



CALCUL NUMERIQUE DU RESSAUT HYDRAULIQUE PAR UN MODELE AUX ELEMENTS FINIS

NUMERICAL COMPUTATION OF HYDRAULIC JUMP BY FINITE ELEMENT MODEL

AMARA L.¹, LACHI H.², BERREKSI A.³

¹ Département de Génie Civil et Hydraulique, Faculté de Technologie, Université de Jijel, 18000, Jijel. Laboratoire de Recherche LARHYSS, Université de Biskra, 07000, Biskra, Algérie

² Agence des Bassins Hydrographiques, AHS, anciennement au Département de Génie Civil et Hydraulique, Université de Jijel, 18000, Jijel

³ Laboratoire de recherche en Hydraulique Appliquée et Environnement (LRHAE). Faculté de Technologie, Université de Bejaia, 06000, Bejaia, Algérie.

amara.lyes@yahoo.fr

RESUME

Le présent travail porte sur la modélisation numérique du problème du ressaut hydraulique stationnaire dans un canal rectangulaire par la méthode des éléments finis. La détermination et connaissance des caractéristiques du ressaut; position, longueur, hauteur ainsi que la dissipation d'énergie occasionnée, sont alors de première importance pour l'exercice de conception et calcul des ouvrages et systèmes hydrauliques à surface libre. Moyennant certaines hypothèses simplificatrices admissibles en pratique, le modèle mathématique 1D de Saint-Venant a été utilisé pour le calcul dynamique de l'onde de choc. La solution numérique du couple d'équations aux dérivées partielles hyperboliques a été obtenue par la Méthode des Eléments Finis et par la méthode des caractéristiques aux frontières du canal. Les résultats portaient sur la prédiction du profil dynamique de la surface libre d'eau suite à un contrôle aval du débit et l'état stationnaire du ressaut dans le canal. Les résultats obtenus à cet effet montrent une très bonne concordance comparativement aux mesures expérimentales disponibles dans la littérature.

Mots clés : Ressaut hydraulique, Saint-Venant, Simulation numérique, Éléments finis

ABSTRACT

This work deals with the numerical modeling of the hydraulic jump problem in a rectangular channel by the finite element method. The determination and knowledge of the jump characteristics; position, length, height and energy dissipation, are of prime importance for the design and calculation of hydraulic structures and systems with free surface flows. Based on certain simplifying assumptions that are acceptable in practice, the Saint-Venant 1D mathematical model has been used for the dynamic computation of the shock wave. The numerical solution of the set of hyperbolic partial differential equations was obtained by the Finite Element Method and the Method of Characteristics at the boundaries. The results concerned the prediction of the dynamic water free surface profile following a downstream control of the flow rate and the stationary state of the hydraulic jump in the channel. The obtained results for this purpose show a very good agreement with experimental measurements available in literature.

Key words: Hydraulic jump, Saint-Venant, Numerical simulation, Finite elements

INTRODUCTION

Parmi les problèmes fréquemment rencontrés dans l'exercice de conception et calcul des ouvrages et systèmes hydrauliques à surface libre est celui du ressaut. L'apparition de ce phénomène s'accompagne d'une surélévation brusque de la ligne d'eau et est accompagnée d'une forte turbulence et dissipation d'énergie mécanique. Pour concevoir et mener à bien l'étude d'une structure hydraulique ou d'un système d'évacuation des eaux à surface libre, la connaissance de la position du ressaut, sa hauteur ainsi que la dissipation d'énergie occasionnée dans divers profils, de type classique ou contrôlé (Achour et al., 2002a, 2002b), devient alors de mise.

Abstraction faite des techniques de calcul obsolètes, graphiques et analytiques (Chow, 1959) et peu fiables dans certaines circonstances, le calcul numérique directe par résolution des équations du mouvement offre un outil puissant et sans accroc quant à l'étude du ressaut hydraulique. Gharangik et Chaudhry

