

MODÉLISATION ET RÉOLUTION NUMÉRIQUE DE L'ÉQUATION DE POISSON EN 2D PAR LA MÉTHODE DE DIFFÉRENCE FINIE CAS DE L'ÉQUATION DU TRANSFERT DE LA CHALEUR

N.Benhissen et A.Khechekhouché

Trois Rivières, Québec. Canada

Email : nacerb1@yahoo.com

ABSTRACT

The objective of this work is to solve the Poisson equation by the finite difference method is therefore to provide an approximate solution of the actual behavior of a physical phenomenon. Such as the equation of heat transfer. We will take as a model of square/rectangular plate, with different boundary conditions and we will specify also the values boundaries (the Dirichlet condition). The analysis is based on the simulation results based on certain criteria and choice of parameters that comes into play in the equation, this will give us a good understanding of the manipulation of these parameters and thus understand what is happening on environment studied

Key words: Poisson equation, 2D, Simulation, Equation of heat transfer.

RÉSUMÉ

L'objectif de ce travail est de résoudre l'équation de Poisson, par la Méthode de différence finie, c'est donc de fournir une solution approchée du comportement réel d'un phénomène physique. Comme par exemple l'équation du transfert de la chaleur. On va prendre comme modèle une plaque carrée puis rectangulaire, soumises à différentes conditions aux limites et on va spécifier des valeurs sur les frontières (limites du domaine). C'est donc la condition de Dirichlet. L'Analyse va se baser sur les résultats de simulations selon certains critères et choix de paramètres qui entrent en jeu dans l'équation. Cela va nous donner une bonne compréhension sur la manipulation de ces paramètres et ainsi bien comprendre ce qui se passe sur l'environnement à étudié.

Mots clés: Équation de Poisson, Deux dimensions, Simulation, et Équation de transfert de chaleur.

1. INTRODUCTION

L'Analyse numérique est devenue un moyen de base dans la conception d'un produit industriel [5]. En effet la majorité des problèmes physiques sont présentés sous forme d'équation aux dérivées partielles. Cela va nous amener à utiliser des outils mathématiques adaptés (machines et mémoire assez puissantes, environnement Matlab ou C++, ou autres).

2. MODELISATION

En général la modélisation se fait en quatre étapes [3]:



En résumé, la première étape consiste à définir des objectifs ou des observations pour bien comprendre le phénomène à étudier, viendra par la suite la définition de l'équation ainsi que les conditions aux limites. La troisième étape consiste à donner une discrétisation de notre modèle (sous forme matricielle) et un maillage (une sorte de grillage géométriquement bien défini), et enfin on passe à la présentation des résultats sous formes de tableaux et de courbes.

3. CONSTRUCTION GLOBALE DU SYSTÈME

Notre modèle sera l'équation de poisson 2D, qui s'écrit mathématiquement :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \quad \text{Dans le domaine D (intérieur)}$$

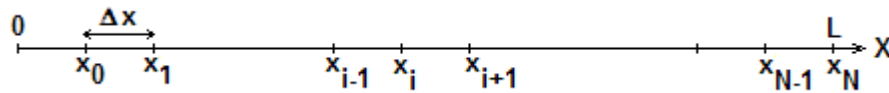
$$\begin{aligned} u(0, y) &= a ; u(L, y) = b \\ u(x, 0) &= c ; u(x, H) = d \end{aligned} \quad \text{Dans le domaine D' (extérieur)}$$

Où a, b, c, d , et $f(x, y)$ sont connus.

Si on veut passer à l'étape de discrétisation, on utilise dans ce cas la notation indicielle [6] :

$$u(x, y) = u(i, j)$$

Soit D un rectangle ou un carré $[0, L] \times [0, H]$, où L est la longueur et H la hauteur. On divise L par M segments, et H par N segments, ce qui donne un pas Δx sur l'axe des x et un pas Δy sur l'axe des y . Cela va nous créer un ensemble de points sur les deux axes, et donc sur l'ensemble de la surface du domaine, que ce soit intérieur ou extérieur, d'où le principe du maillage [5][6]. On appelle cette procédure la construction de schéma :



De même pour l'axe y , avec $H, N, \Delta y$ respectivement la hauteur, le segment et le pas.

Pour construire le maillage, on peut avoir plusieurs cas : Selon un pas constant, ou variable, ou même avoir $\Delta x \neq \Delta y$.

