t) + f_t(X(t), U(t), \mathrm{t}) - X(t+1) \qquad pour \; t = 0, 1, \dots, T-1$$

Nous avons ainsi un système de $\big(mT(U) + NT(U) + NT(p)\big)$ équations pour déterminer $T(m + 2n)$ inconnues du système.

En calculant la dérivée de LAGRANGE par rapport à $U(t)$, $X(t)$, on remarque :

$$\frac{\delta L}{\delta U(t)} = \frac{\delta L}{\delta U(t)}\left[f_{0t}(X(t), U(t), \mathrm{t}) - \dot{p}_t X(t) + \dot{p}_{t+1}\big(X(t) + f_t(X(t), U(t), \mathrm{t})\big)\right] = 0 \; pour \; t = 0, 1, \dots, T-1$$

$$\frac{\delta L}{\delta X(t)} = \frac{\delta L}{\delta X(t)}\left[f_{0t}(X(t), U(t), \mathrm{t}) - \dot{p}_t X(t) + \dot{p}_{t+1}\big(X(t) + f_t(X(t), U(t), \mathrm{t})\big)\right] = 0 pour \; t = 0, 1, \dots, T-1$$

$\Rightarrow \dot{p}_{t+1} - \dot{p}_t = -\frac{\delta L}{\delta X(t)}[f_{0t}(X(t), U(t), \mathrm{t}) + \dot{p}_{t+1} f_t(X(t), U(t), \mathrm{t})] = 0$
$pour\ t = 0, 1, \dots, T-1$

$$\dot{p}_t = -\frac{\delta L}{\delta X(t)}[f_{0t}(X(t), U(t), \mathrm{t}) + \dot{p}_{t+1} f_t(X(t), U(t), \mathrm{t})]$$

Soit l'Hamiltonien $H(t)$ défini par :

$$H(t) = f_{0t}(X(t), U(t), \mathrm{t}) + \dot{p}_{t+1} f_t(X(t), U(t), \mathrm{t})$$

Donc $MAX\ L$ revient à maximiser $H(t)$ avec : $\dot{p}_t = -\frac{\delta H(t)}{\delta X(t)}$

Ainsi grâce aux multiplicateurs (p), dit de pontryguin, qui sont associés aux différentes équations différentielles et fournissent à chaque date une sorte de résumé futur, on peut décomposer l'optimum dynamique en une suite d'optimisations effectuées période par période.

Ainsi, on sera conduit à optimiser à chaque période t une fonction dite « Hamiltonien ».

d- l'énoncé du principe du maximum

Si $X^*(t)$ et $U^*(t)$ constituent une solution optimale du problème (I) alors :

- Il existe des multiplicateurs de Pontrygin $p_0(t+1), p_1(t+1), \dots, p_N(t+1)$ non tous nuls et variant continûment avec le temps tel qu'en tout instant (t), le vecteur commande $U^*(t)$ soit une solution optimale du programme :

$$\frac{MAX}{U} H[X^*(t), U^*(t), p_t, t] =$$
$$p_0(t+1) f_{0t}(X^*(t), U^*(t), \mathrm{t}) + \dot{p}_{t+1} f_t(X^*(t), U^*(t), \mathrm{t}) \quad (*)$$

Remarque :

$(*)$ a été déjà démontré précédemment.

Si les conditions de « qualification » correspondantes sont vérifiées, cette optimalité est caractérisée par les conditions (de KHUN et TUCKER) suivantes :

$$(1) \quad \exists \mu_h(t) \geq 0 : \ \mu_h(t) g_h[X^*(t), U^*(t), \mathrm{t}] = 0.\ h = 1, 2, \dots, q$$

$$(2) \quad \frac{\delta H}{\delta U_j}[X^*(t), U^*(t), p_t, t] + \sum_{h=0}^{q} \mu_h(t) \frac{\delta}{\delta U_j} g_h[X^*(t), U^*(t), \mathrm{t}].\ \ j = 1, 2, \dots, m$$

- Le multiplicateur $p_0(t)$ est en fait constant dans le temps et les multiplicateurs $p_1(t), \dots, p_N(t)$ sont des solutions des équations différentielles :

$$(3) \quad \dot{p}(t) = -\frac{\delta H[X^*(t), U^*(t), p_t, t]}{\delta X(t)} - \sum_{h=0}^{q} \mu_h(t) \frac{\delta}{\delta X(t)} g_h[X^*(t), U^*(t), \mathrm{t}]$$

Démonstration :

Le Lagrangien concernant le programme (I)

$$\boldsymbol{L}=\sum_{t=0}^{T-1}\left[\boldsymbol{p_0}(\boldsymbol{t}+\mathbf{1})\boldsymbol{f_{0t}}(\boldsymbol{X}^*(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{U}^*(\boldsymbol{t}),\mathbf{t})\right.$$
$$+\dot{\boldsymbol{p}}_{t+1}\big(\boldsymbol{X}^*(\boldsymbol{t})+\boldsymbol{f_t}(\boldsymbol{X}^*(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{U}^*(\boldsymbol{t}),\mathbf{t})-\boldsymbol{X}^*(\boldsymbol{t}+\mathbf{1})\big)$$
$$\left.+\sum_{h=0}^{q}\boldsymbol{\mu_h}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{g_h}[\boldsymbol{X}^*(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{U}^*(\boldsymbol{t}),\mathbf{t}]\right]=\mathbf{0}$$

