# ايجاد الحل الأمثل لمشاكل اتخاذ القرارات ذات الدوال الكسرية باستخدام طريقة مضروبات لاكرانج و البرمجة بالأهداف

# Finding the optimal solution for fractional function decision making using Lacrange method and goal programming

لطيفة ويس[1]، يوسف صوار[2]، هجيرة بولومة[3]

جامعة أبو بكر بلقايد -تلمسان-، ouislatifa20121988@gmail.com

جامعة د. الطاهر مولاي –سعيدة-، syoucef12@yahoo.fr

جامعة د.الطاهر مولاي –سعيدة-، bhadjira20@gmail.com

تاريخ الاستلام: 11 /02/ 2018 تاريخ القبول: 16 /2019/02 تاريخ النشر: اليوم /الشهر/السنة

***ملخص:***

و الواقع الذي تشهده المؤسسة الجزائرية فيما يخص اتخاذ القرار هو في تراجع و ذلك لقلة أو انعدام شبه تام لاستخدام الطرق الكمية و الأساليب الرياضية الحديثة في عملية اتخاذ القرار و لهذا الغرض تناولنا موضوع هذه الدراسة، التي كان الهدف منها محاولة معرفة عتبة المردودية، من خلال إعداد نموذج يساعد في اتخاذ القرار و هو البرمجة الكسرية على واقع إحدى المؤسسات الصناعية و المتمثلة في مؤسسة الإسمنت بولاية سعيدة (SCIS)، و قد توصلت النتائج إلى أن عتبة المردية في هذه المؤسسة تقدر بـ 1.710 مليون دينار جزائري.

***الكلمات المفتاحية:*** اتخاذ القرار، البرمجة الكسرية، عتبة المردودية.

تصنيف **JEL** : C6, C61.

***Abstract:***

The reality, in the Algerians institutions of decision-making is in decline because of the almost absence of using the modern quantitative mathematical methods in the decision-making process and for this reason we dealt the subject of this study, which the objective is trying to know the breakeven point by preparing a model help in making decision and it's fractional programming on one of the industrial companies which is institution of cement in Saida. The results indicate that the breakeven point at this institution is estimated at 1.710 million Algerian Dinars.

***Keywords***: Decision-making, fractional programming, breakeven point.

**Jel Classification Codes:** C6, C61.

## 1. مقدمة:

نظرا لأن عملية اتخاذ القرار أصبحت عملية شديدة التعقيد في بيئة متغيرة باستمرار و تنوع المتغيرات الواجب دراستها فإن الأساليب التقليدية التي كان يعتمد عليها في الماضي أصبحت غير كفؤة و استدعى هذا بالضرورة الاستعانة بأساليب التحليل الكمي لاستخدامها و

[1] لطيفة ويس، ouislatifa20121988@gmail.com
[2] يوسف صوار، syoucef12@yahoo.fr
[3] هجيرة بولومة، bhadjira20@gmail.com

الاعتماد عليها في اتخاذ القرارات. و يجدر الإشارة إلى أن الأساليب الكمية ليست بديلا للمدير في اتخاذ القرارات و لكنها أدوات مساعدة و فعالة إذا ما تم التعرف على محدداتها و مجالات تطبيقها (محمد البكري، 2002).

و تعد البرمجة الخطية إحدى أساليب بحوث العمليات التي تتألف من نموذج رياضي يتكون من دالة هدف يراد إيجاد الحل الأمثل لها في ظل مجموعة قيود خطية محققا بذلك جميع قيود المسألة لمتغيرات غير سالبة. و ظهرت بعد ذلك مسائل أخرى تكون فيها دالة الهدف على شكل داول غير خطية و قيودها خطية سميت بمسائل البرمجة الكسرية و هي من المواضيع المهمة في بحوث العمليات (عبد الله بالشيوة، 2011)

و بالتالي فإن هذا البحث يتناول عملية اتخاذ القرارات عندما تكون دالة الهدف عبارة عن دالة كسرية، و قمنا باختيار أحد الدوال الكسرية و المتمثلة في عتبة المردودية و هي النقطة الميتة في مستوى النشاط الذي تكون فيه مجموع الإيرادات تغطي مجموع التكاليف و عندها تكون النتيجة معدومة أي لا ربح و لا خسارة.

كما أنها تعبر عن رقم الأعمال الذي تكون عنده التكاليف الثابتة و التي لا تتغير مع التغير في حجم الإنتاج خلال الفترة القصيرة تعادل الفرق بين رقم الأعمال و التكاليف المتغيرة التي تمثل التكلفة المرتبطة بإنتاج و بيع وحدة واحدة من المنتج. (Dubrelle, 2007)

ويتم حل نماذج البرمجة الكسرية باستخدام بعض طرائق البرمجة الكسرية ومن بينها طريقة برمجة الأهداف، طريقة تكميلية مطورة، تقريب دالة الهدف، دالة لاكرانج.

**و عليه ترتكز إشكالية الدراسة على السؤال التالي:**

- هل يمكن إيجاد الحل الأمثل لمشكلة تحديد عتبة المردودية في المؤسسة محل الدراسة-شركة الاسمنت بسعيدة- باستخدام نموذج البرمجة الكسرية؟

**للإجابة على هذه الاشكالية قمنا بصياغة الفرضية التالية:**

- يمكن تطبيق نموذج البرمجة الكسرية لحل مشاكل اتخاذ القرارات ذات الدوال الكسرية على مستوى المؤسسات الجزائرية.

***2. الإطار النظري:*** *البرمجة الكسرية لحل مسائل اتخاذ القرار.*

***1.2 تعريف البرمجة الكسرية:*** ظهرت مسائل تكون فيها دالة الهدف عبارة عن نسبة بين دالتين خطيتين و قيود المسألة خطية و متغيراتها غير سلبية تدعى المسألة حينئذ بمسألة برمجة دوال الهدف الكسرية (أحمد حسن، هادي حسن، 2008)

***الصيغة الرياضية العامة لنموذج البرمجة الكسرية:*** يمكن التعبير عن مسألة البرمجة الكسرية بالنموذج الرياضي الآتي:

$$[\text{Max}]\ Z = \frac{CX+\alpha}{DX+\beta}$$

Sous contraintes $AX \leq B$

حيث أن:

X: تمثل متغيرات النموذج الرياضي.

D: تمثل معاملات المتغيرات (x) في دالة المقام.

$\alpha$: تمثل الحد المطلق في دالة البسط (كمية ثابتة).

A:مصفوفة المعاملات للقيود.

$\beta$: تمثل الحد المطلق في دالة المقام (كمية ثابتة). B: مصفوفة ثوابت الطرف الأيمن للقيود.

C: تمثل معاملات المتغيرات (x) في دالة البسط.