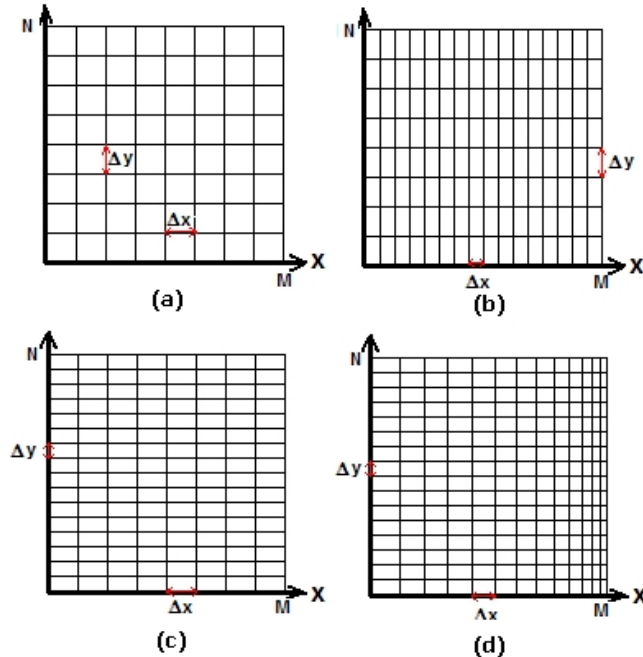


Figure. 1 Différences types de maillage.

Chaque point ou intersection entre les deux axes à l'intérieur du domaine représente une valeur $u(i,j)$ pour laquelle on veut connaître sa valeur. A noter que sur les frontières est connu par les conditions aux limites. Ces points représentent des nœuds ou des cellules, reliés par quatre points voisins. Ce la constitue un réseau de maillage: et numérotation s'effectue par ordre lexicographique (de gauche à droite, puis de bas en haut).

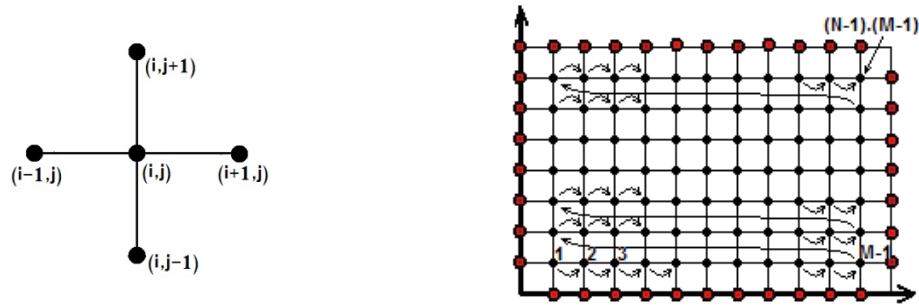


Figure.2 Maillage et numérotation lexicographique.

Si le maillage est uniforme, on peut fixer un pas $\Delta x=L/m$ et $\Delta y=H/n$. Δx et Δy sont très petits, car l'idée c'est de chercher à approcher les valeurs inconnues $u(x_i,y_i)$ pour introduire un système discret. D'où l'utilisation du développement de Taylor pour les dérivées de premiers et de second ordre [4][5][6]. Ce qui nous donne :

$$u'(x) = \frac{u(x) - u(x - \Delta x)}{\Delta x} \quad \text{et} \quad u''(x) = \frac{\frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} - \frac{u(x) - u(x - \Delta x)}{\Delta x}}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow \frac{2u(x) - u(x - \Delta x) - u(x + \Delta x)}{\Delta x^2} \quad \text{de même pour} \quad u''(y) = \frac{2u(y) - u(y - \Delta y) - u(y + \Delta y)}{\Delta y^2}$$

On peut noter : $u(x - \Delta x) = u(i-1)$ et $u(y - \Delta y) = u(j-1)$, et ainsi de suite.