On suppose que $\boldsymbol{L}$ est convexe par rapport à $\boldsymbol{X}^*(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{U}^*(\boldsymbol{t})$.
On remarque que :

$$\frac{\boldsymbol{\delta L}}{\boldsymbol{\delta U}(\boldsymbol{t})}=\frac{\boldsymbol{\delta}}{\boldsymbol{\delta U}(\boldsymbol{t})}\left[\boldsymbol{p_0}(\boldsymbol{t}+\mathbf{1})\boldsymbol{f_{0t}}(\boldsymbol{X}^*(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{U}^*(\boldsymbol{t}),\mathbf{t})\right.$$
$$+\dot{\boldsymbol{p}}_{t+1}\big(\boldsymbol{X}^*(\boldsymbol{t})+\boldsymbol{f_t}(\boldsymbol{X}^*(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{U}^*(\boldsymbol{t}),\mathbf{t})-\boldsymbol{X}^*(\boldsymbol{t}+\mathbf{1})\big)$$
$$\left.+\sum_{h=0}^{q}\boldsymbol{\mu_h}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{g_h}[\boldsymbol{X}^*(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{U}^*(\boldsymbol{t}),\mathbf{t}]\right]=\mathbf{0}\quad \mathbf{pour\ t=0,1,\dots,T-1}$$

D'autre part, en calculant la dérivée de Lagrange par rapport à $\boldsymbol{X_t}$, on a :

$$\frac{\boldsymbol{\delta L}}{\boldsymbol{\delta X}(t)}=\frac{\boldsymbol{\delta}}{\boldsymbol{\delta X}(\boldsymbol{t})}\left[\boldsymbol{p_0}(\boldsymbol{t}+\mathbf{1})\boldsymbol{f_{0t}}(\boldsymbol{X}^*(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{U}^*(\boldsymbol{t}),\mathbf{t})-\dot{\boldsymbol{p}}_{t}\boldsymbol{X}^*(\boldsymbol{t})\right.$$
$$+\dot{\boldsymbol{p}}_{t+1}\big(\boldsymbol{X}^*(\boldsymbol{t})+\boldsymbol{f_t}(\boldsymbol{X}^*(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{U}^*(\boldsymbol{t}),\mathbf{t})\big)$$
$$\left.+\sum_{h=0}^{q}\boldsymbol{\mu_h}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{g_h}[\boldsymbol{X}^*(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{U}^*(\boldsymbol{t}),\mathbf{t}]\right]=\mathbf{0}\quad \mathbf{pour\ t=0,1,\dots,T-1}$$

$$=-\dot{\boldsymbol{p}}_{t}+\dot{\boldsymbol{p}}_{t+1}+\frac{\boldsymbol{\delta}}{\boldsymbol{\delta X}^*(\boldsymbol{t})}\left[\boldsymbol{p_0}(\boldsymbol{t}+\mathbf{1})\boldsymbol{f_{0t}}(\boldsymbol{X}^*(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{U}^*(\boldsymbol{t}),\mathbf{t})\right.$$
$$\left.+\dot{\boldsymbol{p}}_{t+1}\big(\boldsymbol{f_t}(\boldsymbol{X}^*(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{U}^*(\boldsymbol{t}),\mathbf{t})\big)+\sum_{h=0}^{q}\boldsymbol{\mu_h}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{g_h}[\boldsymbol{X}^*(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{U}^*(\boldsymbol{t}),\mathbf{t}]\right]=\mathbf{0}$$

$\Rightarrow \dot{\boldsymbol{p}}_{t+1}-\dot{\boldsymbol{p}}_{t}=$
$\frac{\boldsymbol{\delta}}{\boldsymbol{\delta X}^*(\boldsymbol{t})}\big[\boldsymbol{p_0}(\boldsymbol{t}+\mathbf{1})\boldsymbol{f_{0t}}(\boldsymbol{X}^*(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{U}^*(\boldsymbol{t}),\mathbf{t})+\dot{\boldsymbol{p}}_{t+1}\big(\boldsymbol{f_t}(\boldsymbol{X}^*(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{U}^*(\boldsymbol{t}),\mathbf{t})\big)+$
$\sum_{h=0}^{q}\boldsymbol{\mu_h}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{g_h}[\boldsymbol{X}^*(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{U}^*(\boldsymbol{t}),\mathbf{t}]\big]=$

On a $\boldsymbol{f_{0t}}(\boldsymbol{X}^*(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{U}^*(\boldsymbol{t}),\mathbf{t})+\dot{\boldsymbol{p}}_{t+1}\big(\boldsymbol{f_t}(\boldsymbol{X}^*(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{U}^*(\boldsymbol{t}),\mathbf{t})\big)=\boldsymbol{H}(\boldsymbol{t})$