و لحل مسائل البرمجة الكسرية يجب توفر الشرطين الآتيين:

1) $DX+\beta \neq 0$ يمثل هذا الشرط قيمة معرفة للدالة Z(X).

2) $DX+\beta = \emptyset(CX+\alpha)$ حيث أن $\emptyset$ كمية ثابتة.

فإذا استوفى النموذج الرياضي على هذه الشروط فيمكن حل المسألة بعدة طرق تستخدم لحل مسائل البرمجة الكسرية (حياوي لايذ، 2012)

***2.2 طرق حل مسائل البرمجة الكسرية:*** يوجد عدة طرق لحل مسائل البرمجة الكسرية منها: الطريقة التكميلية، طريقة تطوير قطع المستوي لإيجاد الحل العددي لمسائل البرمجة الكسرية، طريقة تقريب دالة الهدف لحل مسائل البرمجة الكسرية غير المقيدة و قد وقع اختيارنا على طريقة مضروبات لاكرانج و طريقة البرمجة بالأهداف (بشير رحيمة، 2011).

1. ***طريقة مضروبات لاكرانج لحل مسائل البرمجة الكسرية:*** لعل من المفيد في أغلب مسائل البرمجة الخطية و اللاخطية و الكسرية الحصول على قيمة قصوى (عظمى أو صغرى) لدالة الهدف وفقا لمجموعة من القيود أو الشروط الإضافية. إن طريقة مضروبات لاكرانج بإمكانها تحقيق ذلك حيث تستخدم الطريقة دالة هدف و مجموعة معينة من القيود لتكون دالة جديدة تدعى بدالة لاكرانج، و تجرى على هذه الدالة عدة اشتقاقات تفاضلية تكون طويلة في أغلب الأحيان للحصول على مجموعة معادلات بواسطتها يمكن الوصول إلى مجموعة من الحلول يكون الحل الأمثل من ضمنها (بشير رحيمة، 2011).

***إيجاد الحل الأمثل لمسائل البرمجة الكسرية بطريقة مضروبات لاكرانج:*** تعتبر البرمجة الكسرية حالة خاصة من البرمجة اللاخطية فما ينطبق من الحلول لحل مسائل البرمجة اللاخطية يمكن تطبيقه على البرمجة الكسرية لكن العكس غير صحيح. و لعل أكثر الطرق شيوعا و استعمالا هي طريقة مضروبات لاكرانج.

فإذا عبرنا عن مسألة البرمجة الكسرية بالنموذج الرياضي الآتي:

$$\text{Max } Z=\frac{CX+\alpha}{CX+\beta}$$

$$\text{s.t } AX\leq B \qquad X_j\geq 0$$

***خطوات حل مسائل البرمجة الكسرية:***

1- نجزئ دالة الهدف الكسرية إلى دالتين خطيتين تمثل الأولى دالة البسط و الثانية دالة المقام، و لكي تكون دالة الهدف أعظم ما يمكن يجب أن تكون دالة البسط أكبر ما يمكن ($\text{Max } Z_1$) بينما تكون دالة المقام أقل ما يمكن ($\text{Min } Z_2$)أما في حالة التدنية فتكون دالة البسط أقل ما يمكن ($\text{Min } Z_1$) و دالة المقام أكبر ما يمكن ($\text{Max } Z_2$).

2- يتم استخراج ($\text{Max } Z^*$) من حاصل جمع دالة البسط مع دالة المقام بعد تحويلها إلى ($\text{Max } Z_2$) أو ($\text{Min } Z_2$) حسب نوع دالة الهدف، ثم توضع هذه الدالة في نموذج رياضي مكون من قيود المسألة الأصلية بالإضافة إلى شروط عدم السلبية.

و لكن قيود المسألة المراد حلها قد تحمل علامة المساواة أو قد تحمل علامة اللامساواة لذا سيتم تناول دراسة الحالتين كالآتي:

أ. ***عندما تحمل القيود علامة المساواة:*** ليكن لدينا النموذج الرياضي الآتي:

Max $Z^*= f(x)$

S.t $g_1(x)=b_1$

: :

$g_m(x)=b_m$

حيث أن $f(x)$ و $g_i(x)$ $(i=1,2,\dots,m)$ بشكل عام دوال مستمرة قابلة للاشتقاق و $m \le n$ و $x$ غير مشروط بعدم اللاسلبية $(X\ge 0)$ $X= (x_1, x2,\dots, x_n)$

إن الدالة: $L(x,\lambda)= f(x) \pm\sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x_j) - b_i$ تدعى دالة لاكرانج

و أن المعلمات $\lambda= (\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m)$ تسمى مضروبات لاكرانج

و أن الشروط الضرورية للحصول على الحل الأمثل هي:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathrm{x}} = 0 \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$$

و بذلك سيكون لدينا $(n+m)$ من المتغيرات و $(n+m)$ من المعادلات و لذلك يمكن حل هذه المعادلات آنيا لإيجاد الحل لمجموعة المعادلات هذه.

***ب. عندما تحمل القيود علامة اللامساواة:*** لحل هذا النوع من المسائل بطريقة مضروبات لاكرانج لابد من تحويل متراجحات القيود إلى معادلات و ذلك يتطلب إضافة أو طرح مقادير مجهولة من كل قيد و تستخدم هذه الطريقة شروطا نصفر بواسطتها بعض المتغيرات من أجل جعل عدد متغيرات المسألة مساويا لعدد المعادلات و حل نظام المعادلات المتكون.

تستخدم طريقة مضروبات لاكرانج عندما تحمل قيود المسألة علامة اللامساواة للحصول على الشروط الضرورية شروط السلبية $-x \le 0$ بدلا من $x\ge 0$ إضافة إلى شروط أخرى من أجل تصفير بعض المتغيرات، لذلك سيكون النموذج كالآتي:

Max $Z^*= f(x)$

S.t $g_1(x)\le b_1$

: :

$g_m(x)\le b_m$

$-x_1 \le 0$

: :

$-x_n \le 0$

و لتحويل جميع متراجحات القيود إلى معادلات سيكون النموذج كالآتي:

$$\text{Max } Z^* = f(x)$$

$$\text{S.t} \quad g_1(x) - b_1 + S_1^2 = 0$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$g_m(x) - b_m + S_m^2 = 0$$

$$-x_1 + h_1^2 = 0$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$-x_j + h_j^2 = 0$$

إن دالة لاكرانج ستكون كالآتي:

$$L(x,\lambda) = f(x) \pm \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left[ g_i(x_j) - b_i + S_i^2 \right] \pm \sum_{j=1}^{n} \lambda_{j+m} \left( -x_j + h_j^2 \right)$$

حيث $\lambda_i$ و $\lambda_{j+m}$ تمثل مضروبات لاكرانج و هي موجبة في حالة التعظيم و سالبة في حالة التدنية و لحل النموذج نتبع الآتي:

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = 0 \quad j=(1,2,\dots,n)\dots\dots\dots\dots\dots(1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0 \quad i=(1,2,\dots,m)\dots\dots\dots\dots\dots(2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_{j+m}} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial S_i} = 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial h_j} = 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(4)$$

يتم حل النموذج السابق بحل المعادلات 1، 2، 3، 4 و تتلخص شروط الطريقة في تحقيق المعادلة 3 و 4 أي أن المتغيرين $\lambda_i$ أو $S_i$ يساوي صفر، أو بتعبير آخر أن أحدهما يدخل الحلول الأساسية و الآخر سيكون خارجا منها (بشير رحيمة، 2011).