L'équation s'écrit donc sous la forme discrétisée pour (x,y) [3][4][5][8].

$$\frac{2u(i,j) - u(i-1,j) - u(i+1,j)}{\Delta x^2} + \frac{2u(i,j) - u(i,j-1) - u(i,j+1)}{\Delta y^2} = f(i,j) \quad \text{pour } i = 1, M-1$$

et $j = 1, N-1$

$$u(0,j) = a \quad \text{pour } j = [1, N-1]$$

$$u(L,j) = b \quad \text{pour } j = [1, N-1]$$

$$u(i,0) = c \quad \text{pour } i = [1, M-1]$$

$$u(i,H) = d \quad \text{pour } i = [1, M-1]$$

Si on pose : $\alpha_1 = -\frac{1}{\Delta x}$, $\alpha_2 = -\frac{1}{\Delta y^2}$ et $\beta = 2\left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}\right)$

Alors : $\alpha_1 \cdot u(i-1,j) + \alpha_1 \cdot u(i+1,j) + \beta \cdot u(i,j) + \alpha_2 \cdot u(i,j-1) + \alpha_2 \cdot u(i,j+1) = f(i,j)$

pour $i = 1, M-1$ et $j = 1, N-1$,

et avec les conditions aux limites mentionnées ci-dessus. On peut écrire ce système sous forme matriciel :

$$A \cdot x = b$$

Ou x est la solution, et A est la matrice d'une taille $[M-1] \cdot [N-1]$, x est un vecteur à qui on cherche ces éléments et b est le vecteur qui contient les éléments $f(i,j)$ plus les éléments des frontières [1][2].

Le système possède la forme :

A est une matrice bloc creuse, tri diagonale, symétrique définie positive. Avec A1, A2 deux matrices de dimension (M-1), qui possèdent cette forme :

$$A1 = \begin{bmatrix} \beta & \alpha1 & & & \\ \alpha1 & \beta & \alpha1 & & \\ & \alpha1 & \beta & \alpha1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \alpha1 & \beta & \alpha1 \\ & & & & \alpha1 & \beta & \alpha1 \\ & & & & & \alpha1 & \beta \end{bmatrix} \quad A2 = \begin{bmatrix} \alpha2 & & & & \\ & \alpha2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \alpha2 \end{bmatrix}$$

Pour résoudre ce système, il suffit d'utiliser l'algorithme de THOMATS [1][7][9] qui est le mieux adapté pour des matrices blocs et creuses. Pour cela, on décompose A en un produit de deux matrices $A=GU$

Où :

Comme on a : $A.x = b$, alors $G.U.x = b$, on pose $y = U.x$

La première étape consiste à déterminer les G_i et les U_i , ensuite on détermine le vecteur y , car $G.y=b$. Et enfin on résout le système : $y=U.x$ [1].

Par identification, on obtient l'algorithme :

$$\begin{aligned}
 U_1 &= A_1^{-1} \cdot A_2 \\
 U_2 &= (A_1 - A_2 \cdot U_1)^{-1} \cdot A_2 \\
 U_3 &= (A_1 - A_2 \cdot U_2)^{-1} \cdot A_2 \\
 &\vdots \\
 U_i &= (A_1 - A_2 \cdot U_{j-1})^{-1} \cdot A_2 \\
 G_1 &= A_1 - A_2 \cdot b_1 \\
 G_2 &= (A_1 - A_2 \cdot U_1)^{-1} \cdot (b_2 - A_2 \cdot G_1) \\
 G_3 &= (A_1 - A_2 \cdot U_2)^{-1} \cdot (b_3 - A_2 \cdot G_2) \\
 &\vdots \\
 G_i &= (A_1 - A_2 \cdot U_{j-1})^{-1} \cdot (b_i - A_2 \cdot G_{j-1})
 \end{aligned}$$

Pour i=2 à N-2

$$X_{N-1} = G_{N-1}$$

$$X_i = G_i - U_j \cdot X_{j+1}$$

Pour i=N-2,1

Structure et Organigramme pour le Traitement des données

4. TRAITEMENT DES DONNEES

Voici un organigramme qui résume l'élaboration du code source fait en C++ (figure3) [1]. Avant de commencer le code, il faut bien optimiser le programme, et surtout de bien gérer la mémoire avec une allocation dynamique, et ensuite la bien libérer, car on travaille ici avec des matrices de grandes tailles, surtout si on veut augmenter le nombre de points à discrétiser que ce soit sur l'axe x ou sur l'axe y.

