LA FONCTION FILTRAGE : FILTRE DE KALMAN

H. ABDELLAOUI :
Institut National de Cartographie

Abstract
The central problem for GPS receiver is the precise estimation of the position, velovity, and time based on noisy observations of the satellites signals. It should come as no surprise then that this is an ideal setting for Kalman filtering has come a household word in the GPS industry. Our discussion of the subject here is intended to be tutorial and must be brief.Thus, we will confine our attention to receiver applications only and will leave all of the other intesting facets of Kalman filtering that are applied to GPS for extracurricular reading.

La fonction filtrage:

Le filtrage est la mise en forme d'un signal à des fins très diversifiés. Pendant longtemps, son rôle a consisté surtout dans l'élimination de bruits superposés aux signaux utiles et sa mise en oeuvre a été du ressort des électroniciens. Avec l'avènement de l'automatique et des calculateurs numériques , le filtrage est devenu un outil fondamental . Shannon a montré la nécessité d'un filtrage préalable à tout traitement numérique pour garantir l'équivalence analogique-numérique. Une fois même la conversion numérique obtenue, le filtrage fournit une méthodologie dans l'extraction d'informations utiles , pour la reconnaissance des formes, dans l'élaboration de lois de commande de systèmes industriels, dans l' analyse des données et pour la gestion de production. Ainsi avec la multiplicité des applications, et le type de problèmes que l'on rencontre, autant dans le domaine informatique que médical, industrie, sciences spatiales, on va retrouver naturellement un grand nombre de méthodes d'utilisations de filtres.

1-Lorsque le rôle du filtre consiste dans la mise en forme du spectre et plus particulièrement dans l'élimination d'une bande de fréquence comme c'est le cas dans le codage, il s'agit alors de filtres spécifiques, de réalisation analogique, tels que ceux de Butterworth, Bessel, Tchébyscheff...

2-En réalisation numérique: selon que l'on opère en temps réel ou en temps différé, différentes techniques de transposition sont développées, telles que l'approximation impulsionnelle ou la transformée de Fourier rapide (FFT).

3-Lorsque le filtre consiste à approcher aux mieux un signal ou une courbe à l'aide de polynômes , la méthode des moindres carrées délivre directement les paramètres cherchés grâce à une résolution de systèmes linéaires.

4-Lorsque le signal utile et le bruit sont caractérisés par leurs propriétés statistiques, le filtrage de Wiener et sa généralisation , le filtre de Kalman permettent l'élimination optimale du bruit.

Le filtre de KALMAN

Le filtre de Kalman-Bucy résout de façon élégante le problème du filtrage linéaire. L'estimation stochastique avait été abordé par Wiener dans le domaine fréquentiel: dans le cas stationnaire, pour des spectres rationnels, le filtre de Wiener offre une solution analytique . Utilisant la notion d'état, le filtre de Kalman-Bucy se presente sous forme d'un ensemble d'équations différentielles ou récurrentes plus facile à résoudre sur calculateur. Sa réalisation bien adaptée au traitement numérique en ligne fournit non seulement l'estimée optimale, mais aussi la variance de l'erreur d'estimation. Le filtre de Kalman généralise le filtrage optimal aux systèmes non stationnaires en présence de conditions initiales et d'entrées déterministes. C'est un outil de base dans le domaine aérospatial où il a été particulièrement appliqué, que ce soit pour la détermination des orbites ou pour la navigation.

Position du problème:

Le problème de l'estimation de l'état X(t) d'un système dynamique soumis à des entrées déterministes et aléatoires à partir de mesures Z(t) bruitées peut être divisé en trois classes distinctes selon l'intervalle d'observations [t0 - t1]:
-La prédiction si t > t1
-Le filtrage si t = t1
-le lissage si t0 < t < t1
Le filtre de Kalman-Bucy permet de résoudre directement la prédiction et le filtrage et il est à la base de la théorie du lissage.
Modèle mathématique du système:

L'évolution de l'état du système est décrite par le système d'équations différentielles:

$$\dot{X}(t) = F(t)X(t) + u(t) + v(t) \quad (1)$$

X est le vecteur d'état de dimension n.
F(t) est une matrice fonction de t, de dimension n × n.
u est un vecteur d'entrée, fonction de t, connu.
v est un bruit blanc gaussien à n dimensions de moyenne nulle: E[v(t)]= 0 $\forall$ t.

$$E[v(t)v^t(\tau)] = Q(t)\delta(t-\tau)$$

Q(t) est une matrice définie non négative.
L'état initial est lui-même aléatoire, de statistique connue, gaussienne de moyenne $E[X(t_0)] = m_0$ et de covariance $E[(X(t_0)-m_0)(X(t_0)-m_0)^T] = \Lambda_0$
t est indépendant du bruit v.