2. ***<u>طريقة تقريب دالة الهدف لحل مسائل البرمجة الكسرية غير المقيدة</u>:*** حين تكون دالة الهدف نسبة بين دالتين خطيتين و قيود المسألة خطية و متغيراتها غير مقيدة بإشارة، تدعى المسألة حينئذ بمسألة البرمجة الكسرية غير المقيدة.

إن طريقة تقريب دالة الهدف هي إحدى طرائق حل مسائل البرمجة الكسرية في بحوث العمليات، حيث تعتمد طريقة الحل أسلوب المراحل والتقريب لدالة الهدف، إذ تضع في البداية تقريباً معينا لدالة الهدف كحل أولي لها ثم يعوض هذا الحل في النموذج الرياضي و يتم الحل بعدها بالطريقة المبسطة.

فإذا كان ناتج الحل هو الحل السابق نفسه نتوقف و سيكون هذا هو الحل الأمثل، عكس ذلك نستخرج تقريبا جديدا لدالة الهدف و نكرر التعويض و الحل لحين الوصول إلى الحل الأمثل.

فإذا عبرنا عن مسألة البرمجة الكسرية بالنموذج الرياضي الآتي:

Max Z= $\frac{CX+\alpha}{DX+\beta}$

AX=b

X : sans restriction

1.2. ***<u>خوارزمية الحل بطريقة تقريب دالة الهدف:</u>***

إن خوارزمية الحل بطريقة تقريب دالة الهدف تتم وفق الخطوات الآتية:

1) حساب قيمة L(X) من المعادلة الآتية

L(x)= $\frac{<C,D>}{<D,D>}$

حيث أن:

<C,D>= $\sum_{j=1}^{N} C_i D_i$

<D,D>= $\sum_{j=1}^{N} D_i^2$

2) نحول دالة الهدف الكسرية إلى دالة هدف خطية مقربة و ذلك بتعويض قيمتها في المعادلة التالية

$[Max]$F= $<C_j - L(x^*)D_j, X_j>$..............(1)(j=1,2,3,....,n)

حيث أن F هو اسم جديد لدالة الخطية المقربة.

ثم تضاف قيود المسألة الأصلية

AX=b

X : sans restriction

3) يتم التعويض عن المتغيرات غير المقيدة بإشارة كفرق بين متغيرين غير سالبين أي:

$X_j = X_j' - X_j''$     $X_j', X_j'' \geq 0$

4) نحل دالة الهدف الجديدة مع قيود المسألة بالطريقة المبسطة كنموذج برمجة خطية إلى حين الوصول إلى الحل الأمثل.

سيتم الحصول عندها على قيم$X_j$(j=1,2,3,....,n)

5) نعوض قيم $X_j$ الناتجة عن الحل الأمثل بالطريقة المبسطة للحصول على قيمة.

L(x*)= Max Z

6) نجري مقارنة بين (*L(x), L(x فإذا كانت (*L(x)=L(x نتوقف و يكون الناتج هو الحل الأمثل للمسألة، و بخلافه سوف نُكون دالة هدف جديدة F بالاعتماد على (*L(x في المعادلة (1) و نعيد استعمال الطريقة المبسطة من جديد إلى حين الوصول إلى الحل الأمثل و استخراج (**L(x و مقارنتها مع قيمة (*L(x فإذا كانت متساوية نتوقف و بخلافه يتم استخراج دالة هدف جديدة بالاعتماد على (**L(x و تعاد الخطوات السابقة نفسها باستعمال الطريقة المبسطة إلى حين الوصول إلى الحل الأمثل و هكذا (أحمد حسين، رزق السوافيري، 2004)

### *3. الدراسات السابقة:*

1- ***عباس أحمد حسن،*** اسراء هادي حسن (2007): "استخدام خوارزمية طريقة تطوير مولد قطع المستوي لإيجاد الحل العددي لمسائل البرمجة الكسرية"، و ما تم لمسه في أمثلة هذه الدراسة هو امكانية ايجاد الحل العددي الأمثل لمسائل البرمجة الكسرية باستخدام هذه الطريقة.

2- ***رشيد بشير رحيمة،*** علي حسين حسن (2009): "تطوير طريقة دالة الهدف لحل مسائل البرمجة الكسرية غير المقيدة"، و توصلت هذه الدراسة إلى أن طريقة تقريب دالة الهدف هي إحدى طرائق بحوث العمليات لحل مسائل البرمجة الكسرية غير المقيدة، و تطوير هذه الطريقة تقلص من عدد مراحل الحل الأمثل إلى أقل ما يمكن.

3- ***رشيد بشير رحيمة (2011)***:"صياغة و حل نماذج البرمجة الكسرية الخطية باستخدام طريقة لاكرانج المطورة"،تستخدم هذه الطريقة لحل مسائل البرمجة اللاخطية بصفة عامة و البرمجة الكسرية بصفة خاصة.

4- ***واثق حياويلاين(2012)***:"اتخاذ القرارات ذات الدوال الكسرية باستخدام طريق برمجة الأهداف"، تمحورت هذه الدراسة حول توجيه اهتمام متخذي القرار بما يسهم في تحقيق أهداف هذه المنظمات و توصلت إلى امكانية حل نماذج البرمجة الكسرية باستخدام البرمجة بالأهداف و الطريقة التكميلية المطورة بالاستعانة ببرنامج QSBو تطابق النتائج المحصل عليها بكلا الطريقتين.