Donc : $\dot{\boldsymbol{p}}_{t}=-\frac{\boldsymbol{\delta H}(\boldsymbol{t})}{\boldsymbol{\delta X}^*(\boldsymbol{t})}-\frac{\boldsymbol{\delta}}{\boldsymbol{\delta X}^*(\boldsymbol{t})}\sum_{h=0}^{q}\boldsymbol{\mu_h}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{g_h}[\boldsymbol{X}^*(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{U}^*(\boldsymbol{t}),\mathbf{t}]$

$$=-\frac{\boldsymbol{\delta}}{\boldsymbol{\delta X}^*(\boldsymbol{t})}\ \boldsymbol{H}[\boldsymbol{X}^*(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{U}^*(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{p_t},\boldsymbol{t}]-\sum_{h=0}^{q}\boldsymbol{\mu_h}(\boldsymbol{t})\frac{\boldsymbol{\delta}}{\boldsymbol{\delta X}^*(\boldsymbol{t})}\boldsymbol{g_h}[\boldsymbol{X}^*(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{U}^*(\boldsymbol{t}),\mathbf{t}]$$

$$\Rightarrow \dot{p}_i(t) = -\frac{\delta}{\delta X_i^{\,*}(t)} H[X^*(t), U^*(t), p_t, t] - \sum_{h=0}^{q} \mu_h(t) \frac{\delta}{\delta X_i^{\,*}(t)} g_h[X^*(t), U^*(t), \mathrm{t}]$$

$$p_0(t) = -\frac{\delta}{\delta X_0^{\,*}(t)} H[X^*(t), U^*(t), p_t, t] - \sum_{h=0}^{q} \mu_h(t) \frac{d}{dX_0^{\,*}(t)} g_h[X^*(t), U^*(t), \mathrm{t}]$$

$$\Rightarrow p_0(t+1) - p_0(t) = 0 \Rightarrow p_0(t+1) = p_0(t)$$

Donc le multiplicateur $p_0(t)$ est en fait constant dans le temps.

- A l'instant terminal T

$$t = T$$

$$\frac{\delta L}{\delta X_i^{\,*}(T)} = \frac{\delta p_i(T) X_i(T)}{\delta X_i^{\,*}(t)} \Rightarrow p_i(T) = 0. \quad i = 1, 2, \dots, n$$

(4) donc $p_1(T) = p_2(T) = \cdots = p_N(T) = 0$

Et on peut prendre :

(5) $p_0(T) = 1$

Remarques :

1. Si on introduit le Lagrangien

$$L(X, U, p, \mu, t) = p_0 f_0(X, U, T) + p_i f_i(X, U, T) + \sum_{h=0}^{q} \mu_h g_h(X, U, T)$$

Les équations (2) et (3) peuvent être réécrites plus commodément.

$$(2') \quad \frac{\delta L}{\delta U_j}[X^*(T), U^*(T), p(T), \mu(T), T] = 0. \quad j = 1, 2, \dots, m$$

$$(3') \quad p_i(t) = -\frac{\delta L[X^*(T), U^*(T), p(T), \mu(T), T]}{\delta X_i^{\,*}(t)}$$

2. Aux points de discontinuité des variables de commandes, on prolonge par continuité les solutions des équations (3) ; ainsi les multiplicateurs $p_i(t)$ sont continus et continûment différentiables par morceaux.

3. Dans le cas d'une extrémité terminale libre, la nullité des multiplicateurs $p_1(t_1), \dots, p_N(t_1)$ entraîne la non nullité de p_0 puisqu'ils doivent être non tous nuls. Comme d'autre part, on démontre que la maximisation de la fonction économique entraîne la non négativité de p_0, on peut prendre $p_0 = 1$ puisque l'ensemble des multiplicateurs p_0, $p_1, \dots, p_N$ est défini à un facteur multiplicatif près. Dans le cas où on minimiserait notre intégral, les conditions d'optimalité les mêmes que précédemment en prenant $p_0 \leq 0$, c'est-à-dire $p_0 = -1$ ce qui revient en effet à considérer la fonction $-f_{0t}$.

e- <u>la condition de transversalité :</u>

1. Nous avons étudié jusqu'ici le cas de l'extrémité terminale libre. On envisage maintenant le cas général d'une extrémité terminale contrainte par :

$$\boldsymbol{R_k[X(T)] = 0 \quad k = 1, 2, \dots, r'}$$

$$\boldsymbol{R_k[X(T)]} \geq 0 \quad \boldsymbol{k = r' + 1, r' + 2, \dots, r}$$

Où $\boldsymbol{R_k}$ soient continument différentiables. Alors la partie $(\boldsymbol{c})$ devient :

$$\frac{\boldsymbol{\delta L}}{\boldsymbol{\delta X^*(T)}} = \frac{\boldsymbol{\delta}}{\boldsymbol{\delta X^*(T)}} \sum_{t=0}^{T-1} \Bigg[\boldsymbol{p_0(t+1) f_{0t}(X^*(t), U^*(t), \mathrm{t})}$$

$$+ \boldsymbol{\dot{p}_{t+1} \Big(X \quad (t) + f_t(X^*(t), U^*(t), \mathrm{t}) - X^*(t+1) \Big)}$$

$$+ \sum_{h=0}^{q} \boldsymbol{\mu_h(t) g_h[X^*(t), U^*(t), \mathrm{t}]} \Bigg] + \sum_{r'+1}^{r} \boldsymbol{\delta_k R_k[X^*(T)] = 0}$$

$$= \frac{\boldsymbol{\delta}}{\boldsymbol{\delta X^*(T)}} - \boldsymbol{p(T) X^*(T)} + \sum_{r'+1}^{r} \boldsymbol{\delta_k R_k[X^*(T)] = 0}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{p_i(T)} = \sum_{r'+1}^{r} \boldsymbol{\delta_k \frac{\delta}{\delta {X_i}^*(T)} R_k[{X_i}^*(T)]} \qquad \boldsymbol{pour\ i = 1, 2, \dots, n}$$