L'état de ce système est observé par m mesures Z(t) liées à l'état initial par l'équation d'observation :

$$Z(t) = H(t)X(t) + w(t) \quad (2)$$

H(t) est une matrice fonction de t de dimension m × n et w un bruit blanc gaussien à m dimensions, indépendant de v(t) et de $X(t_0)$, de moyenne nulle et de covariance :

$$E[w(t)w^T(\tau)] = R(t)\delta(t-\tau)$$

R(t) est une matrice définie positive.

Ce système est obtenu soit par l'écriture des lois physiques qui régissent le système, soit par l'application de techniques d'identification instrumentale. L'écriture en équation d'état est, en général, de la forme :

$$\begin{aligned} \dot{Y}(t) &= A(t)Y(t) + B(t)e(t) + C(t)p_1(t) \\ S(t) &= D(t)Y(t) + p_2(t) \end{aligned}$$

où e(t) est une entrée déterministe, $p_1(t)$ une entrée aléatoire, S(t) la sortie mesurée et $p_2(t)$ un bruit de mesure, de moyenne nulle, qui peut souvent être considéré comme blanc.
Ce modèle peut se ramener à la forme canonique (1) et (2) si on envisage le processus général de l'entrée aléatoire p_1.

$$\begin{cases} \dot{Y}_1 = A_1 Y_1 + b_1 \\ p_1 = C_1 Y_1 \end{cases}$$

où b_1 est un bruit blanc de moyenne nulle. Finalement en considérant le vecteur augmenté $\begin{vmatrix} Y \\ Y_1 \end{vmatrix}$,

le système :

$$\begin{bmatrix} \dot{Y} \\ \dot{Y}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(t) & C(t)C_1(t) \\ 0 & A_1(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ Y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B(t)e(t) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_1(t) \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} D & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ Y_1 \end{bmatrix} + p_2(t)$$

est bien de la forme de (1) et (2).

On notera que les matrices F,H,Q et R sont des fonctions du temps , le système et les bruits ne sont pas stationnaires.
Le modèle discret qui est le plus couramment utilisé est obtenu soit directement par une modélisation discrète, soit par discrétisation du modèle continu.

Les équations (1) et (2) prennent alors la forme suivante:

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= F_k X_k + u_k + v_k \\ Z_k &= H_k X_k + w_k \end{aligned}$$

où V_k et W_k sont des bruits pseudo-blancs gaussiens de moyenne nulle tels que :

$$E[v_k v_J^T] = Q_k \delta_{kJ}$$

$$E[w_k w_J^T] = R_k \delta_{kJ}$$

$$E[v_k w_J^T] = 0$$

δ_{kJ} est le symbole de Kronecker

$$\delta_{kJ} = \begin{cases} 1 & k = J \\ 0 & k \neq J \end{cases}$$

L'état initial X_0 est aussi une variable gaussienne, indépendante des bruits u_k et v_k de moyenne m_0 et de matrice de covariance Λ_0 .

Formulation du filtre de Kalman:Exemple positionnement et navigation par GPS en temps réel ;

Cas du logiciel PHARAO : (**P**hase **A**mbiguity **R**esolution **A**pplications **O**n-the-fly): C'est un logiciel de traitement de données cinématiques temps réel DGPS/DGLONASS . Développé par des chercheurs de l'Institut de Géodésie et de Navigation à l'Université FAF Munich .

Le filtre de Kalman utilisé par PHARAO est basé sur le modèle du système dynamique suivant:

$$X_k = \Phi_k X_{k-1} + G_k W_k$$
$$Y_k = H_k X_{k-1} + V_k \qquad \textbf{(3)}$$

où

X_k vecteur d'état de dimension n à l'époque k

W_k vecteur bruit de dimension p à l'époque k

Y_k vecteur d'observations de dimension m

Φ_k matrice non singulière de dimension n × n

G_k matrice d'entrée de dimension n × p

H_k matrice-bruit fonction de k de dimension m × n

V_k vecteur de dimension m bruit des mesures avec structure de covariance connue.

et,

$$E = \left[W_k W_i^T\right] = \begin{cases} Q_k , & i = k \\ 0 , & i \neq k \end{cases}$$

$$E = \left[V_k V_i^T\right] = \begin{cases} R_k , & i = k \\ 0 , & i \neq k \end{cases}$$

$$E\left[W_k V_i^T\right] = 0 , \quad \forall k, \forall i$$

Les formules de l'état du système sont:

$$\hat{X}_k^- = \Phi_k \hat{X}_{k-1}$$
$$P_k^- = \Phi_{k-1} P_k \Phi_{k-1}^T + G_{k-1} Q_{k-1} G_{k-1}^T$$

P_k^- matrice covariance,

$\hat{X}_k^-$ estimation de X_k basée sur les mesures de Y_1 à Y_{k-1} , c'est à dire nous connaissons l'erreur e_k^- de la matrice covariance, tel que

$$e_k^- = X_k - \hat{X}_k^-$$

L'équation du système à partir des observations s'écrit:

$$\hat{X}_k = \hat{X}_k^- + K_k (Y_k - H_k \hat{X}_k^-) \qquad (4)$$

$$P_k = E\left[e_k e_k^{\prime}\right] = E\left[(X_k - \hat{X}_k)(X_k - \hat{X}_k)^T\right] \qquad (5)$$

K_k matrice-gain-Kalman.