(1991), pour simuler un ressaut hydraulique dans un canal rectangulaire, ont développé un modèle numérique dans lequel les équations à une dimension spatiale avec des conditions aux limites appropriées d'un écoulement rapidement varié (équations de Boussinesq et de Saint-Venant) ont été résolues jusqu'à ce qu'un état stationnaire soit atteint. Le schéma aux différences finies de MacCormack et celui de Gottlieb et Turkel (1976) a été utilisé pour la résolution de ces équations. Rahman et Chaudhry (1995) reproduisirent les mêmes calculs numériques mais cette fois avec un maillage adaptatif. La méthode des volumes finis a été utilisée par Zhou et Stansby (1999) sur les équations du mouvement en deux dimensions d'espace sous forme conservative. Les cas étudiés concernaient diverses configurations de la formation du ressaut. Plus tard, Sakarya et Tokyay (2000) ont simulé numériquement un ressaut hydraulique de type A se produisant à une marche positive brusque du fond du canal. L'état stationnaire résultant est déterminé aussi par l'utilisation du schéma de MacCormack et du schéma dissipatif « deux-quatre » pour les équations de Saint-Venant dans le cas non permanent et unidimensionnel. Dans le même sillage, le ressaut de type B dans les canaux rectangulaires horizontaux ayant une chute abrupte a fait l'objet d'un travail de Tokyay et al. (2007). Ici, les équations de Saint-Venant unidimensionnelles et instationnaires sont résolues par les mêmes schémas. La formation d'un ressaut hydraulique dans un bassin de tranquillisation à l'aval d'un déversoir, avec un nombre de *Froude* $F_r = 6.0$, a été étudié par Carvalho et al. (2008) en utilisant un modèle numérique aux volumes finis. Ce dernier est basé sur les équations 2D de Navier–Stokes moyennées de Reynolds; la surface libre est représentée en utilisant la technique VOF. De Padova et al. (2013) étudièrent la formation d'un ressaut dans un canal rectangulaire très large par le truchement d'un modèle SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics) pour les équations tridimensionnelles de Navier-Stokes. La méthode des éléments finis n'a hélas fait l'objet que de peu d'investigations à ce jour dans la simulation numérique du ressaut droit. On cite à cet effet le travail de Chippada et al. (1994) lesquels appliquèrent la technique de Galerkin sur des éléments finis triangulaires pour un modèle 2D des équations de Reynolds pour la description du champ d'écoulement interne dans le ressaut.

L'objectif du présent travail est de procéder à l'étude numérique du ressaut dans un canal prismatique à profil rectangulaire de pente nulle avec un modèle aux éléments finis 1D. Après avoir rappelé le modèle de Saint-Venant, la discrétisation numérique par la méthode des résidus pondérés est donnée par la suite. Les résultats issus du modèle numérique sont comparés aux mesures

expérimentales dans un canal de laboratoire issu des travaux de Garangik (1988).

MODELE MATHEMATIQUE

Considérons un écoulement à surface libre où un ressaut hydraulique se forme suite à un passage brusque d'un régime supercritique à un autre subcritique (Figure 1). Les équations du mouvement instationnaire dans un canal à surface libre peuvent être obtenues à partir des équations de Navier-Stokes intégrées suivant la profondeur. En admettant certaines hypothèses simplificatrices pour un écoulement peu profond, on aboutit aux équations de Saint-Venant qui peuvent s'écrire sous forme divergente pour un canal prismatique comme suit (Chaudhry, 2008) :

$$\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x} = \mathbf{S} \quad (1)$$

Dans laquelle :

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} h \\ uh \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} uh \\ u^2h + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ gh(I_0 - I_f) \end{bmatrix} \quad (2)$$

Avec x la distance le long du canal dans la direction de l'écoulement, t le temps, u la composante de la vitesse dans la direction x , h représente la profondeur de l'écoulement, g l'accélération de la pesanteur, I_0 et I_f respectivement la pente du fond du canal et la pente de frottement. Cette dernière est estimée à partir de la formule de Manning :

$$I_f = \frac{M^2 u |u|}{R^{4/3}} \quad (3)$$

Où M est le coefficient de Manning et R le rayon hydraulique.

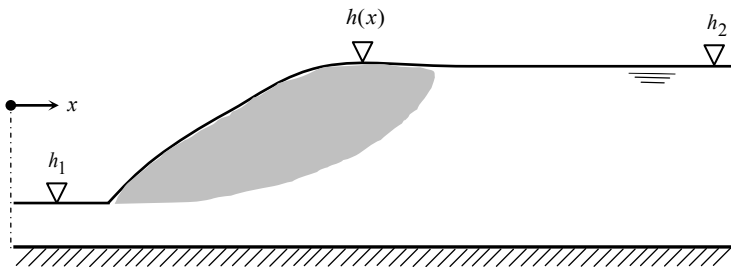


Figure 1 : Schéma de configuration du ressaut hydraulique classique

Le système d'EDP (1), formant l'équation de continuité et l'équation dynamique, est un système de type hyperbolique non linéaire. Moyennant des conditions aux limites appropriées, une solution numérique peut être obtenue pour la simulation du ressaut.