KHUN-TUCKER

$$\boldsymbol{\delta} \geq \boldsymbol{0 \quad et \quad \delta_k R_k[X^*(T)] = 0 \quad pour \quad k = r' + 1, r' + 2, \dots, r}$$

Et on peut avoir $\boldsymbol{p_0 = 1}$ ou $\boldsymbol{p_0 = 0}$

Dans le cas particulier où : $\boldsymbol{{X_i}^*(T) = X^*_{i,1} \quad pour\ i = 1, 2, \dots, r'}$

$\boldsymbol{{X_i}^*(T)} \geq \boldsymbol{X^*_{i,1} \quad pour\ i = r' + 1, \dots, r}$

$\boldsymbol{X^*_i(T)}$ libre $\boldsymbol{pour\ i = r, \dots, n}$

Ces conditions de transversalité deviennent :

$\boldsymbol{p_i(T)}$ quelconque $\boldsymbol{pour\ i = 1, 2, \dots, r'}$

$\boldsymbol{p_i(T)} \geq \boldsymbol{0 \ \ avec\, p_i(T)\big({X_i}^*(T) = X^*_{i,1}\big) = 0 \ \ pour\ i = r' + 1, \dots, r}$

$\boldsymbol{p_i(T) = 0}$ $\boldsymbol{pour\ i = r, \dots, n}$

Et on peut avoir $\boldsymbol{p_0 = 1}$ ou $\boldsymbol{p_0 = 0}$

Ceci résulte de ce que les conditions précédentes s'écrivent alors :

$\boldsymbol{p_i(t_i) = \ \delta_i}$

Avec $\boldsymbol{\delta_i} \geq \boldsymbol{0}$ et $\boldsymbol{\delta_i\big({X_i}^*(t_1) = X_{i,1}\big) = 0 \quad pour\ i = r' + 1, \dots, r}$

Remarques

1- Le multiplicateur $\boldsymbol{p_0}$ peut être maintenant a priori nul, ce qui signifie que la fonction économique $\boldsymbol{f_0}$ ne joue plus le rôle dans la détermination de la trajectoire optimale. En pratique, on omet souvent d'envisager cette possibilité qui joue peu fréquemment.

2- Le nombre totale des conditions terminales portant sur les $\boldsymbol{X_i(T)}$ et sur les $\boldsymbol{p_i(T)}$ reste constant dans nos trois formulations. Dans le théorème, les $\boldsymbol{X_i(T)}$ étaient libres et les $\boldsymbol{N}$ valeurs des $\boldsymbol{p_i(T)}$ étaient fixées. Dans la formulation conduisant au module $(\boldsymbol{c'})$, nous avons $\boldsymbol{r'}$ relations liant les $\boldsymbol{X_i(T)}$, puis $\boldsymbol{n + r - r'}$ relations liant les $\boldsymbol{X_i(T)}$ et les $\boldsymbol{p_i(T)}$ et les $\boldsymbol{\delta_k}$, soit au total $\boldsymbol{n - r}$ relations.

Après élimination des $\boldsymbol{\delta_k}$, $(\boldsymbol{k = 1, 2, \dots, r})$, il reste $\boldsymbol{n}$ relations liant les $\boldsymbol{X_i(T)}$ et les $\boldsymbol{p_i(T)}$. Enfin, dans la formulation conduisant à la partie$(\boldsymbol{c'})$, nous avons au total $\boldsymbol{n}$ relations déterminant ou liant les $\boldsymbol{X_i(T)}$ et les $\boldsymbol{p_i(T)}$.

3- On obtient des conditions initiales absolument semblables à nos conditions terminales lorsqu'on remplace la condition initiale classique $\boldsymbol{X_0(t_0) = X_0}$ par des contraintes :

$$\boldsymbol{S_h(X(t_0)) = 0 \quad h = 1, 2, \dots, s'}$$
$$\boldsymbol{S_h(X(t_0)) \geq 0 \quad h = s' + 1, \dots, s}$$

Alors, il existe des nombres $\boldsymbol{S_1, S_2, \dots, S_s}$:

$$\boldsymbol{p_i(t_0) = -\sum_{h=0}^{q} \rho_h \frac{\delta}{\delta X_i^{\,*}(t_0)} S_h(X^*(t_0)) \quad i = 1, 2, \dots, N}$$

Avec $\boldsymbol{\rho_h \geq 0}$ et $\boldsymbol{\rho_h S_h(X^*(t_0)) = 0 \quad pour\ h = s' + 1, \dots., s}$

f- <u>Le critère terminal</u>

Le cas le plus général est celui où on veut maximiser à la fois un critère intertemporel et un critère final, soit :

$$\boldsymbol{MAX \sum_{t=0}^{T-1} f_{0t}(X(t), U(t), \mathrm{t}) + G(X(t))}$$

Si on envisage en même temps des contraintes sur l'extrémité terminale :

$$\boldsymbol{R_k[X(T)] = 0 \quad k = 1, 2, \dots, r'}$$
$$\boldsymbol{R_k[X(T)] \geq 0 \quad k = r' + 1, r' + 2, \dots, r}$$