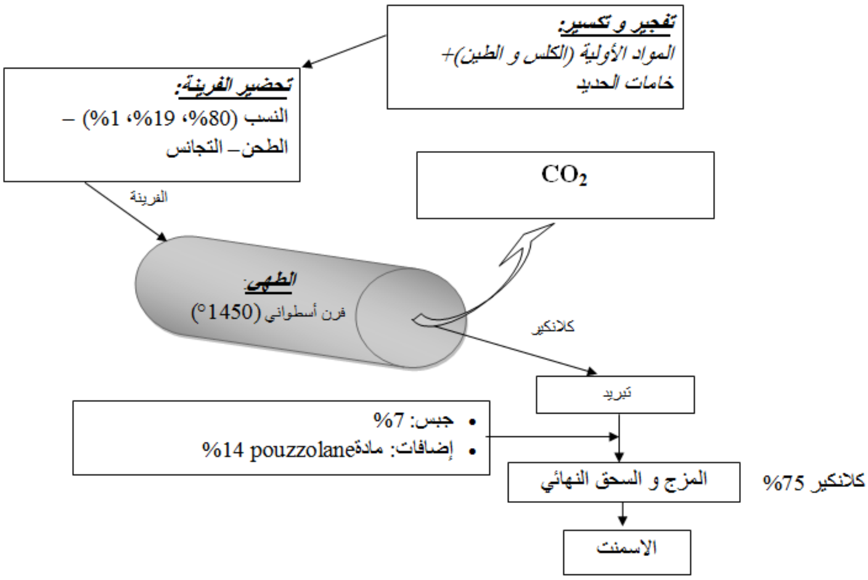
و في الأخير يمكن القول أن الدراسة الحالية تختلف عن الدراسات السابقة كونها تتضمن طريقتين لحل دوال البرمجة الكسرية على غرار الدراسات السابقة التي تطرقت كل منها لطريقة واحدة، و قد تم تطبيقهما على دالة هدف كسرية متمثلة في عتبة المردودية.

### *4. الإطار التطبيقي: تطبيق أسلوب البرمجة الكسرية على واقع إحدى الشركات الجزائرية*

في هذا الإطار سنحاول إيجاد حل لدالة هدف البرمجة الكسرية و المتمثلة في عتبة المردودية لإحدى المؤسسات و المتمثلة في مؤسسة الإسمنت بولاية سعيدة (SCIS) و ذلك بتطبيق طرق الحل التي تم التطرق إليها في الإطار النظري.

#### *1.4 تحديد متغيرات النموذج:*

***الشكل 1: التمثيل البياني لمراحل صناعة الاسمنت***




المصدر: www.ensh.dz

من خلال الشكل أعلاه يتبين لنا أن صناعة الاسمنت تتطلب الحصول على أقصى حد 30000طن من الكلس و 6000طن من الطين و 2000طن من خامات الحديد. يتم مزج و طحن ما نسبته 80% من الكلس و 19% من الطين بالإضافة إلى 1% من خامات الحديد لتتشكل مادة متجانسة تسمى "الفرينة" تدفع هذه المادة لتخزن في مطمورتين لكل مطمورة كأقصى حد 5000طن، ثم يتم طهيها عند درجة 1450° للحصول على كلانكيرClinker الذي يتم تبريده مباشرة. لصناعة الاسمنت يتم مزج 75%كلانكير 7% من الجبس و 14% من مادة pouzzolane وهي مادة بركانية تتكون أساسا من السيليكا و الأمونيا و أكسيد الحديد.

لبناء النموذج سنعتمد على 5 متغيرات و هي كلانكير (و المتكون من 80% كلس،19% طين، 1%خامات الحديد)، جبس و مادة pouzzolane بالنسب التالية: 75%، 7%، 14% و بالتالي ستكون لدينا المعادلة التالية:

$$Y= 0,75X_1+ 0,07X_2+ 0,14X_3$$

$$Y= 0,75(0.8\, X_{11}+ 0.19\, X_{12} + 0,01X_{13}) + 0,07X_2+ 0,14X_3$$

$$Y= 0.6X_{11}+ 0.1425\, X_{12} + 0,0075X_{13}+ 0,07X_2+ 0,14X_3 \text{...........(1)}$$

$X_1$: كمية كلانكير.

$X_{11}$: كمية كلس.

$X_{12}$:كمية طين.

$X_{13}$: كمية خامات الحديد.

$X_2$: كمية جبس.

$X_3$: كمية من مادة pouzzolane.

***2.4 بناء النموذج الرياضي:*** لدينا: $SR = \frac{CF*}{CA-CV}$

***<u>النموذج الرياضي:</u>*** بالاعتماد على بيانات تم الحصول عليها من شركة الاسمنت بسعيدة لعقد من الزمن قمنا ببناء النموذج الرياضي التالي:

[min] SR= $\frac{710.014.059,48*(2337.55X_{11} +555.17X_{12} +29.22X_{13}+ 272.71X_2+ 545.43X_3)}{970.08X_{11} +230.39X_{12} +12.13X_{13}+ 113.18X_2+ 226.35X_3}$

s/c :

$$\begin{cases} X_{11} \leq 30000 \\ X_{12} \leq 6000 \\ X_{13} \leq 2000 \\ 0.8X_{11} + 0.19X_{12} + 0.01X_{13} \leq 10000 \\ X_2 \leq 30000 \\ X_3 \leq 25000 \\ 0.6X_{11} + 0.1425X_{12} + 0,0075X_{13} + 0,07X_2 + 0,14X_3 \leq 25000 \end{cases}$$

$X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_2, X_3 \geq 0$

### 3.4 حل النموذج الرياضي باستخدام طريقة لاكرانج و البرمجة بالأهداف

1) **طريقة لاكرانج:** لدينا النموذج الرياضي السابق

**تحويل النموذج الكسري:**

بعد تجزأت دالة الهدف إلى دالة بسط و دالة مقام و حتى تكون الدالة الأصلية أدنى ما يمكن يجب أن يكون المقام أعظم و البسط أدنى.

[Min]$Z_1$=$1,65969E^{+12}X_{11}+3,94177E^{+11}X_{12}+20746161215X_{13}+ 1,93631E^{+11}X_2+ 3,87262E^{+11}X_3$

[Max]$Z_2$= $970,08X_{11} +230,39X_{12} +12,13X_{13} +113,18X_2 +226,35X_3$

بتحويل دالة Max $Z_2$ إلى Min $Z_2$ نتحصل على:

[Min]$Z_2$= $-970,08X_{11} -230,39X_{12} -12,13X_{13} -113,18X_2 -226,35X_3$

و بجمع دالة البسط و دالة المقام نستخرج:

[Min]Z*= $[16,6X_{11}+3,94X_{12}+ 0,207X_{13}+ 1,93X_2+ 3,87X_3] E^{+11}$

**الحل:**

[Min]Z*= $[16,6X_{11}+3,94X_{12}+ 0,207X_{13}+ 1,93X_2+ 3,87X_3] E^{+11}$

s/c :

$$X_{11} + S_1^2 = 30000$$

$$X_{12} + S_2^2 = 6000$$

$X_{13} + S_3^2 = 2000$

$0.8X_{11} + 0.19X_{12} + 0.01X_{13} + S_4^2 = 10000$

$X_2 + S_5^2 = 30000$

$X_3 + S_6^2 = 29000$

$0.6X_{11} + 0.1425X_{12} + 0,0075X_{13} + 0,07X_2 + 0,14X_3 + S_7^2 = 25000$

$-X_{11}+h_1^2=0$

$-X_{12}+h_2^2=0$

$-X_{13}+h_3^2=0$

$-X_2+h_4^2=0$

$-X_3+h_5^2=0$

***دالة لاكرانج:***

$L(X,\lambda)= 16{,}6X_{11}+3{,}94X_{12}+ 0{,}207X_{13}+ 1{,}93X_2+ 3{,}87X_3+\lambda_1(X_{11}+S_1^2-30000) + \lambda_2(X_{12}+S_2^2-6000) + \lambda_3(X_{13}+S_3^2-2000) + \lambda_4(0{,}8X_{11}+0{,}19X_{12} +0{,}01X_{13} +S_4^2-10000) + \lambda_5 (X_2+S_5^2-30000) + \lambda_6 (X_3+S_6^2-25000) + \lambda_7 (0{,}6X_{11} + 0{,}1425X_{12} + 0{,}0075X_{13} + 0{,}07X_2 + 0{,}14X_3 + S_7^2 - 25000) + \lambda_8 (-X_{11}+h_1^2) + \lambda_9(-X_{12}+h_2^2)+ \lambda_{10}(-X_{13}+h_3^2)+ \lambda_{11}(-X_2+h_4^2)+ \lambda_{12}(-X_3+h_5^2)$

حيث $\lambda_1$، $\lambda_2$، $\lambda_3$، $\lambda_4$، $\lambda_5$، $\lambda_6$، $\lambda_7$، $\lambda_8$، $\lambda_9$، $\lambda_{10}$، $\lambda_{11}$ ، $\lambda_{12}$ مضروبات لاكرانج.

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial X_{11}} &= 16{,}6 + \lambda_1 + 0{,}8\lambda_4 + 0{,}6\lambda_7 - \lambda_8 = 0\\
\frac{\partial L}{\partial X_{12}} &= 3{,}94 + \lambda_2 + 0{,}19\lambda_4 + 0{,}1425\lambda_7 - \lambda_9 = 0\\
\frac{\partial L}{\partial X_{13}} &= 0{,}207 + \lambda_3 + 0{,}01\lambda_4 + 0{,}0075\lambda_7 - \lambda_{10} = 0\\
\frac{\partial L}{\partial X_2} &= 1{,}93 + \lambda_5 + 0{,}07\lambda_7 - \lambda_{11} = 0\\
\frac{\partial L}{\partial X_3} &= 3{,}87 + \lambda_6 + 0{,}14\lambda_7 - \lambda_{12} = 0
\end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = X_{11} + S_1^2 - 30000 = 0\\
&\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = X_{12} + S_2^2 - 6000 = 0\\
&\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = X_{13} + S_3^2 - 2000 = 0\\
&\frac{\partial L}{\partial \lambda_4} = 0{,}8X_{11} + 0{,}19X_{12} + 0{,}01X_{13} + S_4^2 - 10000 = 0\\
&\frac{\partial L}{\partial \lambda_5} = X_2 + S_5^2 - 30000 = 0\\
&\frac{\partial L}{\partial \lambda_6} = X_3 + S_6^2 - 25000 = 0\\
&\frac{\partial L}{\partial \lambda_7} = 0{,}6X_{11} + 0{,}1425X_{12} + 0{,}0075X_{13} + 0{,}07X_2 + 0{,}14X_3 + S_7^2 - 25000 = 0
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial L}{\partial \lambda_8} = -X_{11} + h_1^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad X_{11} = h_1^2\\
&\frac{\partial L}{\partial \lambda_9} = -X_{12} + h_2^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad X_{12} = h_2^{2^{2}}\\
&\frac{\partial L}{\partial \lambda_{10}} = -X_{13} + h_3^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad X_{13} = h_3^2\\
&\frac{\partial L}{\partial \lambda_{11}} = -X_2 + h_4^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad X_2 = h_4^2\\
&\frac{\partial L}{\partial \lambda_{12}} = -X_3 + h_5^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad X_3 = h_5^2
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots(3)$$

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{\partial L}{\partial S_1} = 2\lambda_1 S_1 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 S_1 = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial S_2} = 2\lambda_2 S_2 = 0 \Longrightarrow \lambda_2 S_2 = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial S_3} = 2\lambda_3 S_3 = 0 \Longrightarrow \lambda_3 S_3 = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial S_4} = 2\lambda_4 S_4 = 0 \Longrightarrow \lambda_4 S_4 = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial S_5} = 2\lambda_5 S_5 = 0 \Longrightarrow \lambda_5 S_5 = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial S_6} = 2\lambda_6 S_6 = 0 \Longrightarrow \lambda_6 S_6 = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial S_7} = 2\lambda_7 S_7 = 0 \Longrightarrow \lambda_7 S_7 = 0
\end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots (4)$$

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{\partial L}{\partial h_1} = 2\lambda_8 h_1 = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial h_2} = 2\lambda_9 h_2 = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial h_3} = 2\lambda_{10} h_3 = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial h_4} = 2\lambda_{11} h_4 = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial h_5} = 2\lambda_{12} h_5 = 0
\end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots (5)$$

بتربيع طرفي جملة المعادلات (5) و تعويض جملة المعادلات (3) في (5) نحصل على:

$$\left.\begin{array}{l}
\lambda_8^2 X_{11} = 0 \\
\lambda_9^2 X_{12} = 0 \\
\lambda_{10}^2 X_{13} = 0 \\
\lambda_{11}^2 X_2 = 0 \\
\lambda_{12}^2 X_3 = 0
\end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots (6)$$

من جملة المعادلات 2، 4، 6 نستنتج الشكل التالي:

***الشكل2:** تمثيل بياني يوضح حل الدالة بطريقة لاكرانج*

<table>
<tr><td colspan="8">$\lambda_8=0$ ; $X_{11}=30000$     $\lambda_8\neq0$ ; $X_{11}=0$<br>أو<br>$\lambda_1\neq0$ ; $S_1^2=0$     $\lambda_1=0$ ; $S_1^2=30000$</td></tr>
<tr><td colspan="4">$\lambda_9=0$ ; $X_{12}=6000$<br>$\lambda_2\neq0$ ; $S_2^2=0$</td><td colspan="4">$\lambda_9\neq0$ ; $X_{12}=0$<br>$\lambda_2=0$ ; $S_2^2=6000$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\lambda_{10}\neq0$ ; $X_{13}=0$<br>$\lambda_3=0$ ;$S_3^2=2000$</td><td colspan="2">$\lambda_{10}=0$ ; $X_{13}=2000$<br>$\lambda_3\neq0$ ;$S_3^2=0$</td><td colspan="2">$\lambda_{10}=0$ ; $X_{13}=2000$<br>$\lambda_3\neq0$ ;$S_3^2=0$</td><td colspan="2">$\lambda_{10}\neq0$ ; $X_{13}=0$<br>$\lambda_3=0$ ;$S_3^2=2000$</td></tr>
<tr><td>$S_1^2=0$<br>$X_{11}=30000$</td><td>$S_1^2\neq0$<br>$X_{11}=0$</td><td>$S_1^2\neq0$<br>$X_{11}=0$</td><td>$S_1^2=0$<br>$X_{11}=30000$</td><td>$S_1^2=0$<br>$X_{11}=30000$</td><td>$S_1^2\neq0$<br>$X_{11}=0$</td><td>$S_1^2\neq0$<br>$X_{11}=0$</td><td>$S_1^2=0$<br>$X_{11}=30000$</td></tr>
<tr><td>$X_{11}=30000$<br>$X_{12}=6000$<br>$X_{13}=0$<br>$S_4^2=-\cancel{15140}$<br>$\lambda_4=0$</td><td>$X_{11}=0$<br>$X_{12}=6000$<br>$X_{13}=0$<br>$S_4^2=94,13$<br>$\lambda_4=0$</td><td>$X_{11}=0$<br>$X_{12}=6000$<br>$X_{13}=2000$<br>$S_4^2=94,02$<br>$\lambda_4=0$</td><td>$X_{11}=30000$<br>$X_{12}=6000$<br>$X_{13}=2000$<br>$S_4^2=-\cancel{15160}$<br>$\lambda_4=0$</td><td>$X_{11}=30000$<br>$X_{12}=0$<br>$X_{13}=2000$<br>$S_4^2=-\cancel{14020}$<br>$\lambda_4=0$</td><td>$X_{11}=0$<br>$X_{12}=0$<br>$X_{13}=2000$<br>$S_4^2=99,89$<br>$\lambda_4=0$</td><td>$X_{11}=0$<br>$X_{12}=0$<br>$X_{13}=0$<br>$S_4^2=100$<br>$\lambda_4=0$</td><td>$X_{11}=30000$<br>$X_{12}=0$<br>$X_{13}=0$<br>$S_4^2=-\cancel{14000}$<br>$\lambda_4=0$</td></tr>
</table>

| | | | |
|---|---|---|---|
| $Z_1=1710143669$ | $Z_5=1710081046$ | $Z_9=1706512778$ | $Z_{13}=0$ |
| $Z_2=1709820497$ | $Z_6=1709809139$ | $Z_{10}=1709727768$ | $Z_{14}=1709741551$ |
| $Z_3=1706664657$ | $Z_7=1706663890$ | $Z_{11}=1705257248$ | $Z_{15}=1705248277$ |
| $Z_4=1708332974$ | $Z_8=1708328753$ | $Z_{12}=1708052401$ | $Z_{16}=1708056527$ |

***المصدر:** من إعداد الباحثين*

***ملاحظة:*** حالة$S_7^2=18530$ أي $S_7=136,12$ إن المتغير S يعبر عن الموارد غير مستغلة إذا فرضنا أن $S_7=0$ و $\lambda_7=0$ فإن قيمة $X_{11}$ التي تحقق كلا من القيد الرابع و السابع هي $X_{11}=11050$ و هي بذلك تحقق قيمة لدالة الهدف الأصلية متمثلة بـ 1.709.781.440دج و لكنها لا تحقق القيمة الدنيا و لا العظمى.

***التعليق:*** إن القيمة الدنيا لدالة الهدف هي صفر، سنرفض هذه القيمة لأنها تعني إقفال الشركة.

أما القيمة الموالية هي 1.705.248.277دج و التي سنرفضها أيضا لأنها تتحقق بمتغير واحد و هو $X_2$ و جميع المتغيرات الأخرى معدومة و هذا من المستحيل لأن صناعة الاسمنت تتطلب تدخل جميع المواد الأولية في عملية الإنتاج أي أن تكون دالة الهدف متكونة من جميع المتغيرات و القيمة 1.709.781.440دج هي التي تحقق ذلك و بالتالي فإن:

$X_{11}=11050$      $X_2=30000$

$X_{12}$=6000 $X_3$=25000

$X_{13}$=2000 Z=1.709.781440

***2) طريقة البرمجة بالأهداف:***

لدينا النموذج الرياضي التالي:

$$[\textbf{Min}]\ SR=\frac{710.014.059{,}48*(2337.55X_{11}+555.17X_{12}+29.22X_{13}+272.71X_2+545.43X_3)}{970.08X_{11}+230.39X_{12}+12.13X_{13}+113.18X_2+226.35X_3}$$

s/c :

$$\begin{cases} X_{11}\le 30000\\ X_{12}\le 6000\\ X_{13}\le 2000\\ 0.8X_{11}+0.19X_{12}+0.01X_{13}\le 10000\\ X_2\le 30000\\ X_3\le 25000\\ 0.6X_{11}+0.1425X_{12}+0{,}0075X_{13}+0{,}07X_2+0{,}14X_3\le 25000\end{cases}$$