SOLUTION NUMERIQUE PAR ELEMENTS FINIS

Considérons le canal de longueur L discrétisé en N nœuds engendrant $N - 1$ éléments linéaires. Le principe des résidus pondérés consiste à chercher une solution intégrale sur chaque élément par l'usage d'une fonction de pondération appropriée. La formulation numérique est écrite en annulant les résidus, au sens global, sur chaque élément (Zienkiewicz et Taylor, 2000). Pour le cas du système (1), cette approche permet d'écrire :

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x} - \mathbf{S} \right) \mathbf{N}(x) d\Omega = 0 \quad (4)$$

Où $\mathbf{N}(x)$ est le vecteur des fonctions de base linéaires. Le calcul intégral de (4) aboutit, suivant l'approche proposée par Szymkiewicz (2010), à la formulation finale suivante pour le point i :

$$\mathbf{A} \frac{d\mathbf{F}}{dt} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{F} = 0 \quad (5)$$

Avec :

$\mathbf{F} = (\mathbf{G}_1(t) \dots \mathbf{G}_M(t))^T$: Vecteur des variables inconnues aux nœuds ;

\mathbf{A} : Matrice constante, symétrique et bande ;

\mathbf{C} : Matrice variable.

Le système (5) est intégré dans le temps par le schéma suivant :

$$\mathbf{F}_{j+1} = \mathbf{F}_j + \Delta t \left[\theta \frac{d\mathbf{F}_{j+1}}{dt} + (1 - \theta) \frac{d\mathbf{F}_j}{dt} \right] \quad (6)$$

Ayant $\theta \in [0,1]$ comme facteur de pondération et j indice du niveau de temps. Cette procédure est appliquée aux nœuds intérieurs du domaine. La solution numérique est complétée aux frontières par l'usage de la méthode des caractéristiques (Chaudhry, 2008). En choisissant $\theta = 0$, on tombe sur un

schéma explicite qui nécessite une restriction quant au choix du pas de temps. La condition de stabilité dans ce cas est alors dictée par la condition de Courant (≤ 1). Le schéma numérique obtenu étant précis au premier ordre, une certaine diffusion numérique apparaît pour le front d'onde, ce qui nécessite une fine discrétisation pour une meilleure capture du choc. Il faut noter que pour éviter l'instabilité liée à l'approximation de la dérivée spatiale (Sturm, 2001), le vecteur F_j est évalué par la moyenne aux nœuds $(i+1)$ et $(i-1)$.

RESULTATS ET DISCUSSION

Pour vérifier les performances du modèle numérique utilisé, une comparaison des résultats obtenus aux données expérimentales issues des travaux antérieurs a été effectuée. La base expérimentale servant de validation au présent modèle numérique a été puisée du travail de Gharangik (1988). Ce travail est l'un des plus consistants et s'inscrit dans le rang des travaux de références et fondamentaux dans ce sujet. Les données de laboratoire ont été obtenues sur une installation d'essais dans le département d'Ingénierie Civile et Environnementale de l'Université de Washington, composée d'un canal horizontal à parois en plexiglas de 14,00 m de long, de 0,915 m de haut et de 0,46 m de large avec une section transversale rectangulaire. Le modèle numérique a été testé pour des valeurs expérimentales résumées dans le tableau suivant :

Tableau 1 : Conditions hydrodynamiques des tests (Gharangik, 1988)

Test N°	Hauteur amont h_0 (m)	Vitesse u_1 (m/s)	Nombre de Froude	Hauteur aval (m)
1	0,031	3,831	7,0	0,265
6	0,064	1,826	2,30	0,168

Analyse stationnaire du ressaut

Les calculs de simulation ont été exécutés pour déterminer l'écoulement en régime permanent s'établissant dans le canal rectangulaire suite au changement dans l'écoulement opéré à l'aval du canal par la manœuvre d'une vanne murale à l'extrémité aval. Le but, à cet effet, est de tracer le profil de la ligne d'eau $h(x)$ le long du canal et ainsi localiser rigoureusement l'endroit de l'apparition du ressaut hydraulique et prendre connaissance des hauteurs conjuguées. Les résultats de calcul sont illustrés sur les figures 2 et 3 conjointement aux mesures

expérimentales et sont superposés aux calculs numériques de Gharangik (1988) via le schéma de MacCormack.