Il est nécessaire aussi de créer des fonctions, comme [1][2] : La multiplication d'une matrice par un vecteur, la multiplication de deux matrices, la soustraction de deux vecteurs, la soustraction de deux matrices, et enfin l'inverse d'une matrice. Cela va faciliter l'élaboration et le traitement de l'algorithme de THOMAS. Les résultats sont par la suite exportés sur Matlab [10], dans le but d'avoir un meilleur affichage surtout dans le domaine du graphisme.

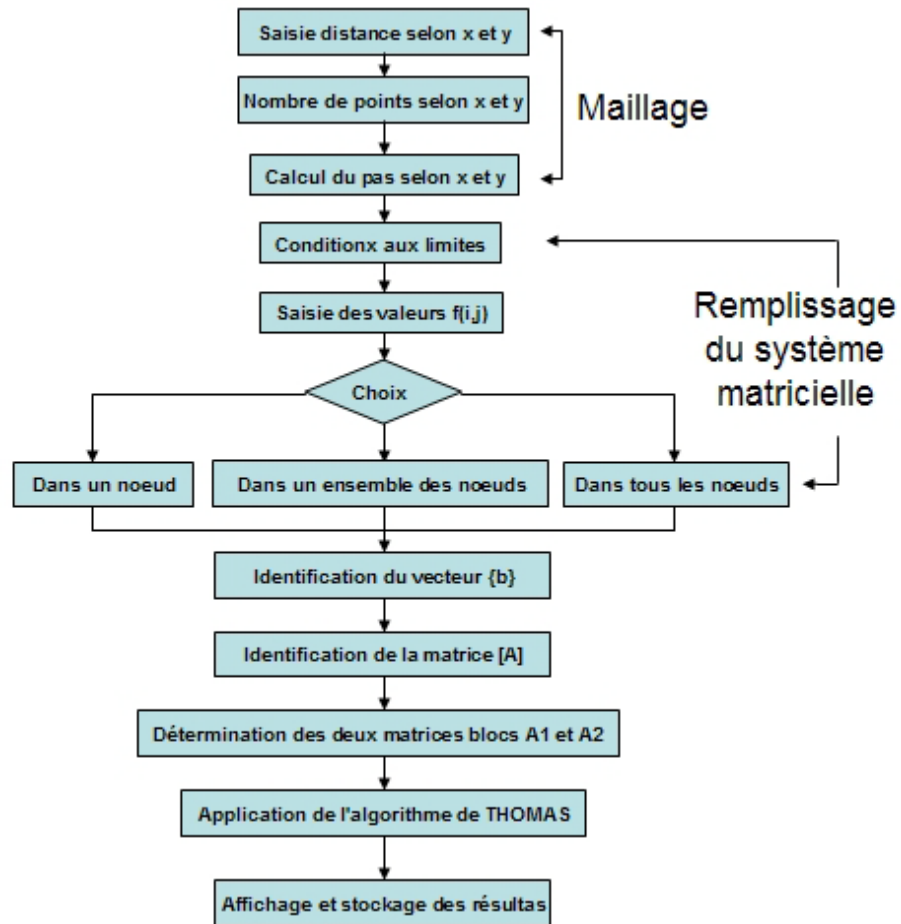


Figure.3 Structure et Organigramme pour le Traitement des données.

5. Résultats

Voici quelques résultats : Si, on applique notre système comme étant une équation de la chaleur, avec une conductivité constante et un régime stationnaire, alors on peut considérer (u) comme une température.

Exemple : Considérons $M=40$, $N=30$, $T_{\text{gauche}} = T_{\text{droite}} = T_{\text{haut}} = T_{\text{bas}} = 20^\circ$, pour un flux variable imposé sur le côté gauche. Voici les résultats :

Résultat 1.

On remarque que plus le flux est intense, plus il pénètre à l'intérieur, avec une concentration au milieu de l'extrémité gauche. Figure 4.

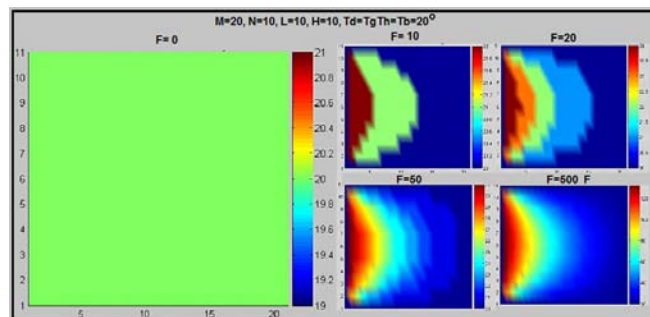


Figure.4 Influence du flux.