Alors la partie $(\boldsymbol{c})$ du théorème devient :

Il existe des nombres $\boldsymbol{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{r'}}$

$$\boldsymbol{\frac{\delta L}{\delta X(T)} = \frac{\delta}{\delta X(T)} \Bigg[p_0(t) G(X(t)) + \sum_{r'+1}^{r} \delta_k R_k(X(T)) + \sum_{t=0}^{T-1} p_0(t) f_{0t}(X(t), U(t), \mathrm{t}) + \dot{p}_{t+1}(X(t) + f_t(X(t), U(t), \mathrm{t}) - X(t+1)) + \sum_{h=0}^{q} \mu_h(t) g_h \Bigg] = 0}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow \frac{\delta}{\delta X(T)} \left[p_0(t) G(X(t)) + \sum_{r'+1}^{r} \delta_k R_k(X(T)) - p(T) X(T) \right] = 0}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow \dot{p}_i(T) = p_0(T) \frac{\delta}{\delta X(T)} G(X(t)) + \sum_{r'+1}^{r} \delta_k \frac{\delta}{\delta X(T)} R_k(X(T))}$$

Avec $\boldsymbol{\delta_k = 0}$ et $\boldsymbol{\delta_k R_k(X(T)) = 0}$ pour $\boldsymbol{k = r' + 1, r' + 2, \dots, r}$

Et on peut avoir $\boldsymbol{p_0 = 1}$ ou $\boldsymbol{p_0 = 0}$

g- <u>les conditions suffisantes d'optimalité</u>

Les conditions nécessaires d'optimalité permettent de déterminer des trajectoires qui sont dites extrémales. Mais on peut affirmer que ces trajectoires ne sont optimales que si les conditions nécessaires sont aussi suffisantes (d'optimalité). En fait, comme en programmation linéaire, ces conditions seront suffisantes si on fait des hypothèses de concavité.

- Les conditions suffisantes à la mangasarian

Les conditions nécessaires que nous avons exposés sont aussi conditions suffisantes d'optimalité si :

L'Hamiltonien $\boldsymbol{H(X,U,p,t)}$ est concave en $(\boldsymbol{X,U})$ $\boldsymbol{t} \in [\boldsymbol{t_0}, \boldsymbol{t_1}]$

Les fonctions $\boldsymbol{g_h(X,U,t)}$ sont quasi concaves en $(\boldsymbol{X,U})$ $\boldsymbol{t} \in [\boldsymbol{t_0}, \boldsymbol{t_1}]$

Le multiplicateur $\boldsymbol{p_0 = 1}$

Si $\boldsymbol{H(X,U,p,t)}$ est strictement concave en $(\boldsymbol{X,U})$, la solution optimale $\boldsymbol{X^*(t), U^*(t)}$ est unique.

Comme $\boldsymbol{H(X,U,p,t) = f_0(X,U,t) + \sum p_\alpha f_\alpha(X,U,t)}$

Il suffit que $\boldsymbol{p_1(t) \geq 0, p_2(t) \geq 0, \dots, p_n(t) \geq 0}$ et $\boldsymbol{f_0, f_1, \dots, f_n}$ concave en $(\boldsymbol{X,U})$ pour que la première de ces trois conditions soit vérifiée. Si certaines des fonctions $\boldsymbol{f_0, f_1, \dots, f_n}$ sont linéaires, il est inutile que les multiplicateurs correspondants soient non négatifs.

Il est possible d'affaiblir les conditions de concavité précédentes par le résultat suivant :

- Les conditions suffisantes à la ARROW

Les conditions nécessaires d'optimalité sont aussi suffisantes si :

L'Hamiltonien « maximisé »

$\boldsymbol{H(X,U,p,t) = MAX\ H(X,U,p,t)}$ pour $\boldsymbol{\mu_h : g_h(X,U,t) \geq 0}$

- Est concave en $\boldsymbol{X}$
- Les fonctions $\boldsymbol{g_h(X,U,t)}$ sont quasi concaves en $\boldsymbol{X}$
- Le multiplicateur $\boldsymbol{p_0 = 1}$

.2- la résolution du problème avec le principe du maximum

2-1 Les trajectoires optimales sans coût d'ajustement

En absence de coût d'ajustement, on minimise l'expression suivante :

$$\boldsymbol{MIN \sum_{i=-1}^{N-1} \left[\frac{(1+n)}{(1+\zeta)}\right]^{i+1} \left[c(g_{i+1} - g^*)^2 + (1-c)(t_{i+1} - t^*)^2 - \pi \left[\frac{(1+n)}{(1+\zeta)}\right]^{N} b_N\right]}$$

Avec : $\boldsymbol{b}$: Variable d'état $(\boldsymbol{g,t})$: Variable de contrôle $\boldsymbol{c}$: Poids donné à la variable de contrôle

$\boldsymbol{\frac{(1+n)}{(1+\zeta)}}$: est le facteur d'actualisation $\boldsymbol{n}$: Le taux de croissance de l'économie

$\boldsymbol{\zeta}$: Le taux de préférence pour le présent $\boldsymbol{\pi}$: Le poids de la dette qu'on minimisera.