Les résultats du modèle MEF utilisé congruent bien avec les résultats du schéma de MacCormack du second ordre obtenus par Gharangik (1988). Concernant la position du ressaut, les deux modèles numériques occasionnent un léger décalage à l'aval par rapport aux résultats expérimentaux (1,16 m par rapport au modèle MEF à $F_r = 7,0$) et ce, en fonction du nombre de *Froude* incident. Ce désaccord est dû principalement à l'évaluation précise du frottement et l'aspect numérique du traitement du terme source. Ce dernier, dans le modèle éléments finis et dans le schéma de MacCormack, est considéré (lors de la discrétisation) constant en bloc autrement dit constant pour chaque pas de temps et évalué au temps t (schéma explicite) ce qui ne reflète pas tout à fait la réalité du fait que les frottements varient continûment dans le temps. Le traitement numérique adopté de ce terme influence la position du ressaut par rapport aux résultats expérimentaux. Faut-il aussi souligner que lors de la simulation un nombre de Manning de 0,065 est pris comme constant pour tous les tests, or ce dernier varie aussi en fonction du régime d'écoulement (Achour et Bedjaoui, 2006).

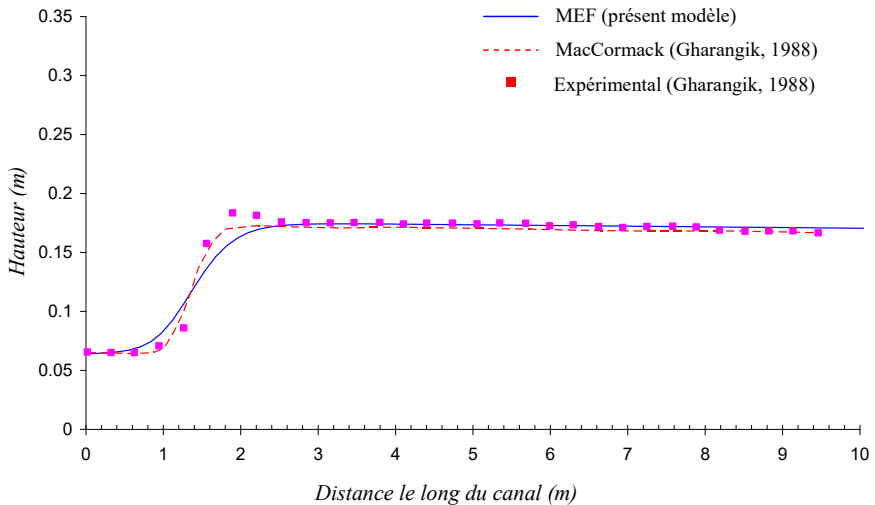


Figure 2 : Profil du ressaut (Test N°6, $F_r = 2,30$)

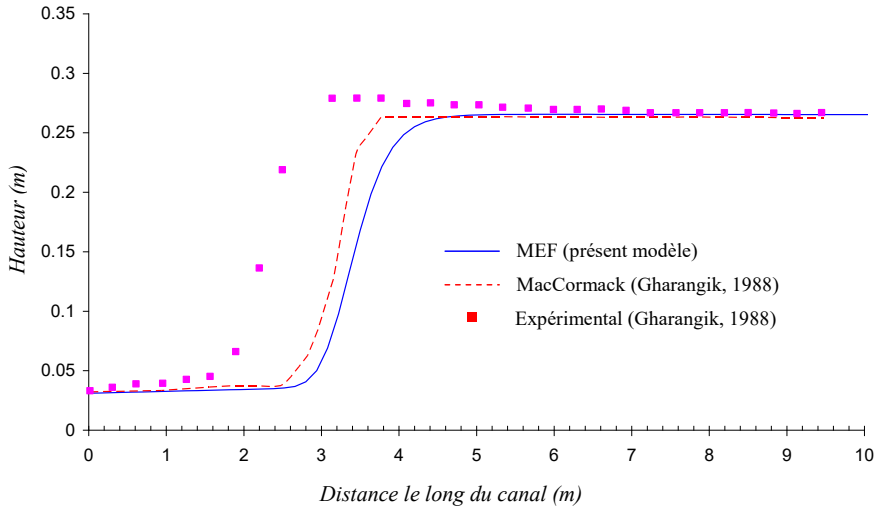


Figure 3 : Profil du ressaut (Test N°1, $F_r = 7,0$)