Résultat 1.

De la même manière, si on considère que la température du côté gauche augmente, alors la propagation s'effectue d'une manière intense au milieu de l'extrémité vers l'adroite. Cela a comme effet de donner une bonne précision sur certains cotés ou régions. Figure 5 et 6.

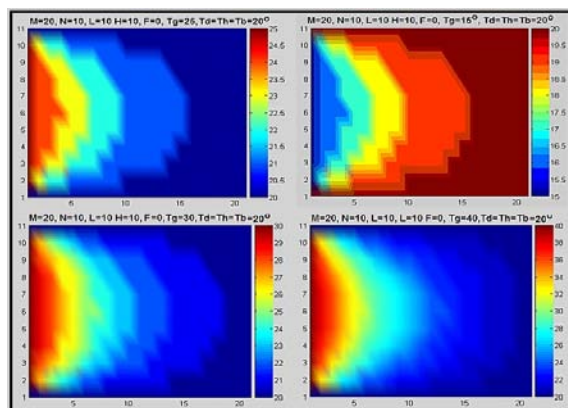


Figure.5 Influence de la température sur un seul côté.

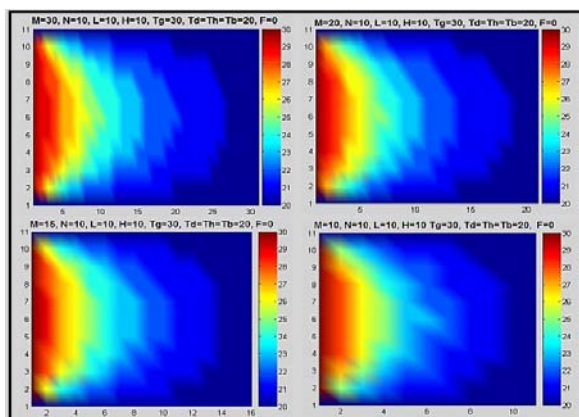


Figure.6 Influence du nombre de discrétisation selon l'axe x.

Résultat 3.

L'influence de la température sur les deux cotés est traduite par la figure 7.

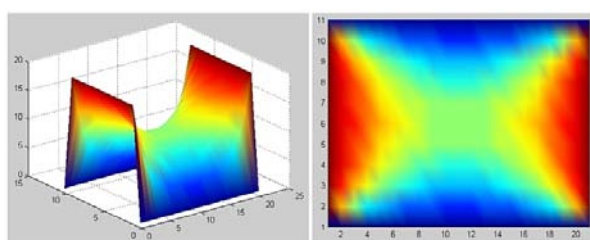


Figure.7 Influence de la température sur les deux cotés.

Résultat 4.

L'influence du flux un seul coté est traduite par la figure 8.

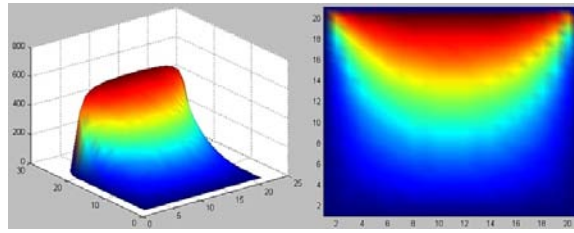


Figure.8 L'influence du flux un seul coté.

Résultat 5.

Influence de flux sur un seul nœud au milieu est traduite par la figure 9.

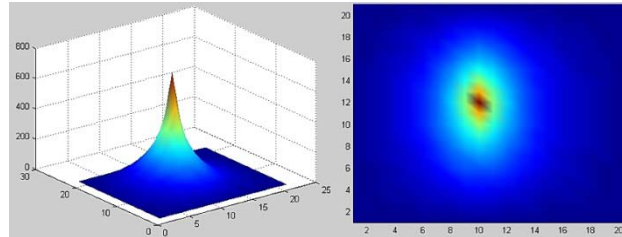


Figure.9 Influence de flux sur un seul nœud au milieu.

Résultat 6.

Influence de flux sur un seul nœud au coté est traduite par la figure 10.