Cela revient à maximiser le programme suivant :

$$-\sum_{i=-1}^{N-1}\left[\frac{(1+n)}{(1+\zeta)}\right]^{i+1}\left[c(g_{i+1}-g^*)^2+(t_{i+1}-t^*)^2-\pi\left[\frac{(1+n)}{(1+\zeta)}\right]^N b_N\right]$$

Sachant que l'état du système : $b_{i+1}-b_i=d_{i+1}+\left[\frac{(r-n)}{(1+n)}\right]b_i$

Sous contraintes : $t_t \leq t_{sup}$

$$g_t \geq g_{inf}$$

Avec :

t_{sup} : le niveau maximum de taxation g_{inf} : le niveau minimal de dépenses

Soit le Lagrangien :

$$L=-\pi\left[\frac{(1+n)}{(1+\zeta)}\right]^N b_N+\sum_{i=-1}^{N-1}-\left[\frac{(1+n)}{(1+\zeta)}\right]^{i+1}\left[c(g_{i+1}-g^*)^2-(t_{i+1}-t^*)^2\right]+p_{i+1}\left[b_i+d_{i+1}+\left[\frac{(r-n)}{(1+n)}\right]b_i-b_{i+1}\right]+\lambda_{1i}\left(t_{sup}-t_i\right)+\lambda_{1i}\left(g_i-g_{inf}\right)$$

A- <u>La séquence de dépenses :</u>

Conditions d'optimalité :

$$\frac{\delta H(i)}{\delta g_{i+1}}=-2c\left[\frac{(1+n)}{(1+\zeta)}\right]^{i+1}(g_{i+1}-g^*)+p_{i+1}=0$$

D'où : $g_{i+1}=g^*-\pi\frac{1}{2c}\left[\frac{(1+r)}{(1+\zeta)}\right]^{N-i-1}$

B- <u>La séquence des recettes</u>

Conditions d'optimalité

$$\frac{\delta H(i)}{\delta t_{i+1}}=-2(1-c)\left[\frac{(1+n)}{(1+\zeta)}\right]^{i+1}(t_{i+1}-t^*)-p_{i+1}=0$$

D'où : $t_{i+1}=t^*+\pi\frac{1}{2(1-c)}\left[\frac{(1+r)}{(1+\zeta)}\right]^{N-i-1}$

C- <u>L'évolution de la dette</u>

$$b_{i+1}=\frac{(1+r)}{(1+n)}b_i+g^*-t^*-\pi\frac{1}{2c(1-c)}\left[\frac{(1+r)}{(1+\zeta)}\right]^{N-i-1}$$

2-2 <u>Les trajectoires optimales avec coût d'ajustement</u>

Avec cout d'ajustement, le programme du gouvernement s'écrit ainsi :

$$MIN\sum_{i=-1}^{N-1}\left[\frac{(1+n)}{(1+\zeta)}\right]^{i}c_i$$

Avec : $c_i=(g_i-g_i')^2+(1-c)(t_i-t_i')^2$

$$g_i=\varphi_0 g_{i-1}+(1-\varphi_0)g^*$$

$$t_i = \varphi_1 t_{i-1} + (1-\varphi_1)t^*$$

Sachant que : $$b_{i+1} = b_i + d_{i+1} + \left[\frac{(r-n)}{(1+n)}\right] b_i$$

Sous deux contraintes : $$c_2 : t_i \leq t_{sup}$$

$$c_3 : g_i \geq g_{inf}$$

Avec : g'_i : la dépense optimale pour l'année (i)

t'_i : la recette optimale pour l'année (i)

On résout le programme dans le cas où le taux d'actualisation pour le présent et le taux de croissance sont inférieurs au taux d'intérêt.

Le Lagrangien correspondant au problème ci-dessus s'écrit :

$$L = -\pi\left[\frac{(1+n)}{(1+\zeta)}\right]^N b_N + \sum_{i=-1}^{N-1} - \left[\frac{(1+n)}{(1+\zeta)}\right]^{i+1}\left[c\big((g_{i+1}-g^*) - \varphi_0(g_i - g^*)\big)^2 + (1-c)\big((t_{i+1}-t^*) - \varphi_1(t_i - t^*)\big)^2\right] + p'_{i+1}\left[b_i + d_{i+1} + \left[\frac{(r-n)}{(1+n)}\right] b_i - b_{i+1}\right] + \lambda_{1i}(t_{sup} - t_i) + \lambda_{1i}(g_i - g_{inf})$$

A- <u>La séquence de dépenses</u>

Conditions d'optimalité :

$$\frac{\delta H(i)}{\delta g(i)} = -2c\left[\frac{(1+n)}{(1+\zeta)}\right]^{i+1}[(g_{i+1}-g^*) - \varphi_0(g_i - g^*)] + 2c\varphi_0\left[\frac{(1+n)}{(1+\zeta)}\right]^{i+2}[(g_{i+2}-g^*) - \varphi_0(g_{i+1}-g^*)] + p'_{i+1} = 0$$