Analyse dynamique du ressaut

Afin d'étudier le ressaut hydraulique dans son aspect dynamique et voir l'influence du nombre de *Froude* sur l'avancée dynamique du ressaut, une analyse du déplacement du ressaut dans le temps a été effectuée et ce pour $F_r = 2,30$ et $F_r = 7,0$. Les résultats de simulations aux différents temps sont reportés respectivement sur les figures 4 et 5.

Pour un nombre de *Froude* $F_r = 2,30$, l'avancé du ressaut débute de l'aval vers l'amont suite à la manœuvre de la vanne aval comme l'illustre la figure 4 aux temps $t = 46s$ et $71s$ jusqu'à sa stabilisation à partir de $t = 120s$. Le temps à $175s$ est une confirmation de la position finale du ressaut. Pour $F_r = 7,0$, le ressaut avance de l'aval (voir figure 5 à $t = 10s$) vers l'amont (à $t = 35s$). Après un quasi équilibre, le ressaut reprend son mouvement tout en changeant le sens de son déplacement de l'amont vers l'aval (voir à $t = 55s, 65s$) jusqu'à ce qu'il atteigne son équilibre à partir de $t = 105s$. Ce comportement peut s'expliquer du point de vue physique par la prépondérance des forces d'inertie qui se traduit par un nombre de *Froude* assez grand ($F_r = 7,0$) et qui tente d'entraver l'arrivée de la surélévation (ressaut) vers l'entrée du canal (régime supercritique), ce dernier est contraint de s'éloigner vers l'aval pour se stabiliser après quelques temps.

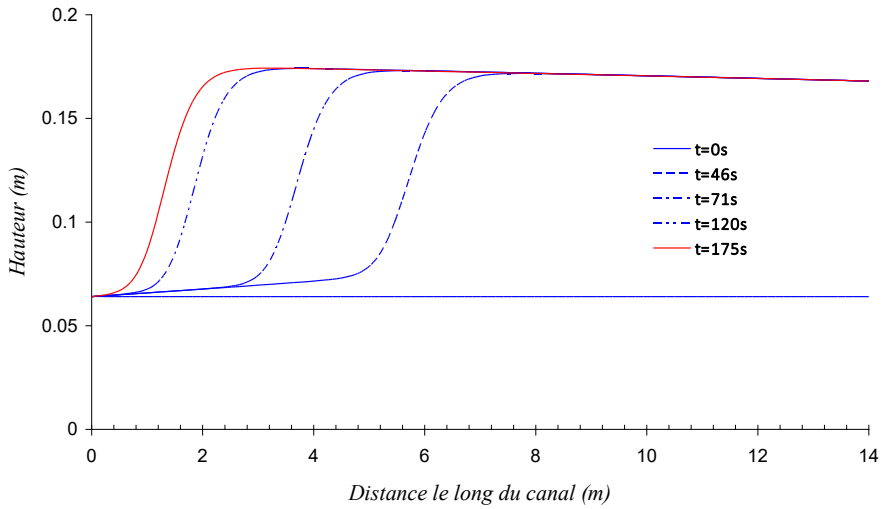


Figure 4 : Avancée dynamique du ressaut à divers temps ($F_r = 2,30$)

La figure 6 donne une vue axonométrique sur le profil de la surface libre du ressaut pour $F_r = 2,30$ après stabilisation.