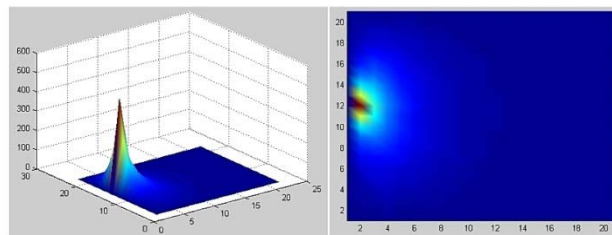


Figure.10 Influence de flux sur un seul nœud au coté.

Résultat 7.

Influence du flux sur l'ensemble des nœuds traduits par la figure 11.

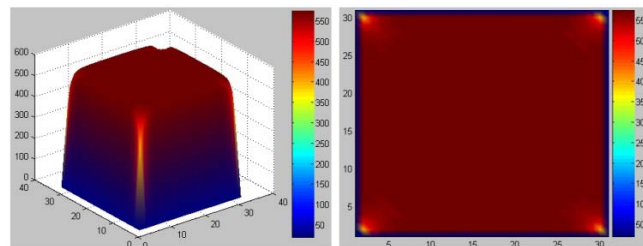


Figure.11 Influence du flux sur l'ensemble des nœuds.

6. CONCLUSION

L'objectif de ce travail est de montrer la procédure à suivre pour analyser un phénomène physique, avec une méthode simple et efficace (DF). On a vu la démarche et les étapes qu'il faut prendre pour passer d'un modèle mathématique à un modèle numérique. Pour cela, on a pris comme exemple l'équation de Poisson, et pour montrer les résultats, on a utilisé l'équation du transfert de la chaleur. Dans la vraie vie, l'étape la plus difficile ce n'est pas le traitement et l'analyse numérique, mais c'est de comprendre le phénomène physique et de le traduire en formulation mathématique. C'est d'établir le bilan énergétique. Une fois que tous est modélisé physiquement et

mathématiquement, le reste ce n'est que des applications d'algorithmes pour résoudre des matrices en général de moyenne et grandes tailles.

Ce travail constitue une bonne base pour l'analyse des phénomènes physiques qui traitent des équations aux dérivées partielles en 2D. Dans plusieurs secteurs et branches, que ce soit dans le cadre pédagogique ou industriel. Dans le prochain travail, on va passer en 3D. Avec la même procédure et démarche et là on va voir l'efficacité de l'algorithme de THOMATS, et surtout les limites de capacité des ordinateurs séquentiels.

REFERENCES

- [1] Benhissen N. E. UQTR., Université du Québec à Trois Rivières. Modélisation des couplages électrothermiques dans les composants électroniques. M. Sc. A. 1998.
- [2] Benhissen N. E., Skorek A., Lakhsasi A. Parallel Modeling of the IGBT Electrothermal Behavior. (a) UQTR (b).UQH. IEEE.1999. 0-7803-5589-X/99. Industry Applications Conference, 1999. Thirty-Fourth IAS Annual Meeting. Conference Record of the 1999 IEEE.
- [3] François E. L., Hello G., Martin V., Rchik M., Rassineux A. UTC (Université de technologie Compiègne). Méthode des différences finies. Approche stationnaire. cours 09-2006
- [4] François E. L., Hello G., Martin V., Rchik M., Rassineux A. Modélisation numérique des problèmes de l'ingénieur. cours.UTC (Université de technologie Compiègne). cours 09-2006
- [5] Vincent Guinot., Bernard Cappelaere. Polytech Montpellier. Méthode numérique appliquée. Résolution numérique des équations différentielles de l'ingénieur. Cours. S. TE. 2. 2006.
- [6] François MUSY. Discrétisation d'un problème aux limites par différence finies. Systèmes creux correspondants. Cours Analyse numérique. Université de Lyon. cours 2009-2010
- [7] Guillaume L. Université Paris DAUPHINE. Méthodes numériques. Introduction à l'analyse numérique et au calcul scientifique. Cours. 2009/2010.
- [8] Pierre Y. L. Résolution numérique implicite de l'équation de la chaleur. Cours. CNRS. 09-2006 Hassan D. Faculté des sciences d'Agadir. Analyse Numérique. 03-2010
- [9] Bonjour J. D. EPFL. ENAC. Graphiques Images et Animations. Matlab. IT Lausanne. 2011.