$X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_2, X_3 \geq 0$

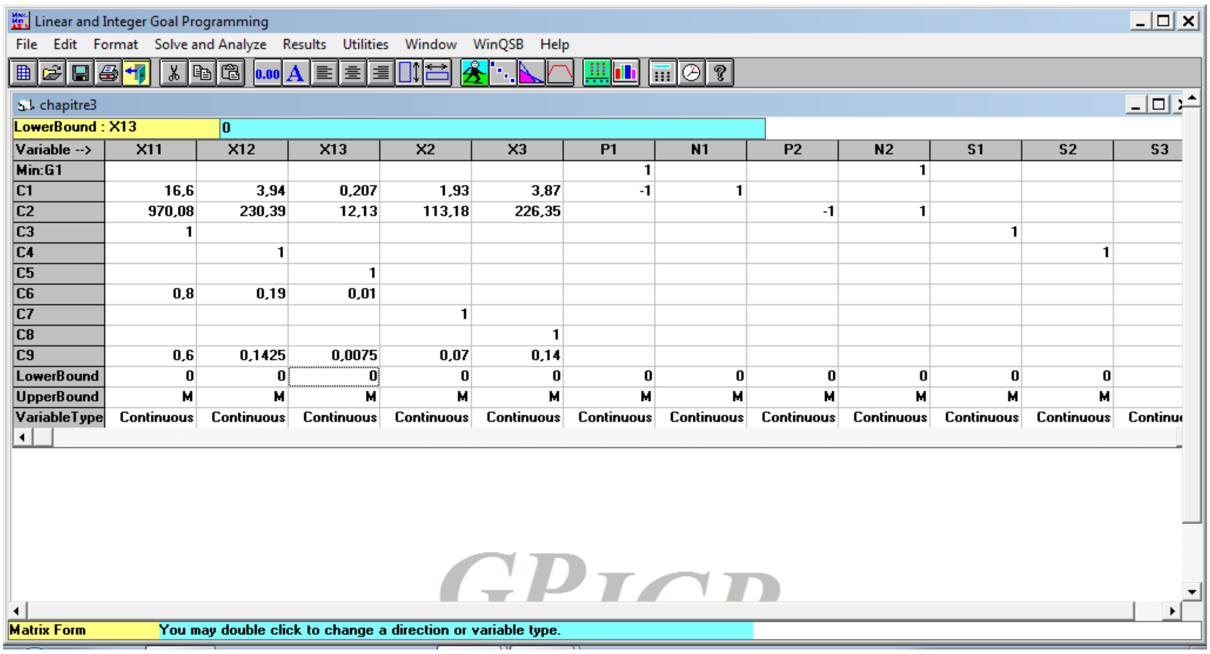
***تحويل النموذج الكسري إلى نموذج البرمجة بالأهداف***:

$$[\text{Min}]\ F=\delta_1^+ +\delta_2^-$$

$$\begin{cases}[16{,}6X_{11}+3{,}94X_{12}+0{,}207X_{13}+1{,}93X_2+3{,}87X_3]E^{+11}+\delta_1^- -\delta_1^+ = 12802573*E^{+11}\\ -970{,}08X_{11}-230{,}39X_{12}-12{,}13X_{13}-113{,}18X_2-226{,}35X_3+\delta_1^- -\delta_1^+ = 775054798{,}74\\ X_{11}+S1=30000\\ X_{12}+S2=6000\\ X_{13}+S2=2000\\ 0.8X_{11}+0.19X_{12}+0.01X_{13}+S4=10000\\ X_2+S5=30000\\ X_3+S6=25000\\ 0.6X_{11}+0.1425X_{12}+0{,}0075X_{13}+0{,}07X_2+0{,}14X_3+S7=25000\end{cases}$$

***إدخال البيانات:*** نقوم بادخال النموذج أعلاه إلى برنامج win QSB

*الشكل3: تمثيل بياني يوضح النموذج الرياضي باستخدام برنامج QSB*

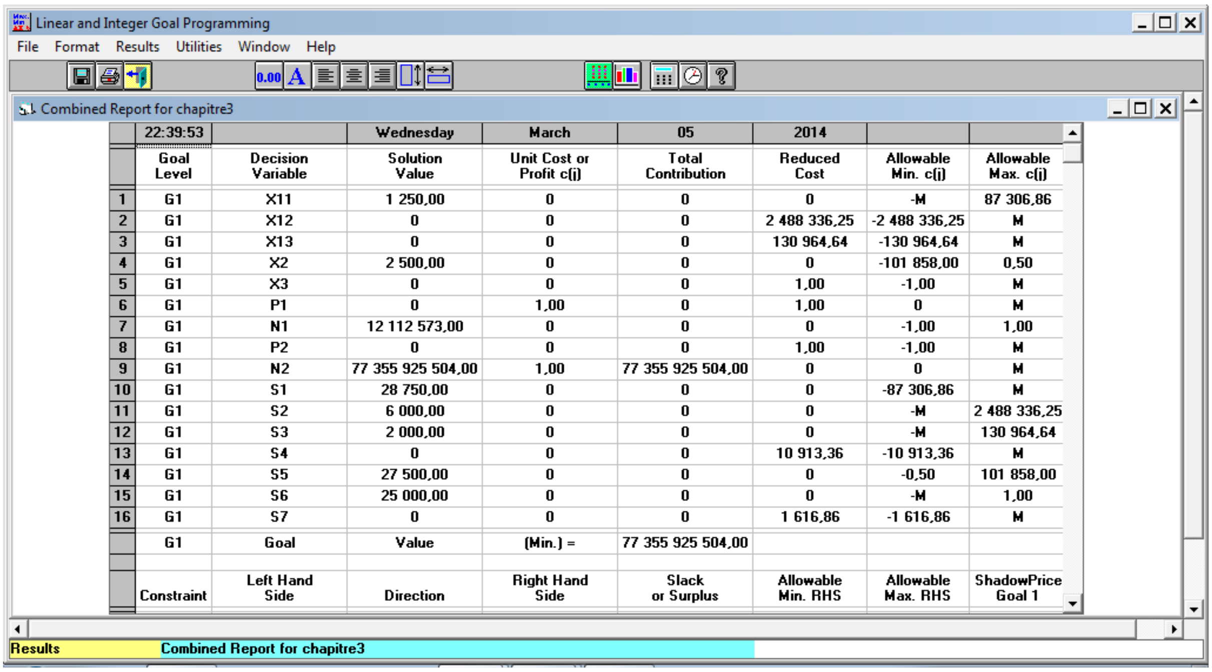


| Variable --> | X11 | X12 | X13 | X2 | X3 | P1 | N1 | P2 | N2 | S1 | S2 | S3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Min:G1 | | | | | | 1 | | | 1 | | | |
| C1 | 16,6 | 3,94 | 0,207 | 1,93 | 3,87 | -1 | 1 | | | | | |
| C2 | 970,08 | 230,39 | 12,13 | 113,18 | 226,35 | | | -1 | 1 | | | |
| C3 | 1 | | | | | | | | | 1 | | |
| C4 | | 1 | | | | | | | | | 1 | |
| C5 | | | 1 | | | | | | | | | |
| C6 | 0,8 | 0,19 | 0,01 | | | | | | | | | |
| C7 | | | | 1 | | | | | | | | |
| C8 | | | | | 1 | | | | | | | |
| C9 | 0,6 | 0,1425 | 0,0075 | 0,07 | 0,14 | | | | | | | |
| LowerBound | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| UpperBound | M | M | M | M | M | M | M | M | M | M | M | |
| VariableType | Continuous | Continuous | Continuous | Continuous | Continuous | Continuous | Continuous | Continuous | Continuous | Continuous | Continuous | Continu |