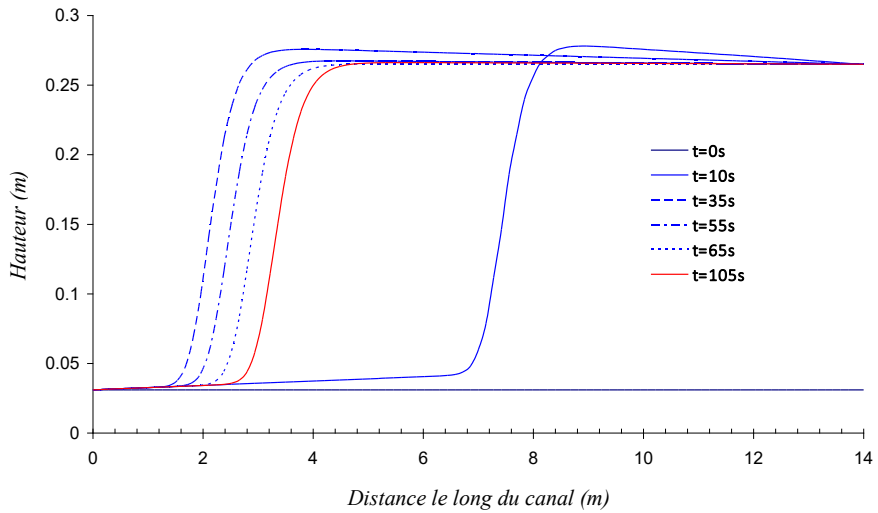


Figure 5 : Avancée dynamique du ressaut à divers temps ($F_r = 7,0$)

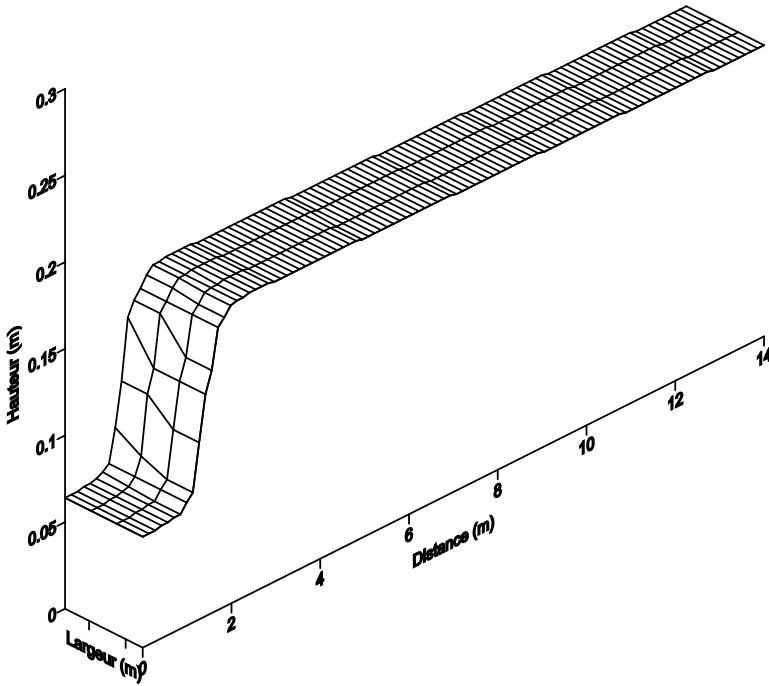


Figure 6 : Vue axonométrique de la surface libre du ressaut ($F_r = 2,30$)

Il est utile de mentionner ici une importante remarque quant aux conditions initiales. En effet, formellement, avant de lancer le calcul instationnaire (comme paramètre itératif) pour la détermination de la position du ressaut, il convient de fixer la condition initiale de la ligne d'eau, qui est dans ce cas une courbe de remous de type H (Chow, 1959). Cependant, cette contrainte peut être affranchie en assumant simplement une ligne d'eau horizontale, comme le montrent bien les figures 4 et 5. Ceci revient au fait que, du point de vue mathématique, un problème hyperbolique possède la particularité de « perdre la mémoire » des conditions initiales lorsqu'il s'agit de converger vers un état stationnaire du système. Ainsi donc, une condition initiale quelconque fera aboutir le système au même état final néanmoins au prix d'itérations supplémentaires, effort moins contraignant comparativement à celui du calcul de la courbe de remous initiale.

CONCLUSION

L'objectif de ce travail fut d'appliquer un modèle numérique basé sur la méthode des éléments finis pour la prédiction et le calcul du ressaut hydraulique. Après avoir donné les équations du mouvement, qui forment un système d'EDP non linéaires de type hyperbolique, la discrétisation numérique a été faite par une approche des résidus pondérés de Galerkin. A cet effet, la formulation modifiée de Szymkiewicz (2010) a été appliquée, après quoi un schéma d'intégration numérique dans le temps purement explicite a été adopté.