D'où : $$g_{i+1} = g^* + \varphi_0{}^{i+1}(g_{-1} - g^*) + \left[\frac{B^{i+1}.A}{1-\varphi_2 B}\right]\left[\frac{1-(\varphi_0 B^{-1})^{i+2}}{1-\varphi_0 B^{-1}}\right] \ldots (d)$$

Avec : $B = \frac{1+\zeta}{1+r}$, $\varphi_2 = \varphi_0 \frac{(1+n)}{(1+\zeta)}$, $A = \frac{\left[-\pi\frac{(1+r)}{(1+\zeta)}\right]^N}{2c}$

B- <u>La séquence des recettes</u>

Conditions d'optimalité

$$\frac{\delta L}{\delta t_{i+1}} = -2(1-c)\left[\frac{(1+n)}{(1+\zeta)}\right]^{i+1}[(t_{i+1}-t^*) - \varphi_1(t_i - t^*)] + 2\varphi_1(1-c)\left[\frac{(1+n)}{(1+\zeta)}\right]^{i+2}[(t_{i+2}-t^*) - \varphi_1(t_{i+1}-t^*)] - p'_{i+1} = 0$$

D'où : $$t_{i+1} = t^* + {\varphi_1}^{i+1}(t_{-1} - t^*) + \left[\frac{A\, B^{i+1}}{1-\varphi_3 B}\right]\left[\frac{1-(\varphi_1 B^{-1})^{i+2}}{1-\varphi_1 B^{-1}}\right] \ldots (R)$$

Avec : $B = \frac{1+\zeta}{1+r}$, $\varphi_3 = \varphi_1 \frac{(1+n)}{(1+\zeta)}$, $A = \frac{\left[\pi\frac{(1+r)}{(1+\zeta)}\right]^N}{2c}$

C- L'évolution de la dette

$$b_{i+1} = \alpha b_i + g^* - t^* + {\varphi_0}^{i+2}(g_{-1} - g^*) - {\varphi_1}^{i+2}(t_{-1} - t^*) - \left[\frac{B^{i+1}.A}{1-\varphi_2 B}\right]\left[\frac{1-(\varphi_0 B^{-1})^{i+2}}{1-\varphi_0 B^{-1}}\right] - \left[\frac{A\, B^{i+1}}{1-\varphi_3 B}\right]\left[\frac{1-(\varphi_1 B^{-1})^{i+2}}{1-\varphi_1 B^{-1}}\right]$$

Application numérique :

1- L'application dans le cas sans coût d'ajustement :

$$g_{i+1} = g^* - \pi\left[\frac{(1+r)}{(1+\zeta)}\right]^{N-i-1} , \qquad t_{i+1} = t^* + \pi\left[\frac{(1+r)}{(1+\zeta)}\right]^{N-i-1}$$

Pour pouvoir simuler les évolutions possibles et recettes budgétaires nous prenons comme données de base :

La dette initiale b_{-1}=111% , les recettes initiales t_{-1}=31% , Les dépenses initiales g_{-1}= 43%

Le taux d'intérêt r =11% , le taux de croissance n =7% , le taux de préférence ζ =8%

La cible des dépenses g^* =47% la cible de taux d'imposition t^*=50% , la cible de déficit d^*=-3%

Le poids de la dette à long terme π= 4,6%

Le choix de poids de la dette a été pris en fonction de g_{inf}(**40**%) et de t_{sup}(60%)

Tableau 1 : L'évolution des variables d'états et de contrôle en (%PIB)

	g_{i+1}	g^*	t_{i+1}	t^*	d_{i+1}	b_{i+1}
i=-1	41,28	47	55,18	50	-13,36	102,08
i=0	41,97	47	55,03	50	-13,08	92,98
i=1	42,13	47	54,88	50	-12,75	83,95
i=2	42,26	47	54,73	50	-12,47	74,84
i=3	42,4	47	54,60	50	-12,20	65,63

On remarque dans le tableau 1 que les dépenses croissent vers la cible de dépenses du gouvernement tandis-que les recettes décroissent vers la cible de recettes, donc l'écart est contraint de diminuer et on s'aperçoit aussi que la dette décroit d'une période à l'autre.

2- L'application en présence des coûts d'ajustement :

Avant de passer à l'application du modèle, il est intéressant de savoir comment la politique du gouvernement doit évoluer à court terme.

Pour cela, nous calculons les dérivées partielles du déficit en part du PIB par rapport aux différents paramètres.

2.1- impact des différents paramètres :

On prend i=-1, afin de simplifier les calculs, nous supposons que $\boldsymbol{\varphi_1} = \boldsymbol{\varphi_0} = \boldsymbol{\varphi}$,c.a.d on ajuste les dépenses et les recettes avec le même rythme. c =1-c = $\frac{1}{2}$

a- Impact du déficit passé : $\frac{\partial(g_0 \ -t_0)}{\partial(g_{-1} \ -t_{-1})} = \boldsymbol{\varphi}$

b- Impact de la cible : $\frac{\partial(g_0 \ -t_0)}{\partial(g^*-t^*)} = \mathbf{1} - \boldsymbol{\varphi}$

c- Impact du taux d'intérêt : $\frac{\partial(g_0 \ -t_0)}{\partial(r)}$ = $[(\frac{-\pi}{c})(\frac{1+r}{1+\xi})^N]$A avec A = $[N/(1-\varphi(\frac{1+n}{1+r}))]\left[\left(\frac{1+\zeta}{1+r}\right)\right] - [\varphi\frac{(1+n)}{((1+r)-\varphi(1+n))^2}]$