*المصدر: من إعداد الباحثتين بالاعتماد على برنامج QSB*

***الحل:***

*الشكل4: تمثيل بياني يوضح حل الدالة باستخدام برنامج QSB*



| | 22:39:53 | | Wednesday | March | 05 | 2014 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Goal Level | Decision Variable | Solution Value | Unit Cost or Profit c(j) | Total Contribution | Reduced Cost | Allowable Min. c(j) | Allowable Max. c(j) |
| 1 | G1 | X11 | 1 250,00 | 0 | 0 | 0 | -M | 87 306,86 |
| 2 | G1 | X12 | 0 | 0 | 0 | 2 488 336,25 | -2 488 336,25 | M |
| 3 | G1 | X13 | 0 | 0 | 0 | 130 964,64 | -130 964,64 | M |
| 4 | G1 | X2 | 2 500,00 | 0 | 0 | 0 | -101 858,00 | 0,50 |
| 5 | G1 | X3 | 0 | 0 | 0 | 1,00 | -1,00 | M |
| 6 | G1 | P1 | 0 | 1,00 | 0 | 1,00 | 0 | M |
| 7 | G1 | N1 | 12 112 573,00 | 0 | 0 | 0 | -1,00 | 1,00 |
| 8 | G1 | P2 | 0 | 0 | 0 | 1,00 | -1,00 | M |
| 9 | G1 | N2 | 77 355 925 504,00 | 1,00 | 77 355 925 504,00 | 0 | 0 | M |
| 10 | G1 | S1 | 28 750,00 | 0 | 0 | 0 | -87 306,86 | M |
| 11 | G1 | S2 | 6 000,00 | 0 | 0 | 0 | -M | 2 488 336,25 |
| 12 | G1 | S3 | 2 000,00 | 0 | 0 | 0 | -M | 130 964,64 |
| 13 | G1 | S4 | 0 | 0 | 0 | 10 913,36 | -10 913,36 | M |
| 14 | G1 | S5 | 27 500,00 | 0 | 0 | 0 | -0,50 | 101 858,00 |
| 15 | G1 | S6 | 25 000,00 | 0 | 0 | 0 | -M | 1,00 |
| 16 | G1 | S7 | 0 | 0 | 0 | 1 616,86 | -1 616,86 | M |
| | G1 | Goal | Value | (Min.) = | 77 355 925 504,00 | | | |
| | | | | | | | | |
| | Constraint | Left Hand Side | Direction | Right Hand Side | Slack or Surplus | Allowable Min. RHS | Allowable Max. RHS | ShadowPrice Goal 1 |

*المصدر: من إعداد الباحثتين بالاعتماد على برنامج QSB*

من خلال الشكل أعلاه نتحصل على الحل التالي:

$X_{11}$=1250

$X_{12}$=0

$X_{13}$=0

$X_{2}$=25000

$X_{3}$=0

S1=28750

S2=6000

S3=2000

S4=0

S5=27500

S6=25000

S7=0

$\delta_1^+$=0

$\delta_1^-$=12.112.573

$\delta_2^+$=0

$\delta_2^-$=77.355.925.504

F=77.355.925.504

Z=1.710.866.598

***التعليق:***

إن الحل المرضي لهذا النموذج يتطلب أن تكون $X_{11}$=1250 و $X_2$=25000 و من الواضح أن الهدف الأول تحقق بقيمة أدنى مقدرة بـ 12.112.573دج، أما الهدف الثاني تحقق بقيمة أدنى من المستهدفة مقدرة بـ 77.355.925.504دج

إن عتبة المردودية لتشكيلة المتغيرات تساوي 1.710.866.598دج أي أنه أكبر من الحل بطريقة لاكرانج. و عليه نستنتج بأن الحل بطريقة لاكرانج أفضل من الحل بطريقة البرمجة بالأهداف في هذه الدراسة.

### 5. النتائج:

***الجدول 1***: *أهم النتائج*

| طريقة لاكرانج | طريقة البرمجة بالأهداف |
|---|---|
| X11= 11050<br>X12= 6000<br>X13= 2000<br>X2= 30000<br>X3=25000<br>Z= 1709781440 | X11=1250<br>X12=0<br>X13=0<br>X2= 25000<br>X3=0<br>Z=1710866598 |

***المصدر***: *من إعداد الباحثتين*

### 6. مناقشة النتائج:

إن عتبة المردودية لتشكيلة المتغيرات تساوي 1.710.866.598دج أي أنه أكبر من الحل بطريقة لاكرانج. و عليه نستنتج بأن الحل بطريقة لاكرانج أفضل من الحل بطريقة البرمجة بالأهداف في هذه الدراسة.

### 7. خاتمة:

قمنا بحل النموذج الرياضي باستعمال طريقة البرمجة بالأهداف بالاستعانة ببرنامج QSB و طريقة مضروبات لاكرانج و توصلنا إلى أن أفضل طريقة حل كانت طريقة لاكرانج حيث أنها حققت أقل قيمة لعتبة المردودية و باستخدام جميع المتغيرات.

كما لا يفوتنا بأن ننوه إلى أن هذه الأساليب تعد مساعدة و تقوم باقتراح حلول لا يمكن تطبيقها على أرض الواقع الملموس إلا من خلال تدخل الحكم الشخصي للمسير و استعماله لتجربته.

### 8. قائمة المراجع:


- أحمد حسين، فتحي رزق السوافيري، بحوث العمليات في المحاسبة، دار الجامعية، الاسكندرية، مصر، 2004.
- سونيا محمد البكري، استخدام الأساليب الكمية في الإدارة، الدار الجامعية، الإسكندرية، مصر، 2002.
- لحسن عبد الله بالشيوة، بحوث العمليات، دار اليازوري العلمية للنشر و التوزيع، عمان الأردن، 2011.
- رشيد بشير رحيمة، صياغة و حل نماذج البرمجة. الكسرية الخطية باستخدام طريقة لاكرانج المطورة، مجلة علوم ذي قار، المجلد2 العدد3، العراق، 2011.
- شيد بشير رحيمة، علي حسين حسن، تطوير طريقة دالة الهدف لحل مسائل البرمجة الكسرية غير المقيدة، مجلة جامعة ذي قار، المجلد5، العدد3، العراق، 2009.
- عباس أحمد حسن، أسراء هادي حسن، استخدام خوارزمية طريقة تطوير مولد قطع المستوي لإيجاد الحل العددي لمسائل البرمجة الكسرية، مجلة الهندسة و التكنولوجيا، المجلد26، العدد4، العراق، 2008.
- واثق حياوي لايذ، اتخاذ القرارات ذات الدوال الكسرية باستخدام طريق برمجة الأهداف، مجلة الهندسة، المجلد18، العدد8، العراق، 2012.
- Louis Dubrulle, Didier Jourdain, comptabilité analytique de gestion, DUNOD, Paris, 5éme édition, 2007.
- *www.ensh.dz (consulté le 14/01/2018).*