L'analyse a été scindée en deux parties, la première a porté sur l'état stationnaire du ressaut, la deuxième partie quant à elle a concerné l'aspect dynamique du ressaut. Les résultats obtenus ont été très probants et en très bonne concordance avec les résultats expérimentaux. Cependant de légères différences dans la position du ressaut ont été décelées pour $F_r = 7,0$ et celles-ci sont dues au terme source (frottement), ce qui nous mène à affirmer qu'un traitement numérique plus rigoureux de ce terme est nécessaire quant à la détermination de la position exacte du ressaut. De l'analyse dynamique, il a été mis en exergue l'influence du nombre de *Froude* sur l'avancé dynamique du ressaut, notamment l'influence des forces d'inerties sur la progression du ressaut vers l'amont (l'entrée du canal) jusqu'à l'état d'équilibre (stabilisation du ressaut).

Comparativement aux autres techniques aux éléments finis, la présente approche est d'une très grande simplicité dans sa mise en œuvre, facile dans l'implémentation et abouti à des résultats très satisfaisants vu l'effort moindre qu'elle exige, son ordre de précision (premier ordre) empêche l'apparition de phénomène parasite (dispersion numérique). Quant à sa stabilité, elle est soumise à la condition de Courant (CFL) qu'il convient de respecter à l'instar de tout calcul explicite.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- ACHOUR B., BEDJAOU I. A. (2006). Contribution au calcul de la profondeur normale dans un canal rectangulaire. Larhyss Journal, no 5, pp. 139-147.
- ACHOUR B., DEBABECHE M., KHATTAOUI M., BEDJAOU I. A. (2002). Ressaut hydraulique classique et contrôlé dans quelques profils de canaux. Larhyss Journal, no 1, pp. 37-72.

- ACHOUR B., SEDIRA N., DEBABECHE M. (2002). Ressaut contrôlé par seuil dans un canal rectangulaire. *Larhyss Journal*, no 1, pp. 73-85.
- CARVALHO R.F., LEMOS C.M., RAMOS C.M. (2008). Numerical computation of the flow in hydraulic jump stilling basins. *Journal of Hydraulic Research*, vol. 46, no 6, pp. 739-752.
- CHAUDHRY M.H. (2008). *Open-channel flow*. Springer Science & Business Media, 523 p.
- CHIPPADA S., RAMASWAMY B., WHEELER M.F. (1994). Numerical simulation of hydraulic jump. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 37, pp. 1381–1397.
- CHOW V. T. (1959). *Open channel hydraulics*. McGraw-Hill Book Company Inc, New York, 680 p.
- DE PADOVA D., MOSSA M., SIBILLA S., TORTI E. (2013). 3D SPH modelling of hydraulic jump in a very large channel. *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 51, no. 2, pp. 158–173.
- GHARANGIK A.M. (1988). Numerical simulation of hydraulic jump. Thèse de Master of Science, Université de l'Etat de Washington, 66 p.
- GHARANGIK A.M., CHAUDHRY M.H. (1991). Numerical simulation of hydraulic jump. *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 117, no 9, pp 1195-1211.
- GOTTLIEB, D., TURKEL, E. (1976). Dissipative Two-Four Methods for Time-Dependent Problems. *Mathematics of Computation*, Vol. 30, no. 136, pp. 703-723.
- RAHMAN M., CHAUDHRY M.H. (1995). Simulation of hydraulic jump with grid adaptation. *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 33, no 4, pp. 555-569.
- SAKARYA A.B., TOKYAY N.D. (2000). Numerical simulation of A-type hydraulic jumps at positive steps. *Canadian Journal of Civil Engineering*, vol. 27, no 4, pp. 805-813.
- STURM T.W. (2001). *Open Channel Hydraulics*. McGraw-Hill, 493 p.
- SZYMKIEWICZ R. (2010). *Numerical Modeling in Open Channel Hydraulics*. Springer, Dordrecht, 419 p.
- TOKYAY N.D., SAKARYA A.B., ESKI E. (2007). Numerical simulation of minimum B-jumps at abrupt drops. *International journal for numerical methods in fluids*, vol. 56, no 9, pp. 1605-1623.
- ZHOU J.G., STANSBY P.K. (1999). 2D Shallow water flow model for the hydraulic jump. *International Journal of Numerical Methods in Fluids*, 29, pp. 375–387.
- ZIENKIEWICZ O.C., Taylor R.L. (2000). *The Finite Element Method*. Volume 1, Butterworth-Heinemann, 689 p.