d- Impact du poids de la dette à long terme : $\frac{\partial(g_0 \ -t_0)}{\partial(\pi)}$ =$[(\frac{1}{c})(\frac{1+r}{1+\xi})^N]$ $[1/(1-\varphi(\frac{1+n}{1+r}))]$

e- Impact du taux de croissance : $\frac{\partial(g_0 \ -t_0)}{\partial(n)}$ = $(\frac{-\pi}{c})B$ avec B=$\left[\left(\frac{\varphi}{1+r}\right)\right][1 - [\varphi\frac{(1+n)}{((1+r)}]^2$

f- Impact du taux de préférence pour le présent : $\frac{\partial(g_0 \ -t_0)}{\partial(\xi)}$ = $[\pi N/c(1-\varphi(\frac{1+n}{1+r}))]$D avec D=$[((\frac{1+r}{1+\xi})^{N-1}]\ [(\frac{1+r}{1+\xi})^2]$

g- Impact du paramètre de l'ajustement : $\frac{\partial(g_0 \ -t_0)}{\partial(\varphi)}$ = $d_{-1} - d^*$ - $[(\frac{-\pi}{c})(\frac{1+r}{1+\xi})^N][(\frac{1+n}{1+r})]$E avec E = $[1/(1-[\varphi\ (\frac{1+n}{1+r})]^2\ )]$

2.2- Simulation et chiffrage des dérivées :

Pour pouvoir simuler les évolutions possibles et recettes budgétaires et par conséquent les déficits budgétaires et aussi chiffrer les dérivées partielles, nous prenons les mêmes données précédentes sauf pour le poids de la dette à long terme π= 0,1% , $\varphi_1 = \varphi_0$=0,9 , c =1-c = $\frac{1}{2}$

Tableau 2 : L'évolution des variables d'états et de contrôle en (%PIB)

	g_{i+1}	g^*_{i+1}	t_{i+1}	t^*_{i+1}	d_{i+1}	b_{i+1}
i=-1	42,54	43,4	33,76	32,90	8,78	123,92
i=0	42,14	42,98	36,38	35,38	5,91	134,46
i=1	41,8	42,62	38,42	37,60	3,38	142,86
i=2	41,52	42,32	40,38	39,57	1,14	149,34
i=3	41,3	42,06	42,11	41,34	-0,81	154,11

D’après le tableau n°2, on s’aperçoit facilement que le déficit n’a pas cessé de diminuer jusqu'à arriver à un excédent de l’ordre de 0,81%.

Tableau 3 : les valeurs des dérivées partielles de D_0 par rapport à :

d_{-1}	0,9
d*	0,1
r	-0,018
n	-0,106
π	-18,4
φ	0,017
ζ	0,08

- L’effet du poids de la dette à long terme est très fort : un accroissement d’1 point du poids de la dette nécessite une réduction du déficit courant de l’ordre de 18,4 point du PIB, ce qu’est logique car plus l’effet de la dette est important sur les décisions de l’Etat à long terme plus il est tenu de réduire ces déficit et même de réaliser des excédents.
- L’effet du taux du paramètre d’ajustement : une variation d’1 point de ce taux, provoque une variation dans le même sens, de l’ordre de 0,017 du déficit courant, plus la vitesse de l’ajustement est élevée (1-φ), moins élevé est le déficit courant.

Conclusion :

Cet article coïncide avec les mesures qu’entreprend actuellement l’Algérie pour corriger les déséquilibres et les distorsions qui apparaissent au niveau de son budget.

L’objectif est de modéliser le comportement des finances publiques afin de fournir aux différents acteurs un instrument d’aide à la décision. On a construit un modèle dans lequel l’Etat, soumis à sa contrainte budgétaire intertemporelle, réalise un arbitrage entre un objectif de long terme de recettes et de dépenses publiques et son souhait de réduire les coûts d’ajustement liées à sa politique budgétaire.

Les principaux résultats de cette application, issus des conditions d’optimalité du modèle sont les suivants :

- Diminution du déficit courant est dû à l’augmentation des recettes plus qu’à une diminution des dépenses.
- Les déficits primaires courants dépendent très fortement du poids de la dette donné à long terme, du taux de croissance et du déficit précédent.
- Le déficit primaire courant est peut sensible aux variations du taux d’intérêt de la dette ainsi qu’à celle du taux de préférence pour le présent.

<u>Les références</u>

1- Les ouvrages :

- Bachir.Yelles chaouche « Le budget de l’Etat et des collectivités locales » ed O.P.U :07-90
- Dominique Lacaze « Optimisation appliquée à la gestion et l’économie »ed économica ; 1990

- Rodrique Tremblay « Macro économique (moderne) Théorie et réalité, ed Etude vivantes 1992
- Loic Philip « Dictionnaire encyclopédique de finance publique » ed économica
- Louis tratabas « Finances publiques » ed Dalloz

2- Les revues :

- Séminaire sur les finances publiques, organisé avec la collaboration du fonds Monétaire Arabe, ed O.P.U
- Economie et prévision n° 104
- Les limites de la politique en Algérie (Abederahmane Saker) CREAD n° 82