(3) dans (4) et le résultat dans (5)

$$P_k = E\left\{\left[\left[(X_k-\hat{X}_k^-)-K_k(H_k\hat{X}_k+V_k-H_k\hat{X}_k^-)\right]\times\left[(X_K-\hat{X}_k^-)-K_k(H_kX_k+V_k-H_k\hat{X}_k^-)\right]^T\right]\right\} \quad (6)$$

$$P_k = (I-K_kH_k)P_k^-(I-K_kH_k)^T + K_kR_KK_k^T$$
(7)

Nous voulons calculer K_k : c'est à dire minimiser les termes individuels de la diagonale principale de P_k parce que ces termes représentent les estimations de l'erreur de variance des éléments du vecteur système d'état qu'on veut estimer. Cette estimation peut être faite par plusieurs approches. Nous la présentons par le calcul de la différentiation, en utilisant la formule suivante relative à la différentiation de deux matrices :

$$\frac{d[trace(AB)]}{dA} = B^T,$$ (AB matrices carrées)
(8)

$$\frac{d[trace(ACA^T)]}{dA} = 2AC$$, (C est symétrique) (9)

L'équation (7) peut s'écrire de la manière suivante :

$$P = P^- - KHP^- - P^-H^TK^T + K(HP^-H^T+R)K^T$$
(10)

A noter que le deuxième et le troisième terme, sont linéaires par rapport à K, et le quatrième terme est quadratique en K. Maintenant les formules (8) et (9) peuvent être appliquées.
Remarque :

$$trace(P^-H^TK^T) = trace(KHP^-)^T$$

le résultat est :

$$\frac{d(traceP)}{dK} = -2(HP^-)^T + 2K(HP^-H^T+R)$$
(11)

posant la dérivée égale à zéro et déduire le gain optimal K_k de Kalman :

$$K_k = P_k^-H_k^T(H_kP_k^-H_k^T+R_k)^{-1} \quad (12)$$

La matrice covariance associée à l'estimation optimale peut être calculée:

$$P_k = (I-K_kH_k)P_k^-(I-K_kH_k)^T + K_kR_KK_k^T$$
$$= P_k^- - K_kH_kP_k^- - P_k^-H_k^TK_k^T + K_k(H_kP_k^-H_k^T+R_k)K_k^T$$
(13)

L'équation (12) dans l'équation (13) donne :

$$P_k = (I-K_kH_k)P_k^-$$

Dans le cas du logiciel PHARAO, le vecteur de l'état du système contient les coordonnées inconnues WGS84 du récepteur mobile, l'erreur de l'horloge du récepteur , l'ambiguïté des simples ou doubles différences de phase (selon la configuration).
Ainsi le vecteur d'état pour une simple différence peut s'écrire de la manière suivante:

$$S = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ \delta_i \\ N^1 \\ N^2 \\ . \\ . \\ . \\ N^k \end{bmatrix}$$

Avec

X,Y,Z position du récepteur mobile en WGS84

δ_i erreur de l'horloge en seconde

N^j ambiguïté simple différence pour le satellite j en cycles (de L1 ou L2).
K le nombre d'ambiguïté.

Et pour le cas d'une double différence le vecteur d'état peut s'écrire :

$$S = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ N^{1,ref} \\ N^{2,ref} \\ . \\ . \\ . \\ N^{k,ref} \end{bmatrix}$$

avec $N^{j,ref}$ double différence d'ambiguïté entre satellite j et le satellite de référence (en cycles).

Références :

-Grover (R.), Brown-PatrickY.C), Hwang, Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering -Second edition .

-J.J.Spilker Signal Structure and Theoretical Performance..

-. Cocard (M.). 1995, High Precision GPS Processing in Kinematic mode.

-Integrated System for Automatic Landing using Differential GPS and Inertial Measurment Unit. Thomas Jacob.

-Wener (W.), 1996, PHARAO Technical note. IFEN1 FAF/Munich.

- ABDELLAOUI (H), 1997, Positionnement et localisation en temps réel par Satellites GPS Thèse de Magister, CNTS, ARZEW.